19.4.24

Mengentheorie

Eine Menge ist eine ungeordnete Ansammlung von Elementen, wobei jedes Element nur einmal vorkommen kann.

(1) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.

(2) Eine Menge A kann auch andere Mengen enthalten, aber nie sich selbst.

Sind folgende Mengen gleich?

(1) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$

(2) $\{4,4,1\} = \{4,1\}$

(3) $\{\{1,2,3\},4,1\} \neq \{1,2,3,4,1\}$

(4) $\{\{\{\},\{\}\},\{\}\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$

Teilmengen & set-builder notation

$A \subseteq B$: Jedes Element x von A ist Element von B.

$A \subsetneq B$: Es gilt $A \subset B$ und $A \neq B$
„Echte Teilmenge"

Teilmengen definieren: Sei A Menge

$B = \{x \in A \mid$ Aussage die für x gelten muss, damit es in B liegt $\}$

Bsp $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ ist durch 2 teilbar $\}$

$= \{2,4,6,8,\dots\}$

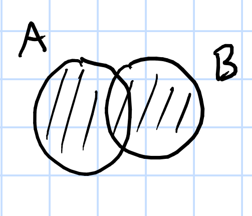
$\{x \in A \mid x \notin A\} = \emptyset$

$\{x \in \mathbb{Q} \mid$ Es gibt $y \in \mathbb{Q}$, sodass $xy = 1\} =$
$\{$ alle Zahlen in $\mathbb{Q}$, außer $0\}$

$\{x \in \mathbb{Z} \mid$ Es gibt $y \in \mathbb{Z}$, sodass $xy = 1\} = \{1,-1\}$

Vereinigungen, Durchschnitt etc.

$A \cup B = \{$ Elemente, die in A oder B enthalten sind $\}$



$A \cap B = \{$ Elemente, die A und in B enthalten sind $\}$

$A \setminus B = \{$ Elemente, die in A und nicht in B enthalten sind $\}$

Sei A Teilmenge von X.

$A^c = \{$ Elemente von X, die nicht in A enthalten sind $\}$
$= \{x \in X \mid x \notin A\}$

! Diese Def. hängt von X ab!

Übung $A = \{1,2,3\}$, $B = \{5,2\}$, $C = \{1\}$

$(A \cup B) \cap C = \{1\}$

$A \cup (B \cap C) = A \cup \emptyset = A$

$(A \setminus B) \cup C = \{1,3\}$

$A \setminus (B \cup C) = A \setminus \{1,2,5\} = \{1\}$

De Morgan'sche Regel

$A, B \subset X$ Komplement bzgl. X

(i) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Beweis: $(A \cap B)^c = \{x \in X \mid x \notin A$ und $x \notin B\}^c$

$= \{x \in X \mid$ Das folgendende gilt nicht: $x \notin A$ und $x \notin B\}$

$= \{x \in X \mid x \notin A$ oder $x \notin B\}$

$= \{x \in X \mid x \notin A\} \cup \{x \in X \mid x \notin B\}$

$= A^c \cup B^c$

Der andere Beweis geht ähnlich. □

(iii) $(A^c)^c = A$

Beweis: $(A^c)^c = \{x \in X \mid x \notin A^c\}^c = \{x \in X \mid \neg(x \in A)\}$

$= \{x \in X \mid x \in A\} = A$ □

$= \{x \in X \mid$ Es gilt nicht $x \notin A\}$

Potenzmenge

$\mathcal{P}(A) = \{$ Menge aller Teilmenge von $A\}$

Bsp. $\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Gilt $1 \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$? Nein, denn 1 ist keine Teilmenge von $\mathbb{N}$ (aber $\{1\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$)

Schreibe systematisch $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\})$ hin.

Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(A)$ für eine endliche Menge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

↳ A hat 2^n Elemente.

Tupel & kartesische Produkte

Ein Tupel ist eine geordnete Liste von Elementen möglicherweise mit Wiederholungen

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Bsp $(1,2) \neq (2,1)$

$(1,1,2) \neq (1,2)$

Sind A, B Mengen, definieren wir das kartesische Produkt $A \times B$ als die Menge

$A \times B = \{$ Tupel (a,b) mit $a \in A, b \in B\}$

Bsp $\{1, \{\}\} \times \{1,2\}$

$= \{(1,1), (1,2), (\{\},1), (\{\},2)\}$

Funktionen

Seien A, B Menge

Eine Funktion/Abbildung f ist ein Tupel (Γ, A, B), wobei Γ eine Teilmenge von $A \times B$ ist, sodass gilt:

Für jedes $a \in A$ gibt es genau ein Tupel $(a,b) \in \Gamma$.

Schreibweise: $f: \underset{\text{Definitionsmenge}}{A} \longrightarrow \underset{\text{Zielmenge}}{B}$, Γ heißt der Graph von X

$(a,b) \in \Gamma$ wird als $f(a) = b$ oder als $f: a \mapsto b$ geschrieben.

Check Sind dies Funktionen?

$A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$

$f_1 = (\{(1,3)\}, A, B)$ ✗

$f_2 = (\{(1,3),(2,4),(1,4)\}, A, B)$ ✗

$f_3 = (\{(1,1),(2,2)\}, A, B)$ ✗, $f_4 = (\{(1,3),(2,3)\}, A, B)$ ✓

Bsp.

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$ $\quad$ $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n$

$\underbrace{\hspace{3em}}_{\text{verschieden:}}$ $f \neq g$!

26.4.2024

Kommentar zu Urbildern:

$f: X \longrightarrow Y$ sei eine Funktion

und $A \subseteq Y$ eine Teilmenge.

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X \mid f(x) \in A \}$$

f^{-1} steht nicht für die Umkehrfunktion.
Eine Umkehrfunktion existiert nur, wenn f bijektiv ist, $f^{-1}(A)$ ist immer definiert.

