Blatt 4

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 19.11, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 4.1 (3+3+4+5+5+5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Sei $L \subseteq \mathbb{K}^n$ ein affiner Unterraum, mit $\dim L = d$. Zeigen Sie, dass L Punkte $P_1, \dots, P_{d+1}$ in allgemeiner linearer Lage enthält.

(ii) Seien $P_1, \dots P_r \in \mathbb{K}^n$ mit $r \leq n+1$ Punkte in linearer allgemeiner Lage. Zeigen Sie, dass Punkte $P_{r+1}, \dots, P_n$ existieren, so dass $P_1, \dots, P_{n+1}$ in linearen allgemeiner Lage sind.

(iii) Seien $L, L' \subseteq \mathbb{K}^n$ zwei affine Unterräume mit $\dim L = \dim L'$. Zeigen Sie, dass eine affine Transformation $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{K}^n)$ so dass $f(L) = L'$ existiert.

(iv) Seien $L, L' \subseteq \mathbb{K}^3$ zwei windschiefe Geraden und seien $M, M' \subseteq \mathbb{K}^3$ zwei andere windschiefe Geraden. Zeigen Sie, dass eine affine Transformation $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{K}^3)$ existiert, so dass $f(L) = M, f(L') = M'$.

(v) Seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{K}^n$ paarweise verschiedene kollineare Punkte, und seien $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{K}^n$ andere paarweise verschiedene und kollineare Punkte. Zeigen Sie, dass eine affine Transformation $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{K}^n)$ so dass $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ existiert, genau dann, wenn die Teilverhältnisse gleich sind.

$$\frac{P_1 - P_3}{P_2 - P_3} = \frac{Q_1 - Q_3}{Q_2 - Q_3}$$

(vi) Sei $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{K}^n)$ eine affine Transformation mit der Eigenschaft, dass $f(L)$ und L für jede Gerade $L \subseteq \mathbb{K}^n$ parallel sind. Zeigen Sie, dass f entweder eine Translation oder eine zentrische Streckung ist.

Aufgabe 4.2 (10 Punkte) Beweisen Sie den Satz von Ceva: Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A, B, C \in \mathbb{K}^2$ drei nicht-kollineare Punkte. Seien auch $a \in L(B, C) \setminus \{B, C\}, b \in L(A, C) \setminus \{A, C\}, c \in L(A, B) \setminus \{A, B\}$. Die Geraden $L(A, a), L(B, b), L(C, c)$ sind kopunktal oder parallel, genau dann, wenn

$$\frac{B - a}{C - a} \cdot \frac{C - b}{A - b} \cdot \frac{A - c}{B - c} = -1$$

Aufgabe 4.3 (5 Punkte) Wir betrachten die Punkte

$$P_1 = (4, 3, 2), P_2 = (3, 3, 2), P_3 = (2, 2, 2), P_4 = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$$

Finden Sie alle affine Transformationen $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^3)$ so dass

$$f(P_1) = (1, 0, 0), f(P_2) = (0, 1, 0), f(P_3) = (0, 0, 1), f(P_4) = (0, 0, 0)$$
