Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Lineare Algebra 1
SS 2024

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 11

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 16.07, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe(4+6 Punkte) Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene. Wir betrachten die Abbildung

$$\langle\, ,\, \rangle \colon \mathbb{R}[x]_{\leq k} \times \mathbb{R}[x]_{\leq k} \to \mathbb{R}, \qquad (f, g) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(x_i) g(x_i)$$

(i) Zeigen Sie dass $\langle\, ,\, \rangle$ ein Skalarprodukt ist, genau dann, wenn $k < n$.

(ii) Wir setzen $n = 4$ und $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, 1, 2)$. Finden Sie eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$

Aufgabe(2+2+3+3 Punkte) Sei $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $f \colon V \to V$ eine orthogonale Abbildung.

(i) Zeigen Sie dass $\det(f) \in \{-1, +1\}$.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass $\lambda \in \{+1, -1\}$

(iii) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum so dass $f(U) \subseteq U$. Zeigen Sie, dass $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

(iv) Sei $A \in O_2(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie, dass $\theta \in [0, 2\pi)$ existiert so dass

$$\text{entweder } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ oder } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Aufgabe (2+4+2+2 Punkte) Sei $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt (euklidisch oder unitär), sei $f \colon V \to V$ ein Endomorphismus und sei $f^* \colon V \to V$ das adjungiertes Endomorphismus.

(i) Zeigen Sie, dass $\det(f^*) = \overline{\det(f)}$ und dass $\operatorname{Spur}(f^*) = \overline{\operatorname{Spur}(f^*)}$ [1].

(ii) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rk}(f) = \operatorname{rk}(f^*)$.

(iii) Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum so dass $f(U) \subseteq U$. Zeigen Sie, dass $f^*(U^\perp) \subseteq U^\perp$.

(iv) Wenn $g \colon V \to V$ ein anderes Endomorphismus ist, zeigen sie, dass $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Aufgabe (7+3 Punkte) Wir betrachten die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

und wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt.

[1] die Determinante und die Spur eines Endomorphismus f sind die Determinante und die Spur der Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, wobei $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist

(i) Finden Sie eine orthonormale Basis von Eigenvektoren von A.

(ii) Ist A positiv definit?

Zusatzaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und eine orthogonale Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so dass $\det(f) = 1$. Zeigen Sie, dass es sich um eine Drehung um eine feste Achse handelt. Genauer gesagt, zeigen Sie dass eine orthonormale Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ existiert so dass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

für ein $\theta \in [0, 2\pi)$.