Spezialfall: $p \in Y$

Die Menge $f^{-1}(\{p\})$ heißt eine Faser von f.
Oft schreibt man aus Faulheit $f^{-1}(p)$, obwohl $f^{-1}(\{p\})$ meint (Siehe Übungsblatt).

f injektiv: Alle Fasern von f haben höchstens ein Element.

f surjektiv: Alle Fasern sind nicht leer.

Beispiele für Induktion → siehe auch „natural number game"

(IA) Induktionsanfang (IS) Induktionsschritt (IV) Induktionsvoraussetzung

Z: Für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(*) \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Beweis: (IA) $n = 1$: $\quad 1^2 = \frac{1}{3}1^3 + \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{6}$ ✓

(IB) Gelte $(*)$ für ein n.

(IS) Zeige dasselbe für $n+1$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$$
$$= \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) + n^2 + 2n + 1$$

$$\frac{1}{3}(n+1)^3 + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + \frac{1}{2}(n^2 + 2n + 1) + \frac{1}{6}n$$
$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + n^2 + 2n + 1 \quad ✓ \quad \boxdot$$

Z: Die Menge der Bijektionen zwischen zwei endlichen Mengen X & Y der selben Kardinalität n ist $n!$

Beweis: Induktion über $n \in \{0, 1, \ldots\}$

(IA) $n = 0$: X & Y sind leer. Es gibt genau eine Funktion $f: \emptyset \longrightarrow \emptyset$

↪ Der Graph ist die leere Menge

(IB) Die Aussage gelte für Mengen der Größe $n-1$.

(IS) Sei $x \in X$ beliebig. Schreibe $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$

$$\underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}\}}_{A} = \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{\{f: X \to Y \mid f \text{ bijektiv}, f(x) = y_i\}}_{A_i}$$

Die obige Vereinigung erfüllt $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

↪ $|A| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$

Ist $f \in A_i$ so ist $f|_{X \setminus \{x\}}: X \setminus \{x\} \longrightarrow Y \setminus \{y_i\}$ eine Bijektion.

$$|A_i| = |\{f: X \setminus \{x\} \to Y \setminus \{y_i\} \mid f \text{ bijektiv}\}| = (n-1)!$$

(Induktionsbehauptung)

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)! = n \cdot (n-1)! = n! \quad \boxdot$$

Z: Hat A n Elemente, so gilt $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Beweis: Induktion über n.

(IA) $n = 0$: $A = \emptyset$, $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\} \rightsquigarrow 2^0$ Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Sei $a \in A$. Jede Teilmenge von A enthält a oder enthält es nicht.

$$\mathcal{P}(A) = \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \in B\}}_{P} \cup \underbrace{\{B \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin B\}}_{Q}$$

Bemerke $P \cap Q = \emptyset$. Außerdem gilt $Q = \mathcal{P}(A \setminus \{a\})$.

Bijektion $f: Q \longrightarrow P$

$$B \mapsto B \cup \{a\}$$

(Warum ist das bijektiv)

$$|\mathcal{P}(A)| = |P| + |Q| = 2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n. \quad \boxdot$$

Z: Sind X, Y endliche Mengen, so gilt

$$|X \times Y| = |X||Y|$$

Beweis: Wir nutzen Induktion über $|X| = n$

(IA) $n = 0$: $X = \emptyset \Rightarrow X \times Y = \emptyset \rightsquigarrow$ hat also $0 \cdot |Y|$ viele Elemente

(IB) Gelte die Aussage für $n-1$.

(IS) Wähle $x \in X$.

$$X \times Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in Y\} \cup (X \setminus \{x\}) \times Y$$

diese Menge sind disjunkt

diese Menge hat genauso viele Elemente wie Y

$$|X \times Y| = |Y| + |(X \setminus \{x\}) \times Y|$$
$$= |Y| + (|X| - 1) \cdot |Y| = |X| \cdot |Y| \quad \boxdot$$

Fibonacci-Zahlen

Induktive Definition: $F_0 = 0, F_1 = 1$ (IA)

Seien alle F_k mit $k < n$ definiert (IB)

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ (IS)

$$F_2 = 1, \quad F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \ldots$$

Z: $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$

Beweis: Induktion über n.

(IA) $n = 0$: $F_1 = 2 - 1 = F_3 - 1$ ✓

(IB) Gelte die Aussage für ein n.

(IS)
$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \left(\sum_{i=1}^{n} F_i\right) + F_{n+1}$$
$$= F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$$
$$= F_{n+3} - 1 \quad \boxdot$$

Was haben Fibonacci-Zahlen mit linearer Algebra zu tun?

Bildungsgesetz in Matrix Form

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{n \text{ mal}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}}$$

↪ Wie berechnet man Potenzen von Matrizen effizient?

Antwort am Ende des Semesters

Lösung von

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

red. Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 3 & 4 \\ \boxed{3} & 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot(-3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{aligned} x_1 - 3x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Lös}\left(A, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_3 + 4x_4 \\ -3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot \frac{1}{2} \\ \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \boxed{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot(-2) \quad \cdot\frac{1}{2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \leftarrow \text{reduzierte Zeilenstufenform}$$

2.5.24

LGS anhand von Beispielen $\rightsquigarrow$ Interpolation:

Polynome sind für uns Funktionen der Form

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$$

Wir wollen hier ein Polynom der Form

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

finden, die folgendes erfüllen:

$$f(-1) = 1,\ f(2) = 2,\ f'(1) = 0$$

$\hookrightarrow$ Das ist ein LGS in a, b, c:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax^2 + b$$

