UNIVERSITÄT TÜBINGEN Prof. Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Dr. Felix Röhrle

Übungen zur Vorlesung lineare Algebra 1

Sommersemester 2025

Blatt 1 Abgabetermin: Mittwoch, 23.04. bis 12:00.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir definieren drei Matrizen $A_1, A_2, A_3 \in \mathrm{Mat}(4 \times 5, \mathbb{R})$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ mit Hilfe folgender erweiterter Koeffizientenmatrizen:

$$(A_1, b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad (A_2, b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$(A_3, b) := \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

1. Welche der Koeffizientenmatrizen liegen in reduzierter Zeilenstufenform vor?
2. Finden Sie für die Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform zwei verschiedene Lösungen des Gleichungssystems $A_i \cdot x = b$. Schreiben Sie anschließend die Lösungsmenge in Parameterform.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Bringen Sie die Matrizen

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 7 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } M_2 := \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

per Gauß-Algorithmus in reduzierte Zeilenstufenform.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Bestimmen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das folgende lineare Gleichungssystem lösbar ist und bestimmen Sie die Lösungsmenge.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_5 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ x_3 + x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= \alpha^2 + 2\alpha - 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Kann man die ganzzahlige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

durch **reelle** elementare Zeilenumformungen in die ganzzahlige Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

überführen? Kann man das auch durch **ganzzahlige** elementare Zeilenumformungen (was ist das?)?