UNIVERSITÄT TÜBINGEN
FACHBEREICH MATHEMATIK

Hannah Markwig
Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Multilineare Algebra

Sommersemester 2024

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 17.06.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (2 + 2 = 4 Punkte)

(a) Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $x, y \in V$. Zeigen Sie, dass $x, y \in V$ genau dann linear abhängig sind, wenn

$$x \otimes y = y \otimes x \in V \otimes_{\mathbb{K}} V$$

gilt.

(b) Es seien $V_1, ..., V_n$ endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $x_i, y_i \in V_i \setminus \{0\}$ für $i \in \{1, ..., n\}$ Elemente für die

$$x_1 \otimes ... \otimes x_n = y_1 \otimes ... \otimes y_n \in V_1 \otimes_{\mathbb{K}} ... \otimes_{\mathbb{K}} V_n$$

gilt. Zeigen Sie, dass für jedes $i \in \{1, ..., n\}$ ein Skalar $\lambda_i \in \mathbb{K}$ existiert mit $x_i = \lambda_i y_i$ und $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.
Hinweis: Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (4 + 4 = 8 Punkte)

(a) Geben Sie an, ob das folgende Element in $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ ein reiner Tensor ist:

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}.$$

(b) Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie für Vektoren $v \in V$, $w \in W$: Es gilt $v \otimes w = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ oder $w = 0$ gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Seien V, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die direkte Summe $V \oplus W$ zusammen mit den beiden Einbettungen

$$\iota_V : V \to V \oplus W, v \mapsto (v, 0)$$
$$\iota_W : W \to V \oplus W, w \mapsto (0, w)$$

die folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt und malen Sie ein Diagramm dazu: Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum U und je zwei lineare Abbildungen $f : V \to U$ und $g : W \to U$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $h : V \oplus W \to U$ mit $f = h \circ \iota_V$ und $g = h \circ \iota_W$.

Aufgabe 4 **(4 + 4 = 8 Punkte)**

(a) Sind $\mathbb{K}$-Algebren A und B (mit Multiplikationsabbildungen $\cdot_A$ und $\cdot_B$) gegeben, so ist $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ auf eindeutige Weise so zu einer $\mathbb{K}$-Algebra (mit Multiplikation $\cdot_{A \otimes_{\mathbb{K}} B}$) gemacht werden kann, dass für alle $a_1, a_2 \in A$ und $b_1, b_2 \in B$

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot_{A \otimes_{\mathbb{K}} B} (a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot_A a_2) \otimes (b_1 \cdot_B b_2)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie: Wird $\mathbb{K}[t] \otimes \mathbb{K}[t]$ wie in (a) zu einer $\mathbb{K}$-Algebra gemacht, so definiert der Vektorraum-Isomorphismus aus der Vorlesung

$$\mathbb{K}[t] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t_1, t_2], t^i \otimes t^j \mapsto t_1^i t_2^j$$

einen Isomorphismus von Ringen mit $1_{\mathbb{K}[t] \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[t]} \mapsto 1_{\mathbb{K}[t_1, t_2]}$.

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet zweiwöchentlichs freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.