Setze -1 in f ein:

$$(-1)^3 + (-1)^2 a + (-1)b + c = 1 \quad |+1$$

Setze 2 in f ein:

$$2^3 + 2^2 a + 2b + c = 2 \quad |-8$$

Setze 1 in f' ein:

$$3 + 2a + b = 0 \quad |-3$$

Wir bringen alle $()^3$ Terme auf die rechte Seite und erhalten folgendes LGS.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ \boxed{4} & 2 & 1 & -6 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 - 2Z_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & -14 \\ 0 & \boxed{3} & -2 & -7 \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 - \tfrac{1}{2} Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{6} & -3 & -14 \\ 0 & 0 & \boxed{-\frac{1}{2}} & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z_2 \to \frac{1}{6} Z_2 \\ Z_3 \to -2 Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & \boxed{-\frac{1}{2}} & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z_1 \to Z_1 - Z_3 \\ Z_2 \to Z_2 + \frac{1}{2} Z_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad Z_1 \to Z_1 + Z_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$a = -\tfrac{1}{3},\quad b = -\tfrac{7}{3},\quad c = 0$$

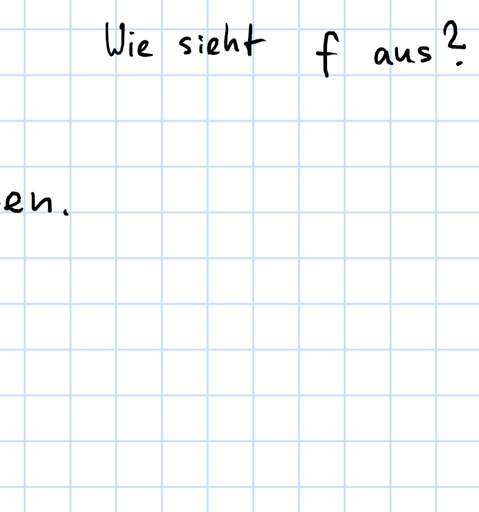
$$f(x) = x^3 - \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{7}{3}x$$

Interpolation ist super flexibel:

Gesucht ist eine Funktion $f(x) = a\,2^x + b \sin(x)$ mit $f(1) = 1,\ f(2) = 2$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 2a + \sin(1)b = 1 \\ 4a + \sin(2)b = 2 \end{cases}$$

Bild:



Wie sieht f aus?

Parametrisierte LGS

Wir betrachten LGS $A_t x = b_t$ bei denen A und b von einem Parameter z.B. $t \in \mathbb{R}$ abhängen.

Beispiel (1)

$$\begin{aligned} (1+t)x_1 &= 3 \\ (2-t)x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist das LGS lösbar?

A: Für $t \neq -1, 2$ lösbar:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ \frac{2}{1+t} \end{pmatrix}$$

Für $t = -1$ ist $0 \cdot x_1 = 3$ nicht lösbar.

Für $t = 2$ ist $0 \cdot x_2 = 2$ —"—

$\hookrightarrow$ Man kann nicht immer durch Ausdrücke der Form $at + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ teilen

$\hookrightarrow$ wenn $t = -\frac{b}{a}$ ist, wäre das Division durch 0.

(2)

$$\begin{aligned} (1+t)x_1 &= 3 \\ (2-t)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Lösbar für $t \neq -1$. Für $t \neq -1, 2$ ist die Lösungsmenge $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Für $t = 2$ gibt es ∞-viele Lösungen

$$\text{Lösungsmenge} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{1+t} \\ x_2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$\begin{aligned} tx_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

In Matrixform:

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Wende Gaussalgorithmus an, aber passe auf wann Division durch Parameterausdrücke erlaubt ist

Fall $t \neq 0$: $Z_2 \to Z_2 - \frac{1}{t} Z_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & \boxed{2} & 1 \\ 0 & \frac{t-2}{t} & \frac{t-1}{t} \end{array}\right)$$

Für $t = 2$ ist das LGS nicht lösbar: denn die zweite Glg. ist: $0 x_2 = \frac{1}{2}$.

Also nehme $t \neq 2$ an.

$$Z_1 \to Z_1 + \frac{-2t}{t-2} Z_2$$

NR: $\frac{t-1}{\cancel{t}} \cdot \frac{-2\cancel{t}}{t-2} + 1 = \frac{-t}{t-2}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} t & 0 & \frac{-t}{t-2} \\ 0 & \frac{t-2}{t} & \frac{t-1}{t} \end{array}\right)$$

$$Z_1 \to \tfrac{1}{t} Z_1$$

$$Z_2 \to \tfrac{t}{t-2} Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{-1}{t-2} \\ 0 & 1 & \frac{t-1}{t-2} \end{array}\right)$$

Lösungsmenge $\text{Lös}(A_t, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1}{t-2} \\ \frac{t-1}{t-2} \end{pmatrix} \right\}$

Fall $t = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad Z_1 \to Z_1 - \tfrac{1}{2} Z_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \text{Lös}_0(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

$\rightsquigarrow$ Nur für $t = 2$ ist das LGS nicht lösbar.

Takeaway: Zeilen zu anderen Zeilen addieren

$$Z_i \to Z_i + \frac{a(t)}{b(t)} Z_j$$

ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn b nicht von t abhängt. Falls b von t abhängt, braucht man eine Fallunterscheidung für die Nst. von b.

$$Z_i \to \frac{a(t)}{b(t)} Z_i$$

ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn $a(t)$ & $b(t)$ konstant sind.

