Blatt 10

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 9.07, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (10 Punkte) Sei $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ eine Matrix so dass $\det(A) = 4, \operatorname{spur}(A) = 6$ und $\mu_A(t) = (t-1)^2(t-2)^2$. Angenommen, die Matrix A ist einer der folgenden Matrizen in Jordan-Normalform ähnlich. Zu welcher?

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 (2+4+4 Punkte) Sei $n \geq 1$ und sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Spur

$$\operatorname{spur}\colon V \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \operatorname{spur}(A)$$

eine lineare Abbildung ist.

(ii) Sei $n \geq 1$ und sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$. Wir betrachten die folgende Abbildung

$$\langle\,,\,\rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (A, B) \mapsto \operatorname{spur}(A^t B)$$

Zeigen Sie, dass $\langle,\rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(iii) Sei nun $n = 2$. Berechnen Sie die Gramsche Matrix $\langle\,,\,\rangle$ bezüglich die folgende Basis

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \right)$$

von $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

(i) Sei $n \geq 1$, sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und sei $M = A^t A$. Zeigen Sie dass M symmetrisch ist und dass M positiv definit ist genau dann, wenn $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

(ii) Sei $(V, \langle,\rangle)$ ein endlich-dimensionale euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$.

Aufgabe 4 (5+5 Punkte) Die Legendre Polynome $P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots \in \mathbb{R}[x]$ sind definiert als

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x \\ P_{n+1}(x) &= \frac{2n+1}{n+1} x \cdot P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x), \qquad \text{für } n \geq 2 \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\deg P_n(x) = n$ für alle $n \geq 1$ und dass $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ ist.

(ii) Wir betrachten das Skalarprodukt

$$\mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x], \qquad (f, g) \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

Zeigen Sie dass die Legendre Polynome orthogonal sind:

$$\langle P_n \, , \, P_m \rangle = 0 \qquad \text{falls } n \neq m$$

Zusatsaufgabe (Freiwillig, wird nicht benotet oder korrigiert) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einer Norm $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie dass ein Skalarprodukt $\langle \, , \, \rangle$ existiert so dass $\|\cdot v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ genau dann wenn die Parallelogrammgleichung gilt:

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \text{für alle } v, w \in V$$
