Blatt 7

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 18.06, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte) Sei $A \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Finden Sie eine Basis vom $\operatorname{Ker} L_A$.

(ii) Finden Sie eine Basis vom $\operatorname{Im} L_A$.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uberprüfen Sie, ob A invertierbar ist, und wenn ja, finden Sie die Inverse von A.

Aufgabe 3 (2+3+5 Punkte) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

und sei $L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$ die entsprechende lineare Abbildung. Wir betrachten auch die kanonische Basis $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ von $\mathbb{R}^3$ und eine andere Basis $\mathcal{B} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$ (Sie können annehmen, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist, ohne das zu beweisen).

(i) Finden Sie die Matrix $M^{\mathcal{C}_3}_{\mathcal{C}_3}(L_A)$.

(ii) Finden Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}_3}(L_A)$.

(iii) Finden Sie die Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A)$.

Aufgabe (2+4+4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Quadratmatrix mit Einträge $A = (a_{ij})$. Die Spur von A ist die Summe von der Einträge in der Diagonal von A:

$$\operatorname{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(i) Berechnen Sie die Spur der folgende Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$$

(iii) Seien $A, A' \in \mathbb{K}^{n\times n}$ zwei ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(A')$$

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung so dass $\operatorname{rk}(f) = \dim \operatorname{Im} f = r$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V und eine Basis $\mathcal{B}'$ von W existieren so dass

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

womit I_r die $r \times r$ Identitätsmatrix ist, und die 0 Nullmatrizen sind.

(ii) Sei $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ so dass $\operatorname{rk}(A) = r$. Zeigen Sie, dass $S \in GL_m(\mathbb{K}), T \in GL_n(\mathbb{K})$ existieren so dass

$$SAT = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

womit I_r die $r \times r$ Identitätsmatrix ist, und die 0 Nullmatrizen sind.