Faustregel: Zeilen nach unten tauschen, die t enthalten (manchmal weniger Fallunterscheidungen)

(4)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t & -t & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ \boxed{t} & -t & 1 & 1 \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 - tZ_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-t} & 1 & 1-t \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 + tZ_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1+t & 1 \end{array}\right)$$

Fall $t = -1$: Nicht lösbar. $0 \cdot x_3 = 1$

Fall $t \neq -1$ $\quad Z_2 \to Z_2 + \frac{-1}{1+t} Z_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{t-1}{1+t} \\ 0 & 0 & 1+t & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Lös}(A_t, b) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{t-1}{1+t} \\ \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \right\}$$

7.5.2024

Komplexe Zahlen

Eine komplexe Zahl ist ein Ausdruck $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{C} = \{ a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

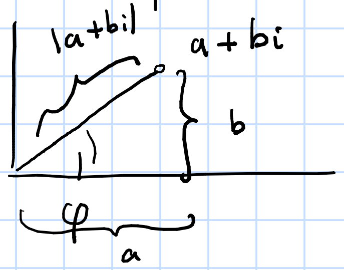
$\mathbb{C}$ ist ein Körper:

Addition: $(a+bi) + (c+di) := (a+c) + (b+d)i$

Multiplikation: $(a+bi)\cdot(c+di) := (ac - bd) + (ad + bc)i$

$i = 0 + 1 \cdot i$ heißt die imaginäre Einheit

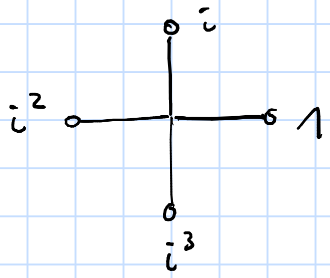
Bildlich:



$|a+bi| = \sqrt{a+bi}$

$\left(\tan\varphi = \frac{b}{a}\right)$

Multiplikation von $z \in \mathbb{C}$ mit $a + bi$ ist Streckung von z um $|a+bi|$ und Drehung von z um φ.



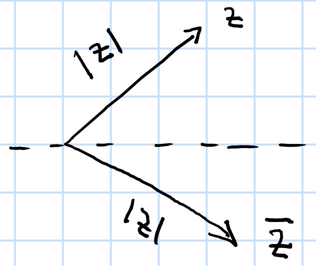
$\hookrightarrow i^4 = 1$

Algebraisch: $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

Was ist i^{43}?

Inverse Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

Geometrisch:



$\bar{z} = a - ib$

Komplex Konjugiertes

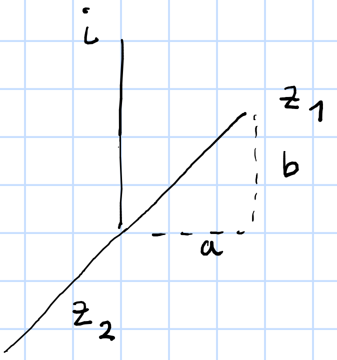
Es gilt $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
$= a^2 + b^2$

Wir wissen wie man durch reelle Zahlen teilt:

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

Komplexe Wurzeln Wir finden alle $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$



Wir sehen aus der Skizze

$a = b$ & $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$

$\Rightarrow 2a^2 = 1$

$a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ $\qquad z_1^2 = \frac{1}{2}(1+i)(1+i)$

$z_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ $\qquad = \frac{1}{2} \cdot 2i = i$

Wir könnten z_1 oder z_2 als Wurzel von z betrachten.

$\sqrt{i}$ (allgemeiner $\sqrt{a+bi}$) ist nicht eindeutig definiert.

nie schreiben.

Polynomringe

k Körper z.B. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$

$k[x] = \{$ alle formalen Ausdrücke $a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0 \}$ $a_d, \ldots, a_0$

$= \{ (a_i) \in \prod_{i=1}^{\infty} k \mid$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $i \geq N$ $a_i = 0 \}$

Warum sind Polynome formale Ausdrücke und nicht Funktionen?

Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Betrachte $f = x^2 + x \in \mathbb{F}_2[x]$

$f(0) = 0^2 + 0 = 0 + 0 = 0$

$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 0$

f ist nicht das Nullpolynom 0, obwohl alle seine Werte null sind.

Nullstellen $f \in k[x]$

$a \in k$ heißt Nullstelle von f, falls $f(a) = 0$ ist.

Dann existiert $g \in k[x]$, sodass

$f = (x-a)g$

Nützlicher Trick: $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$

$= b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3$, $a_1, a_2, a_3 \in k$

Berechne $b_0, \ldots, b_4$ als Ausdrücke in den a_i.

Lösung: $b_0 = 1$

$b_1 = -a_1 - a_2 - a_3$

$b_2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3$

$b_3 = -a_1 a_2 a_3$

Wie verallgemeinert man das auf mehr Faktoren?

Ü $f(x) = x^3 - 10x^2 + 23x - 14$

f hat 3 Nullstellen in $\mathbb{R}$, die ersten zwei sind $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Wie lautet die dritte?

Lösung: $-a_1 - a_2 - a_3 = -10 \Leftrightarrow a_3 = 7$. //

Def. Der Grad eines Polynoms $0 \neq f = a_n x^n + a_{n-1} x^{d-1} + \ldots \in k[x]$ ist der größte Index d mit $a_d \neq 0$. Schreibe $\deg f = d$.

Ein Grad d Polynom $(\neq 0)$ in hat höchstens d verschiedene Nullstellen. $\Rightarrow$ ANWENDUNG $\longrightarrow$ Sei k ein unendlicher Körper und $f, g \in k[x]$. Gilt $f(x_0) = g(x_0)$ für alle $x_0 \in k$, so folgt $f = g$.

Beweis: Betrachte $h = f - g$.

h hat alle El. von k als Nullstellen.

Also ist $h = 0$ $\square$

Aufgabe $f = x^d + b_1 x^{d-1} + b_2 x^{d-2} + \ldots + b_0 \in \mathbb{R}[x]$ hat d verschiedene positive Nullstellen (>0)

Was gilt für die Vorzeichen von f?

Lösung: $b_1 < 0$, $b_2 > 0$, $b_3 < 0 \ldots$

Warum: Seien $x_1, \ldots, x_d$ die Nullstellen.

