Lineare Algebra 1
SS 2024

Blatt 12 - Probeklausur

Wenn Sie möchten, dass Ihre Aufgaben korrigiert werden, laden Sie Ihre Lösungen bis zum 23. Juli um 16:00 Uhr in URM hoch.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.
Zeit für die Prüfung: 1 Stunde und 50 Minuten.

Aufgabe 1 (20 Punkte) Für jedes $a \in \mathbb{Q}$ betrachten wir das System :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + (a+1)z + 4x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + (a^2-2)x_4 &= a \end{cases} \qquad x_1, \dots, x_4 \in \mathbb{Q}$$

(i) Für welche $a \in \mathbb{Q}$ hat das System eine Lösung?

(ii) Wenn das System eine Lösung hat, finden Sie alle Lösungen.

Aufgabe 2 (20 Punkte) Für jede $\lambda \in \mathbb{R}$ seien

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 3\lambda & 6 & 3 \\ 0 & \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2\lambda & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}, \quad L_{A_\lambda} \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

(i) Zeigen Sie, dass das Bild von L_{A_λ} unabhängig von λ ist:

$$\operatorname{Im} L_{A_\lambda} = \operatorname{Im} L_{A_\mu}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Sei $U = \operatorname{Im} L_{A_\lambda} \subseteq \mathbb{R}^4$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ (das ist unabhängig von λ). Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Finden Sie eine orthogonale Basis von U und eine orthogonale Basis von $U^\perp$.

Aufgabe 3 (10 Puntke) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix so dass

$$(A - I_n)^m = 0 \qquad \text{für ein } m \in \mathbb{N}, m > 0.$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, genau dann, wenn $A = I_n$.
