UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2024

Blatt 6

Abgabetermin: Montag, 08.07.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Bestimmen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler

(a) der Polynome $f := x^3 - 2x^2 - x + 2$ und $g := x^3 - 4x^2 + 3x \in \mathbb{R}[x]$ und geben Sie einen Erzeuger von $\langle f, g\rangle \subset \mathbb{R}[x]$ an.

(b) von $-10 + 11i$ und $-9 - 2i \in \mathbb{Z}[i]$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass für einen Körper $\mathbb{K}$ der Ring der formalen Potenzreihen $\mathbb{K}[[x]]$ ein euklidischer Ring ist. Dabei dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass die Einheiten in $\mathbb{K}[[x]]$ Elemente der Form $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ mit $a_0 \neq 0$ sind.

Aufgabe 3 (5+1+2=8 Punkte)

(a) Sie $f := \sum_{k=0}^{m} a_k x^k \in \mathbb{Z}[x]$ ein Polynom vom Grad ≥ 1 mit $\mathrm{ggT}(a_0, \ldots, a_m) = 1$ und sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl mit $p \mid a_k$ für $k = 0, \ldots, m-1$ und $p^2 \nmid a_0$. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f := x^4 + 4x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$ irreduzibel ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $m \geq 2$ und jede Primzahl p die Zahl $\sqrt[m]{p}$ irrational ist.

(*Hinweis: Nehmen Sie für (a) an, dass f reduzibel ist, d.h. $f = gh$ für geeignete $g, h \in \mathbb{Z}[x]$. Zeigen Sie, dass p (ohne Einschränkung) den konstanten Koeffizienten von g, aber nicht den von h, teilt. Zeigen Sie dann, dass p nicht alle Koeffizienten von g teilen kann. Sei t der Index des kleinsten Koeffizienten von g, der nicht von p geteilt wird. Schauen Sie sich den Koeffizienten a_t an, um einen Widerspruch zu erhalten.*
Bei (c) dürfen Sie die folgende Aussage ohne Beweis verwenden: Ist ein Polynom $f \in \mathbb{Z}[x]$ vom Grad ≥ 1 irreduzibel, dann ist f auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel.)

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.