$b_1 = -x_1 - x_2 - \ldots - x_d < 0$

$b_2 = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=i+1}^{d} x_i x_j = \sum_{i<j} x_i x_j > 0$

$b_3 = -\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=i+1}^{d} \sum_{k=j+1}^{d} x_i x_j x_k < 0$

$\vdots$ //

Vorzeichenregel von Descartes

$g(t) = x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \ldots \in \mathbb{R}[x]$

$Z(g)$ – Anzahl der Vorzeichenwechsel in $1, g_{m-1}, g_{m-2}, \ldots, g_0$

$N_+(f)$ – Anzahl positive Nullstellen

Descartes: $N_+(f) \leq Z(f)$

Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ kann als $f(x) = c(x - z_1) \cdot \ldots \cdot (x - z_d)$, $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C}$ geschrieben werden.

Beispiel $f = x^2 - 2x + 4$

p-q-Formel: $z_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 4} = 1 \pm \sqrt{-3}$

$= 1 \pm i\sqrt{3}$

$z_1 = 1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

Sei $f \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$

Beh.: Ist $z = a + ib$ eine Nullstelle von f, so ist auch $\bar{z} = a - ib$ eine Nullstelle von f.

Rechenregeln für Konjugation $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$, $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Beweis: $f = \sum_i f_i x^i$

$f(\bar{z}) = \sum_i f_i (\bar{z})^i = \sum_i f_i \overline{(z^i)} = \sum_i \overline{f_i z^i}$

$= \overline{\sum_i f_i z^i} = \overline{f(z)} = \bar{0} = 0$ $\square$

Übung: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 6 \in \mathbb{C}[x]$ hat die Nullstelle $\sqrt{2}i$. Wie lauten die anderen beiden Nullstellen?

17.5.24

Lineare Abbildungen

Beispiele: (1) $\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ ist ein Vektorraum

$$(f,g) + (f',g') := (f+f', g+g') \quad , f,f',g,g' \in \mathbb{R}[x]$$
$$\lambda(f,g) := (\lambda f, \lambda g)$$

Betrachte $\mu: \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$$f, g \longmapsto fg$$

Ist das linear?

Nein: z.B $\mu(2x, 2x) = (2x)(2x) = 4x^2 \neq 2x^2 = \mu(x,x)$

(2) Sei $f \in \mathbb{R}[x]$ fest und betrachte

$$m_f: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
$$g \longmapsto fg$$

Ist m_f linear? Ja $\leadsto$ Distributivgesetz

(3) Ableitungen

$$d: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$$
$$f(x) \longmapsto f'(x)$$

. Ist f linear?

(4) Spiegelungen

Wir wollen die Spiegelung an der x-Achse als Funktion $\ell: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ beschreiben.

$$\ell\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Ist das linear? Ja

Zeige $\ell \circ \ell = id_{\mathbb{R}^2}$

Beweis. $(\ell \circ \ell)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \ell\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\square$

Kerne & Bilder

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

$$\ker(f) = \{v \in V \mid f(v) = 0\}, \quad im(f) = \{f(v) \mid v \in V\}$$

Wir schauen uns Kerne & Bilder in den Beispielen an:

(2) $\ker(f) = \{0\}$: Ang. $g \neq 0$ ist im Kern von m_f

Dann gilt $\deg(fg) = \deg(f) + \deg(g) \geq 0$

$\hookrightarrow m_f(g) = fg \neq 0$ ↯ Für $f \neq 0$

$im(f)$: Ist $f = c \in k \setminus \{0\}$ so ist

m_f bijektiv: Umkehrfunktion $m_{c^{-1}}$

Hat f Grad größer 0, so ist f nicht surjektiv:

$g \in k[x] \setminus \{0\}$: $\deg(m_f(g)) = \deg(f) + \deg(g) \geq \deg(f) > 0$

$$\Longrightarrow 1 \notin im(f)$$

(3) $\ker(f) = \{$ konstante Polynome $\}$

„$\supseteq$" Die Ableitung einer konstanten Fkt. ist 0

„$\subseteq$" $f(x) = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \ldots + f_0, \quad f_n \neq 0, n > 0$

$f'(x) = n f_n x^{n-1} + \ldots + f_1$

$\deg(f) = \deg(f) - 1$ falls $\deg(f) > 0$

Also: $\deg(f) > 0 \Rightarrow f' \neq 0$

$im(f) = \mathbb{R}[x]$

(4): $\ker(f) = \{0\}$, $im(f) = \mathbb{R}^2$

---

lineare Hülle, lineare Unabhängigkeit, Basen

V k-Vektorraum

Def.: $(v_1, \ldots, v_n)$ ein Tupel von Vektoren

lineare Hülle $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_i \in k, i = 1, \ldots, n \right\}$

$V = k^m$. Wie entscheidet man ob $w \in k^n$ in $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ist:

$$\sum a_i v_i = w \quad , v_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \sum b_{ij} a_j = w_j$$

$B a = w \longrightarrow$ lineares Gleichungssystem

Bsp $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad Z1 \leftrightarrow Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad Z3 \to Z3 - Z_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \quad Z3 \to Z3 + Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \leadsto \text{dritte Glg. } 0 = -1$$

$\hookrightarrow$ nicht lösbar

$w \notin \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

Def. $(v_1, \ldots, v_n)$ Tupel von Vektoren in V

Die Vektoren heißen linear unabhängig, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in k$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0 \Longrightarrow \text{Alle } a_i \text{ sind } 0$$

$v_1, \ldots, v_n \in k^m$ linear unabhängig

Das LGS $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ hat nur die triviale Lösung.

Bsp.: Sind $f_1 = x^2 - 1$, $f_2 = x^2 + 1$, $f_2 = x^2 - x$ linear unabhängig?

