Eberhard Karls Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik

Sommersemester 2025

Programm Proseminar „Matroide“

Felix Röhrle

1 Einleitung

Matroide sind eine kombinatorische Datenstruktur, welche nahezu überall in der Mathematik auftaucht. Sie abstrahieren lineare (Un-)Abhängigkeit in Vektorräumen, die Zykelstruktur von Graphen, das Schnittverhalten und Hyperebenenarrangements, und vieles mehr. Darüber hinaus haben Matroide Anwendungen in Geometrie, Kombinatorik, Optimierung, Informatik, und so weiter und so fort. Seit Whitney das Konzept 1935 eingeführt hat, ist die Theorie beständig gewachsen und gewann 2022 nochmals deutlichen Auftrieb, als June Huh für seine Arbeiten in der Matroidtheorie mit der Fields Medaile ausgezeichnet wurde. Nichts desto trotz ist der Einstieg in die Theorie elementar und begleitet von vielen Beispielen.

In diesem Proseminar lernen wir die grundlegenden Begriffe wie bespw. Auszüge aus der langen Liste der äquivaleten (”kryptomorphen”) Beschreibungen von Matroiden, sowie grundlegende Konzepte wie Dualität, Rang, Minoren, etc. kennen. Im Anschluss tauschen wir dann in ausgewählte Themen tiefer ein.

- **Inhaltliche Voraussetzung** für die Teilnahme ist Lineare Algebra 1.
- **Literatur.** Das Standardwerk für Matroidtheorie ist [Oxl11]. Das Buch ist in englischer Sprache verfasst, aber sehr gut verständlich und einführend. Wir werden diesem Buch für ca. die erste Hälfte des Seminars folgen. In der zweiten Hälfte werden wir uns vermehrt mit Forschungsartikeln beschäftigen.
- **Ablauf:** Für alle Interessierten gibt es am 22.01.2025 eine Vorbesprechung. Das Seminar beginnt in der zweiten Woche des Sommersemesters.
- **Termin:** Freitags, 12:15 – 13:45, Raum TBA
- **Schein:** Für die erfolgreiche Teilname muss
    1. ein Vortrag von 75 – 90 Minuten gehalten werden (Bewertungskriterien siehe Website),
    2. regelmäßig aktiv am Seminar teilgenommen werden,

3. zusätzlich zum Vortrag muss eine Übungsaufgabe als Lernkontrolle für die anderen Seminarteilnehmer als Hausaufgabe gestellt werden, korrigiert werden, und ggf. besprochen werden.

2 Vortragsthemen

Tabelle 1: Vorträge

25.04.	**Vortrag 1: Unabhängige Mengen und Circuits** Definieren Sie Matroide via unabhängige Mengen, reguläre Matroide, Darstellbarkeit („representable“), Circuits, und graphische Matroide. Literatur: [Oxl11, Abschnitt 1.1, Text nach 1.1.8 kürzen].
02.05.	**Vortrag 2: Basen, Minoren und Rang** Literatur: [Oxl11, Abschnitt 1.2 bis inklusive Ex. 1.2.7 und Abschnitt 1.3 bis inklusive Ex. 1.3.9]
09.05.	**Vortrag 3: Geometrische Darstellung von Matroiden** Literaur: [Oxl11, Abschnitt 1.5]
16.05.	**Vortrag 4: Dualität** Literaur: [Oxl11, Abschnitt 2.1 bis inklusive 2.1.12, ohne 2.1.6, 2.1.7, sowie Abschnitt 2.2 (besonders wichtig sind 2.2.8, 2.2.9, 2.2.10, 2.2.12, 2.2.26 (Beispiel für einen nicht darstellbaren Matroid))]
23.05.	**Vortrag 5: Planare Graphen** Beiweisen Sie das matroidale Kriterium für Planarität. Literatur: [Oxl11, Abschnitte 2.3 und 5.2]. Geben Sie ggf. nötige Definitionen von direkter Summe, Zusammenhang, etc. aus [Oxl11, Kapitel 4]
30.05.	**Vortrag 6: Whitney's 2-Isomorphiesatz** Literatur: [Oxl11, 1.2.9 und Abschnitt 5.3]
06.06.	**Vortrag 7: Matroid Basis Graphs** Definieren Sie den Matroid Basisgraph und beweisen Sie die Charakterisierung. Literatur: [Mau73]
13.06.	**Vortrag 8: Matroid circuit graphs** Definiren Sie den Matroid circuit graph, präsentieren Sie einen Auszug dessen struktureller Eigenschaften und beweisen Sie diese zumindest teilweise. Literatur: [LL08a; LL08b; LL10; LL07]
20.06.	**Vortrag 9: Orientierte Matroide** Literatur: [Bj93]

Continued on next page

Tabelle 1: Vorträge (Continued)

