UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebra

Sommersemester 2025

Blatt 1

Abgabetermin: Mittwoch, 23.04.2025, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 +2 = 6 Punkte)

Sei S_3 die symmetrische Gruppe, d.h. die Gruppe aller Permutationen einer 3-elementigen Menge. Wir definieren die Untergruppe $U = \langle (123) \rangle$, die durch das Element (123) erzeugt wird.

(a) Zeigen Sie, dass U Normalteiler in S_3 ist und listen Sie alle Nebenklassen von U in S_3/U auf. Überzeugen Sie sich, dass die Gruppenverknüpfung auf S_3/U wohldefiniert ist.

(b) Beweisen Sie $S_3/U \cong S_2$.

Aufgabe 2 (3 + 3 + 3 + 3 = 12 Punkte)

Es sei G eine beliebige Gruppe. Zeigen oder widerlegen Sie

(a) Wenn G Untergruppen H_1 und H_2 mit der Eigenschaft $H_2 \subset H_1 \subset G$ hat, dann ist auch H_2 eine Untergruppe von H_1.

(b) Umgekehrt: Wenn H_1 eine Untergruppe von G und H_2 eine Untergruppe von H_1 ist, dann ist auch H_2 eine Untergruppe von G.

(c) Wenn H_1 und H_2 Normaltieler von G sind mit $H_2 \subset H_1 \subset G$, dann ist H_2 Normalteiler in H_1.

(d) Wenn H_1 Normalteiler in G ist und H_2 Normalteiler in H_1, dann ist H_2 Normalteiler in G.

Aufgabe 3 (4 + 4 + 1 = 9 Punkte)

Sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie

(a) Wenn N ein Normalteiler in H ist, dann ist $f^{-1}(N)$ ein Normalteiler in G.

(b) Wenn f surjektiv und N ein Normalteiler in G ist, dann ist $f(N)$ ein Normalteiler in H.

(c) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass auf die Voraussetzung „f surjektiv“ in (b) nicht verzichtet werden kann.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Gruppe G operiere auf der Menge X.Es seien $x, y \in X$ auf der selben Bahn, d.h. $G \cdot x = G \cdot y$. Zeigen Sie, dass die Stabilisatoren von x und y isomorph sind.

Abgabeform (online oder per Briefkasten) wird noch bekannt gegeben.