$f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

Schreibe die Koeffizientenvektoren auf

$$\begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

homogenes LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad Z_3 \to Z_3 + Z_1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Z_2 \leftrightarrow Z_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} Z_1 \to (-1) Z_1 \\ Z_3 \to (-1) Z_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z_2 \to Z_2 - Z_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z_1 \to Z_1 + Z_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \text{voller Rang}$$

Lösungsmenge des LGS $= \{0\}$

$\hookrightarrow$ Vektoren sind linear unabhängig

31.5.2024 k Körper

Def. V k-VR

$(v_1, \dots, v_n)$ ein Tupel von n Vektoren heißt **Basis**, wenn es ein linear unabhängiges Erzeugendensystem ist.

Die Basis ist ein Koordinatensystem: Jedes $w \in V$ lässt sich eindeutig als $w = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $i = 1, \dots, n$ schreiben.

Bsp. (1) $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$

Schreibe $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ als $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} a_2$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \qquad Z2 \to Z2 - 2\cdot Z1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 1 & 4\\0 & 1 & -3\end{array}\right) \qquad Z1 \to Z1 - Z2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 7\\0 & 1 & -3\end{array}\right)$$

Satz & Def V endlich erzeugter k-Vektorraum. Alle Basen von V haben die gleiche Mächtigkeit. Diese Zahl heißt die **Dimension** $\dim_k V$ von V.

Sind $v_1, \dots, v_n$ lineare unabhängige Vektoren und $n = \dim V$ so ist $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis. } gute Beweis-strategie

Bsp. $\dim \mathbb{R}^n = n$

Seien $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$ reelle Zahlen.

Betrachte $w_0 = \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, $w_1 = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$, $\dots$, $w_{n-1} = \begin{pmatrix}\alpha_1^{n-1}\\ \vdots\\ \alpha_n^{n-1}\end{pmatrix}$

Beh. $(w_1, \dots, w_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^n$

Beweis: $(w_1, \dots, w_n)$ ist lin. unabh.:

Angenommen es gibt $\beta_1, \dots, \beta_{n-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i w_i = 0 \Rightarrow \text{für } j = 1, \dots, n \text{ gilt } \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \alpha_j^i = 0$$

Das Polynom $f = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i x^i$ hat also n Nullstellen. Da ein Polynom $\neq 0$ vom Grad $n-1$ höchstens $n-1$ versch. Nst. hat, gilt $f = 0$

$\hookrightarrow \beta_i = 0$.

Nach dem letzten Satz ist $(w_1, \dots, w_n)$ sogar eine Basis. $\square$ ← Induktive Def. von Linearer Unabhängigkeit.

Sei $(v_1, \dots, v_n)$ ein Tupel in V.
$(v_1, \dots, v_n)$ ist linear unabhängig, genau dann wenn
a) $(v_1, \dots, v_{n-1})$ lin. unabhängig ist
&
b) $v_n \notin \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$

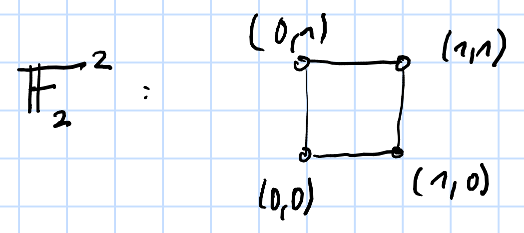
Mehr Beispiele

Ein endlicher Körper: $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

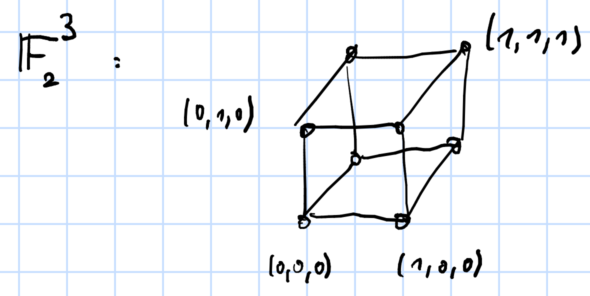
+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

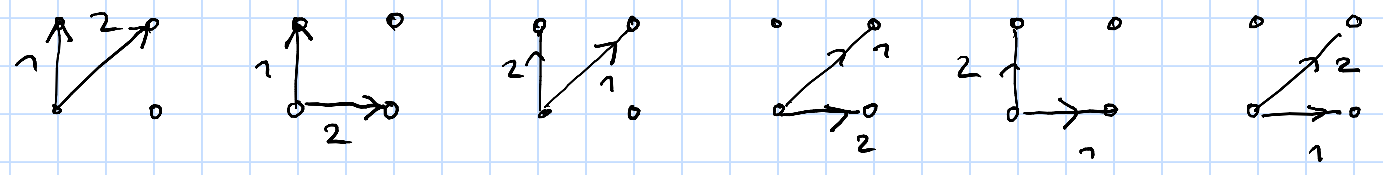
$\mathbb{F}_2^2$:



$\mathbb{F}_2^3$:



Finde alle Basen von $\mathbb{F}_2^2$:



Wie viele Basen hat $\mathbb{F}_3^3$?

Antwort: $\underbrace{(2^3 - 1)}_{\text{erster Basisvektor}} \cdot \underbrace{(2^3 - 2)}_{\text{zweiter Basisvektor } \in \mathbb{F}_2^3 \setminus \langle v_1 \rangle} \cdot \underbrace{(2^3 - 2^2)}_{v_3 \in \mathbb{F}_3^2 \setminus \langle v_1, v_2 \rangle} = 168$

Wieviel zweidimensionale Unterräume hat $\mathbb{F}_3^2$?

$$\frac{(2^3 - 1)(2^3 - 2)}{6} = \frac{8 \cdot 6}{6} = 8$$

Sind $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig?

