**UNIVERSITÄT TÜBINGEN** Hannah Markwig
**FACHBEREICH MATHEMATIK** Lou-Jean Cobigo

# Übungen zur Vorlesung Multilineare Algebra

Sommersemester 2024

## Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 01.07.2024, 10:00 Uhr

---

### Aufgabe 1 (2+2+2+2+2=10 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $A \in \mathrm{Mat}(n \times n', \mathbb{K}), B \in \mathrm{Mat}(m \times m', \mathbb{K}), C \in \mathrm{Mat}(n' \times n'', \mathbb{K}), D \in \mathrm{Mat}(m' \times m'', \mathbb{K})$ Matrizen. Zeigen Sie:

(a) $(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = (A \cdot C) \otimes (B \cdot D)$,

(b) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.

Nehmen Sie an, dass $A, B$ quadratisch sind und zeigen Sie:

(c) Wenn $A, B$ symmetrisch sind, dann ist $A \otimes B$ symmetrisch.

(d) $\det(A \otimes B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n$

(e) Wenn $A$ und $B$ invertierbar sind, dann gilt $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.

---

### Aufgabe 2 (1+4=5 Punkte)

Sei $E := (e_1, \dots, e_4)$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ und sei $\alpha \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^4$ durch $\alpha := e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass $\alpha$ zerlegbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \bigwedge^3 \mathbb{R}^4,\ x \mapsto x \wedge \alpha$ linear ist und bestimmen Sie die Abbildungsmatrix ${}_E M_B(f)$ von $f$ bezüglich der Basen $E$ und $B$, wobei die Basis $B$ von $\bigwedge^3 \mathbb{R}^4$ durch $B := (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$ gegeben ist.

---

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $V$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in $V$. Seien $v'_1, \dots, v'_n \in V$, und seien $U := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ und $U' := \langle v'_1, \dots, v'_n \rangle$ zwei Unterräume von $V$. Zeigen Sie, dass $U = U'$ genau dann gilt, wenn ein $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ existiert, sodass $v_1 \wedge \dots \wedge v_n = \lambda(v'_1 \wedge \dots \wedge v'_n)$.

---

### Aufgabe 4 ( 4 + 4 = 8 Punkte)

Es seien $V$ und $W$ zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Eine bilineare Abbildung $f : V \times V \to W$ heißt *symmetrisch*, falls $f(x, y) = f(y, x)$ für alle $x, y \in V$ gilt.

(a) Zeigen Sie in Analogie zu Satz 3.1.10 aus der Vorlesung die Existenz eines *symmetrischen Produktes.* Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ gibt es einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \vee V$ zusammen mit einer symmetrischen Abbildung

$$\vee : V \times V \to V \vee V,$$

die die folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllen: Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum $W$ zusammen mit einer symmetrischen Abbildung $f : V \times V \to W$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $h : V \vee V \to W$ mit $f = h \circ \vee$. Ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von $V$, so ist durch $v_i \vee v_j := \vee(v_i, v_j)$ mit $i \leqslant j$ eine Basis von $V \vee V$ gegeben. Insbesondere ist

$$dim_{\mathbb{K}}(V \vee V) = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}.$$

(b) Mit $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]_{(2)}$ bezeichnen wir den Vektorraum der *homogenen* Polynome vom Grad 2, i.e. das $\mathbb{K}$-Vektorraum Erzeugnis der Monome vom Grad 2, $\langle\{x_i x_j | i, j \in \{1,2,3\}\}\rangle$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{K}^3 \vee \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]_{(2)}, e_i \vee e_j \mapsto x_i x_j$$

einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen definiert, wobei $(e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^3$ bezeichnet.

---

**Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet zweiwöchentlichs freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.**