Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 9

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 2.07, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte) Sei $\theta \in [0, 2\pi)$. Wir betrachten die Matrix

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

und die Abbildung $L_{R_\theta} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass R_θ diagonalisierbar ist, genau dann, wenn $\theta \in \{0, \pi\}$. Können Sie eine geometrische Interpretation geben?

(ii) Wir können auch R_θ als komplexe Matrix betrachten. Zeigen Sie dass R_θ ist immer als komplexe Matrix diagonalisierbar. Äquivalent, zeigen Sie dass das Endomorphismus $L_\theta^{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2 (2+3+5 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Projektion ist ein Endomorphismus $f \colon V \to V$ so dass

$$f \circ f = f$$

(i) Zeigen Sie, dass die Einschränkung $f_{|\operatorname{Im} f} \colon \operatorname{Im} f \to V$ die Identität $\mathrm{id}_{\operatorname{Im} f}$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $V = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

(iii) Zeigen Sie, dass V diagonalisierbar ist, mit Eigenwerte 0 und 1.

Aufgabe 3(5+5 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Betrachten Sie die Matrix

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(i) Für welche $a, b \in \mathbb{Q}$ ist $M_{a,b}$ diagonalisierbar?

(ii) Falls $M_{a,b}$ diagonalisierbar ist, finden Sie eine Basis von Eigenvektoren.

Aufgabe(2+3+5 Punkte) Wir betrachten die folgende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie das charakteristisches Polynom $\chi_A(t)$.

(ii) Berechnen Sie A^5, A^7.

(iii) Berechnen Sie $A^{123456789}$.

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und sei $f\colon V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass das charakteristisches Polynom von f die folgende Form hat:

$$\chi_f(t) = (-1)^n \cdot (t^n - \operatorname{spur}(f) \cdot t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f))$$