Dimensionen ausrechnen

$k^{3\times 3}$

$V = \{(a_{ij}) \in k^{3\times 3} \mid a_{ij} = a_{ji} \text{ für alle } i,j\}$

$W = \{(a_{ij}) \in k^{3\times 3} \mid a_{ij} = -a_{ij}\}$

Dies sind Unterräume von $k^{3\times 3}$.

Finde Basen von V & W und bestimme die Dimensionen von V & W.

7.6.24

Verschiedene Charakterisierungen von Basen:

W k-Vektorraum $v_1, \dots, v_n \in W$

Äquivalent sind:

(1) $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von W

(2) $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine maximale lineare Teilmenge von W

↪ Vektoren dazu nehmen, erzeugt lineare Abhängigkeit

(3) $(v_1, \dots, v_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem von W.

↪ Vektoren können nicht weggenommen werden

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen eine Basis von $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ finden:

Bemerke $v_2 \in \langle v_1 \rangle \rightsquigarrow$ vergesse v_2

$v_4 = v_1 + v_3 \rightsquigarrow$ Vergesse v_4

$\rightsquigarrow$ v_1 & v_3 sind linear unabhängig und ein ES, also eine Basis.

Systematisch mit <u>red. Zeilenstufenform</u>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z2 \to Z2 - Z1 \\ Z4 \to Z4 - Z1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z3 \to Z3 + Z1 \\ Z4 \to Z4 - Z1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} Z1 \to Z1 + Z2 \\ \text{danach } Z2 \to Z2 \cdot (-1) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pivotspalten

↪ die reduzierte Zeilenstufenform sagt uns:

v_1 & v_3 sind eine Basis

$v_2 = 2v_1$

$v_4 = v_1 + v_2$

<u>Summen von Unterräumen</u>

U, V Unterräume von k^N

$U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$, $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$U + V = \langle u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n \rangle$

Finde eine Basis in der Menge $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n\}$ um $\dim(U+V)$ auszurechnen.

Die Relation $\dim(U) + \dim(V) = \dim(U+V) - \dim(U \cap V)$ ist sehr hilfreich!

Matrizen & Lineare Abbildungen

V, W Vektorräume

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

Basen $B = (e_1, \dots, e_m)$, $B' = (e_1', \dots, e_n')$

Die lineare Abbildung kann jetzt durch endlich viele Zahlen beschrieben werden:

$$f\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_j e_j}_{\substack{\text{jeder Vektor } \in V \\ \text{kann eindeutig} \\ \text{so geschrieben} \\ \text{werden}}}\Big) = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} f_{ij} a_j\Big) e_i'$$

Wir schreiben die Matrix (f_{ij}) als $M_{B'}^{B}(f)$

Wie findet man sie?

$$f(e_j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f_{ij}}_{j\text{-te Spalte von } M_{B'}^{B}(f)} e_i$$

Umgekehrt induziert eine $n \times m$ - Matrix $A = (g_{ij})$ eine lineare Abbildung

$$f\Big(\sum_{j=1}^{m} a_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{m} g_{ij}\, a_j\Big) e_j'$$

<u>Beispiele</u>: Immer $\mathbb{R}^2$, $B = B' = (e_1, e_2)$, $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

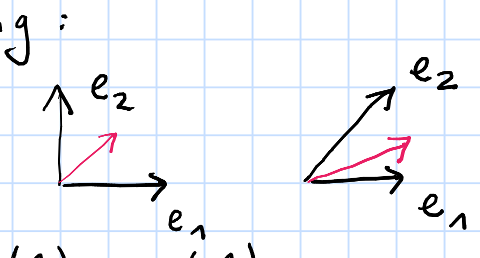
(1) Identität

$id: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, v \mapsto v$

$id\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $id\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$M_{B'}^{B}(id) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

(2) Scherung:



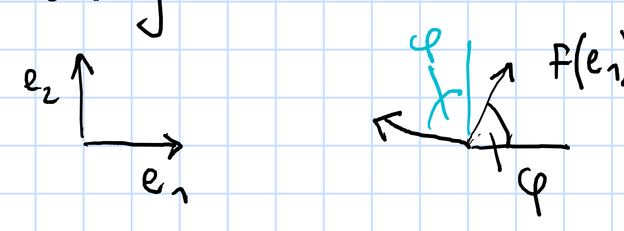
$f\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}x+y\\y\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$M_{B'}^{B}(f) = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(3) Drehung um einen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ (gegen den Uhrzeigersinn)

Sei f_φ die Drehung $: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



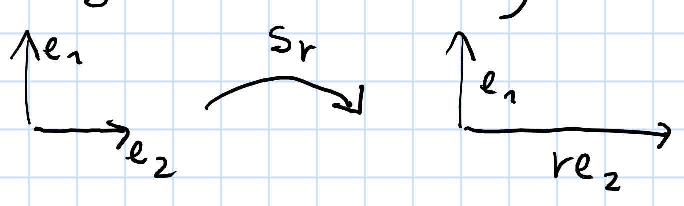
$f(e_1) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$

$f(e_2) = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$

$M_{B'}^{B}(f_\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ Anwendung: Drehe $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ um den Winkel φ

$f_\varphi\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

(4) Streckung in x - Richtung



$M_{B'}^{B}(s_r) = \begin{pmatrix}r & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(5) Ableitung $V = k[x]_{\leq 3}$ $B = B' = (1, x, x^2, x^3)$

$d: V \longrightarrow V, f \mapsto f'$

$d(1) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x) = 1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, $d(x^2) = \dots$

$$M_{B'}^{B}(d) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Betrachte jetzt $\Delta: V \longrightarrow V$, $f(x) \mapsto f(x+1) - f(x)$

$\Delta(1) = 1 - 1 = 0$,

$\Delta(x) = x + 1 - 1 = 1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 = \begin{pmatrix}1\\3\\3\\0\end{pmatrix}$

$$M_{B'}^{B}(\Delta) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

<u>Kern einer Matrixabbildung</u>

<u>Beispiel</u> $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$L_A: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$x \mapsto Ax$

Wollen $\ker L_A = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$ finden:

homogenes LGS:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ $Z2 \rightarrow Z2 - 2Z1$

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Pivotspalten

$\rightsquigarrow$ I: $x_1 + x_3 + x_4 = 0$ $\rightarrow$ $x_1 = -x_3 - x_4$

II: $x_2 + x_3 - x_4 = 0$ $\rightarrow$ $x_2 = -x_3 + x_4$

$$\ker(L_A) = \left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

13.6.24 **Matrizen invertieren** $A \in k^{n\times n}$: A heißt invertierbar, wenn $\exists B \in k^{n\times n}$ mit $AB = BA = I_n$. Schreibe $B = A^{-1}$.

