Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

Blatt 8

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 25.06, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte)

(i) Wir betrachten das Parallelogram P in $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten in $\binom{0}{0}, \binom{a}{0}, \binom{a+b}{d}, \binom{b}{d}$, womit $a \neq 0, d \neq 0$. Sei $A(P)$ der Flächeninhalt von P. Zeichnen sie eine Skizze und zeigen Sie, dass

$$\left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right| = A(P)$$

(ii) Sei $\theta \in [0, 2\pi)$ und sei

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

die Matrix, so dass $L_{R_\theta} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Winkel θ ist. Sei $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\det(R_\theta M) = \det(M)$$

(iii) Seien $\binom{a}{c}, \binom{b}{d} \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig und sei P ein Parallelogram in $\mathbb{R}^2$ mit Eckpunkten in $\binom{0}{0}, \binom{a}{c}, \binom{a+b}{c+d}, \binom{b}{d}$ und sei $A(P)$ der Flächeninhalt von P. Zeichnen Sie eine Skizze und Zeigen Sie, dass

$$\left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right| = A(P)$$

(*Hinweis:* Sie können verwenden, dass eine Drehung den Flächeninhalt nicht verändert).

Diese Aufgabe zeigt dass die Determinante einer 2×2 reelle Matrix eine Art von “Flächeninhalte mit Vorzeichen ist”. Dies kann auf $n \times n$-Matrizen verallgemeinert werden um zu zeigen, dass die Determinante ein “Volumen mit Vorzeichen” ist.

Aufgabe 2 (3+2+5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^n$ definieren wir die Matrix $f(A) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ durch

$$f(A) := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot A^k$$

wobei $A^0 = I_n$ gelte.

(i) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zwei ähnliche Matrizen, so dass $N \in GL_n(\mathbb{K})$ existiert, mit $A = NBN^{-1}$. Zeigen Sie, dass

$$A^k = NB^kN^{-1} \qquad \text{für alle } k \geq 0$$

(ii) Seien A, B wie oben und sei $f(x) \in \mathbb{K}[x]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass

$$f(A) = Nf(B)N^{-1}$$

Zeigen Sie danach, dass $f(A) = 0$ genau dann, wenn $f(B) = 0$.

(iii) Wir wissen, dass zwei ähnliche Matrizen die selbe Spur und die selbe Determinante haben. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass die zwei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

nicht ähnlich sind, obwohl sie die gleiche Spur und Determinante haben.

Aufgabe 3 (10 Punkte) Für jedes $t \in \mathbb{Q}$ sei $A_t \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ die folgende Matrix:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ t & 1 & 2+t & 0 \\ 1-t & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

Berechnen sie für jedes $t \in \mathbb{Q}$ die Determinante $\det(A_t)$ und den Rang $\mathrm{rk}(A_t)$.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte) Sei $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Die Ableitung von f ist

$$\frac{df}{dx} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k x^{k-1}$$

(i) Sei $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Ableitung eine lineare Abbildung

$$\frac{d}{dx} : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}, f \mapsto \frac{d}{dx}(f) = \frac{df}{dx}$$

ergibt.

(ii) wir betrachten die lineare Abbildung $\frac{d}{dx} : \mathbb{K}[x]_{\leq 6} \to \mathbb{K}[x]_{\leq 6}$ und die Monomialbasis $\mathcal{B} = (1, x, \ldots, x^6)$ von $\mathbb{K}[x]_{\leq 6}$. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\frac{d}{dx})$.

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Für $n \geq 0$, sei

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$

die Vandermonde Matrix von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Zeigen Sie, dass

$$\det V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$$

Insbesondere, ist $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ invertierbar genau dann, wenn die α_i paarweise verschiedene sind.
