Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 6

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 11.06, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte) Wir betrachten die folgende Untervektorräume von $\mathbb{Q}^4$:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \right\rangle.$$

(i) Berechnen Sie $\dim U, \dim W$.

(ii) Berechnen Sie $\dim U + W, \dim U \cap W$

Aufgabe 2 (3+5+2 Punkte) Betrachten Sie die Abbildung:

$$\phi\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}^2, \qquad f \mapsto \begin{pmatrix} f(1) + f(-1) \\ f(0) \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie dass ϕ eine lineare Abbildung ist.

(ii) Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} \phi$.

(iii) Berechnen Sie eine Basis von $\operatorname{Im} \phi$.

Aufgabe 3 (5+5+1+3+5+1 Punkte) Seien U, W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume. Wir betrachten das Produkt $U \times W$ mit der folgenden Summe und Skalarmultiplikation

$$+ : (U \times W) \times (U \times W) \to U \times W, \qquad ((u, w), (u', w')) \mapsto (u + u', w + w')$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times (U \times W) \to U \times W, \qquad (\lambda, (u, w)) \mapsto (\lambda u, \lambda w)$$

(i) Zeigen Sie, dass $U \times W$ mit dieser Summe und dieser Skalarmultiplikation ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(ii) Nehmen wir an, dass U, W endliche Dimension haben und sei $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U und $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Zeigen Sie, dass

$$((u_1, 0), \ldots, (u_n, 0), (0, w_1), \ldots (0, w_m))$$

eine Basis von $U \times W$ ist.

(iii) Nehmen wir an, dass U, V endliche Dimension haben. Zeigen sie, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U \times W) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W$.

Sei nun V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $U, W \subseteq V$ zwei Untervektorräume.

(iv) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$F \colon U \times W \to V, \qquad F(u, w) = u + w$$

eine lineare Abbildung ist.

(v) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im} F = (U + W)$ und dass $\operatorname{Ker} F$ isomorph zu $U \cap W$ ist.

(vi) Zeigen Sie mit der Hilfe der vorherigen Teilaufgaben, dass $\dim_{\mathbb{K}}(U+W)+\dim_{\mathbb{K}}(U\cap W) = \dim_{\mathbb{K}} U + \dim_{\mathbb{K}} W$ gilt.

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(i) Seien V_1, V_2, V_3 mit $n \geq 3$ endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorräume und seien

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} V_3 \xrightarrow{f_3} \{0\}$$

lineare Abbildungen so dass $\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1}$ für $i = 0, 1, 2$. Zeigen Sie, dass f_1 injektiv ist, dass f_2 surjektiv ist und dass

$$\dim V_2 = \dim V_1 + \dim V_3.$$

Eine solche Sequenz von linearen Abbildungen nennt man eine kurze exakte Sequenz

(ii) Seien $V_1, V_2, \ldots, V_n$ endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume. Seien auch

$$\{0\} \xrightarrow{f_0} V_1 \xrightarrow{f_1} V_2 \xrightarrow{f_2} \ldots \xrightarrow{f_{n-2}} V_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} V_n \xrightarrow{f_n} \{0\}$$

lineare Abbildungen so dass

$$\operatorname{Im} f_i = \operatorname{Ker} f_{i+1} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n-1$$

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \dim V_i = 0$$