Seien V, W k-VRe, $\phi: V \to W$ eine bijektive lin. Abb.
und B Basis von, B' Basis von W

$$\boxed{M^{B}_{B'}(\phi)^{-1} = M^{B'}_{B}(\phi^{-1})}$$ ϕ^{-1} Umkehrabbildung

Matrix invertieren $\widehat{=}$ Umkehrabbildung finden

Wie findet man A^{-1}? Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis von k^n. $e_1 = (1,0,\dots)^T$, $e_2 = (0,1,0,\dots)^T, \dots$

Angenommen A ist invertierbar.
Schreibe $A^{-1} = (x_1, \dots, x_n)$, x_i Spaltenvektor

$$AA^{-1} = I_n \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

kann als $Ax_i = e_i$, $i = 1, \dots, n$ geschrieben werden.
$\hookrightarrow$ löse n versch. LGS (gleichzeitig).

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} Z2 \to Z2 - 2Z1 \\ Z3 \to Z3 - Z1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad Z3 \to Z3 - Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad Z1 \to Z1 + Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad Z2 \to (-1)Z2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Algorithmus:
1) Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen: $B = (A \mid I_n)$
2) Zeilenoperationen auf B anwenden bis die linke Seite die Form I_n hat.
3) Rechte Seite $= A^{-1}$.

Explizite Formel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ Existiert auch für größere Matrizen, ist aber nicht praktisch zu benutzen

Hinweis: Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, so heißt $ad - bc =: \det A$
die Determinante von A.
A invertierbar $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Basiswechsel & Ähnlichkeit

Sei V ein Vektorraum und B, C zwei Basen von V.
Sei $\phi: V \to \phi$ linear.

Basiswechselgleichung:
$$\boxed{\begin{aligned} M^C_C(\phi) &= M^B_C(id)\, M^B_B(\phi)\, M^C_B(id) \\ &= \left(M^B_C\right)^{-1} M^B_B(\phi)\, M^C_B \end{aligned}}$$ Korollar 4.5.7

Schreibe $M^C_B = M^C_B(id)$

Beispiel: $B = \left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $V = \mathbb{Q}^2$
$C = \left(f_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$

$\phi: \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ ist in B geg. durch
$M^B_B(\phi) = \begin{pmatrix} -13 & 12 \\ -20 & 18 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ hässlich!

Wie lautet $M^C_C(\phi)$?
M^C_B ist einfacher auszurechnen:
$id(f_1) = 4e_1 + 5e_2$
$id(f_2) = 3e_1 + 4e_2$ $\rightsquigarrow M^C_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

$M^B_C = \left(M^C_B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

$M^C_C(\phi) = M^B_C \cdot M^B_B(\phi)\, M^C_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longleftarrow$ Schöner

Def. Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ heißen ähnlich, falls es $C \in k^{n\times n}$ invertierbar gibt mit
$B = C^{-1}AC$.

Eine nützliche Rechenregel $CA^nC^{-1} = (CAC^{-1})^n$

Beweis: Induktion über n:
(IA) $n = 0$: $A^0 = I_n$
$CA^0C^{-1} = CC^{-1} = I^n = (CAC^{-1})^0$
(IS) $n \to n+1$:
$$\begin{aligned} CA^{n+1}C^{-1} &= CA^n AC^{-1} = (CA^nC^{-1})(CAC^{-1}) \\ &\underset{(IV)}{=} (CAC^{-1})^n (CAC^{-1}) = (CAC^{-1})^{n+1} \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel oben: $A = \begin{pmatrix} -13 & 12 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

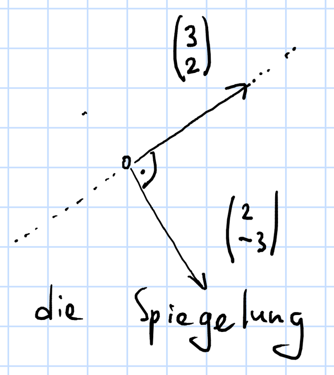
Berechne A^{10}! Potenzen von Diagonalmatrizen sind einfach: $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ $\hookrightarrow D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 \\ 0 & d_2^n \end{pmatrix}$

Wir wissen $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

$\hookrightarrow A^{10} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 59.049 \end{pmatrix}}_{B^{10}} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$

Beispiel Spiegelung an der Achse $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 3y\}$

$B = (e_1, e_2)$
$B' = \left(f_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$



Sei $s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an L.

$M^{B'}_{B'}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, denn $s(f_1) = f_1$, $s(f_2) = f_2$

$M^{B'}_{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M^B_B(s) &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{-9-4}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{-13}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{-13}\begin{pmatrix} -5 & -12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{13}{12} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Schmierblatt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad M_B^{B'}(id) = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad , \quad f_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2f_1 = Af_1$$

$$3f_2 = Af_2$$

$$A = M_B^{B'}(id) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} M_{B'}^{B}(id)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13 & 12 \\ -20 & 18 \end{pmatrix}$$