27.06.	**Vortrag 10: Projektive Orientierungen von Matroiden** Definieren Sie projektive Orientierungen. Gehen Sie auf das Beispiel $U_{2,4}$ detailliert ein. Beweisen Sie den Hauptsatz in Auszügen. Literatur: [GRS95] Braucht die Grundlagen, flat, closure, connected. Muss in Zusammenarbeit mit Einführung orientierte Matroide bearbeitet werden.
04.07.	**Vortrag 11: Signed graphic matroids** Definieren Sie Graphen mit Vorzeichen („signed graphs") und deren assoziierten Matroid. Geben Sie mehrere kryptomorphe Beschreibungen und zeigen Sie, dass es tatsächlich ein Matroid ist. Definieren Sie außerdem Orientierungen auf den Graphen mit Vorzeichen und deren Matroiden. Literatur: [Zas82] als Ausgangspunkt, bitte [Zas83] beachten! Für Orientierung [Zas91].
11.07.	**Vortrag 12: Verbotene Minoren von graphischen Matroiden** Beweisen sie die Characterisierung der graphischen Matroiden durch verbotene Minoren. Literatur: [Ger95]

Literatur

[Bj93] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White und Günter M. Ziegler. *Oriented matroids*. Bd. 46. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1993, S. xii+516. ISBN: 0-521-41836-4.

[Ger95] A. M. H. Gerards. „On Tutte's characterization of graphic matroids—a graphic proof". In: *J. Graph Theory* 20.3 (1995), S. 351–359. ISSN: 0364-9024,1097-0118. DOI: 10.1002/jgt.3190200311. URL: https://doi.org/10.1002/jgt.3190200311.

[GRS95] Israel M. Gelfand, Grigori L. Rybnikov und David A. Stone. „Projective orientations of matroids". In: *Adv. Math.* 113.1 (1995), S. 118–150. ISSN: 0001-8708,1090-2082. DOI: 10.1006/aima.1995.1036. URL: https://doi.org/10.1006/aima.1995.1036.

[LL07] Ping Li und Guizhen Liu. „Cycles in circuit graphs of matroids". In: *Graphs Combin.* 23.4 (2007), S. 425–431. ISSN: 0911-0119,1435-5914. DOI: 10.1007/s00373-007-0739-7. URL: https://doi.org/10.1007/s00373-007-0739-7.

[LL08a] Ping Li und Guizhen Liu. „Hamilton cycles in circuit graphs of matroids". In: *Comput. Math. Appl.* 55.4 (2008), S. 654–659. ISSN: 0898-1221,1873-7668.

DOI: 10.1016/j.camwa.2007.04.039. URL: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.04.039.

[LL08b] Guizhen Liu und Ping Li. „Paths in circuit graphs of matroids“. In: *Theoret. Comput. Sci.* 396.1-3 (2008), S. 258–263. ISSN: 0304-3975,1879-2294. DOI: 10.1016/j.tcs.2008.01.033. URL: https://doi.org/10.1016/j.tcs.2008.01.033.

[LL10] Ping Li und Gui Zhen Liu. „The connectivity and minimum degree of circuit graphs of matroids“. In: *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 26.2 (2010), S. 353–360. ISSN: 1439-8516,1439-7617. DOI: 10.1007/s10114-010-6685-y. URL: https://doi.org/10.1007/s10114-010-6685-y.

[Mau73] Stephen B. Maurer. „Matroid basis graphs. I“. In: *J. Combinatorial Theory Ser. B* 14 (1973), S. 216–240. ISSN: 0095-8956. DOI: 10.1016/0095-8956(73)90005-1. URL: https://doi.org/10.1016/0095-8956(73)90005-1.

[Oxl11] James Oxley. *Matroid theory.* Second. Bd. 21. Oxford Graduate Texts in Mathematics. Oxford University Press, Oxford, 2011, S. xiv+684. ISBN: 978-0-19-960339-8. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001. URL: https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198566946.001.0001.

[Zas82] Thomas Zaslavsky. „Signed graphs“. In: *Discrete Appl. Math.* 4.1 (1982), S. 47–74. ISSN: 0166-218X,1872-6771. DOI: 10.1016/0166-218X(82)90033-6. URL: https://doi.org/10.1016/0166-218X(82)90033-6.

[Zas83] Thomas Zaslavsky. „Erratum: “Signed graphs” “. In: *Discrete Appl. Math.* 5.2 (1983), S. 248. ISSN: 0166-218X,1872-6771. DOI: 10.1016/0166-218X(83)90047-1. URL: https://doi.org/10.1016/0166-218X(83)90047-1.

[Zas91] Thomas Zaslavsky. „Orientation of signed graphs“. In: *European J. Combin.* 12.4 (1991), S. 361–375. ISSN: 0195-6698,1095-9971. DOI: 10.1016/S0195-6698(13)80118-7. URL: https://doi.org/10.1016/S0195-6698(13)80118-7.