UNIVERSITÄT TÜBINGEN
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

Blatt 5

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 04.06, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (3+3+4 Punkte) Wir Betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$.

(i) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ist (v_1, v_2) ein Erzeugendensystem von V? Linear unabhängig? Eine Basis?

(ii) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ist (v_1, v_2, v_3, v_4) ein Erzeugendensystem von V? Linear unabhängig? Eine Basis?

(iii) Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Ist (v_1, v_2, v_3) ein Erzeugendensystem von V? Linear unabhängig? Eine Basis?

Aufgabe 2 (5+5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Seien auch $U = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ und $W = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$ zwei endlich erzeugte Untervektorräume, mit $u_i, w_j \in V$.

(i) Zeigen Sie, dass $U + W = \langle u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m \rangle$.

(ii) Nehmen wir an dass $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U ist und dass $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W ist. Ist $(u_1, \ldots, u_n, w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von $U + W$?

Aufgabe 3 (3+5+2 Punkte) Sei $n \geq 1$ und sei $V = \mathbb{Q}[x]_{\leq n} = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{Q} \right\}$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum von alle Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und Grad kleiner oder gleich als n. Für $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in V$ sei

$$f(-x) = \sum_{i=0}^{n} a_i (-x)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$$

das Polynom dass wir bekommen wenn wir x durch $-x$ ersetzen. Ein Polynom f heißt *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ und *ungerade* falls $f(-x) = -f(x)$. Wir definieren

$$V^+ = \{ f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(-x) = f(x) \}, \qquad V^- = \{ f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(-x) = -f(x) \}$$

(i) Zeigen Sie, dass V^+, V^- Untervektorräume von V sind.

(ii) Berechnen Sie eine Basis von V^+ und eine Basis von V^-.

(iii) Zeigen Sie, dass $V^+ + V^- = V$ und $V^+ \cap V^- = \{0\}$.

Aufgabe 4 (2+2+3+3 Punkte) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(i) Seien $(v_1, \ldots, v_n) \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie dass für jede Teilmenge $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die Vektoren in $(v_j \mid j \in J)$ auch linear unabhängig sind.

(ii) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V und seien $w_1, \dots, w_m \in V$ beliebige Vektoren. Zeigen Sie, dass $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m)$ auch ein Erzeugendensystem ist.

(iii) Seien $v, w \in V$ zwei Vektoren. Zeigen sie, dass v, w linear abhängig sind, genau dann, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, so dass $v = \lambda \cdot w$ oder $w = \lambda \cdot v$.

(iv) Nehmen wir an, dass $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und dass $\dim_{\mathbb{C}} V = 2$. Sei auch (v_1, v_2) eine Basis von $\mathbb{C}$. Zeigen sie, dass $(v_1 + i \cdot v_2, v_1 - i \cdot v_2)$ auch eine Basis von V ist.

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und seien $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_n)$ zwei Basen von V. Zeigen Sie, dass man eine Basis aus der anderen mit einer endlichen Folge von Elementarumformungen an den Vektoren erhalten kann.
