UNIVERSITÄT TÜBINGEN Prof. Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Dr. Felix Röhrle

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2025

Blatt 2 Abgabetermin: Mittwoch, 30.04. bis 12:00.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Benutzen Sie den Euklidischen Algorithmus, um das Inverse von [25] in $(\mathbb{Z}_{57}, \cdot)$ zu finden.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das multiplikative Inverse von $[16] \in \mathbb{Z}_{31}$.

(b) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_{31}$:

$$\begin{aligned}
[1]x_1 + [2]x_2 + [2]x_3 + [2]x_4 &= [1] \\
[1]x_1 + [2]x_3 + [1]x_4 &= [1] \\
[2]x_1 + [2]x_2 + [1]x_3 &= [2] \\
[1]x_1 + [1]x_2 + [2]x_4 &= [0]
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $(\mathbb{Z}, +)$ die Gruppe, die von der Addition auf $\mathbb{Z}$ induziert wird.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $d \in \mathbb{N}$ die Menge $d\mathbb{Z}$ eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ bildet.

(b) Zeigen Sie, dass jede Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$ von der Form $d\mathbb{Z}$ für ein $d \in \mathbb{N}$ ist.

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem element id.

(c) Zeigen Sie, dass $(G, \cdot)$ abelsch ist, wenn $g \cdot g = \mathrm{id}$ für alle $g \in G$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass es neben der Nullabbildung keinen weiteren Gruppenhomomorphimus von $(\mathbb{Q}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$ gibt.

Entscheiden Sie jeweils, ob die folgenden Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) $f : (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot) \to (\mathbb{R}, +), x \mapsto \frac{1}{x}$,

(c) $g : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot), x \mapsto e^x$.