UNIVERSITÄT TÜBINGEN Hannah Markwig
FACHBEREICH MATHEMATIK Lou-Jean Cobigo

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II

Sommersemester 2024

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 24.06.2024, 10:00 Uhr

Aufgabe 1 (3+3=6 Punkte)

Vergewissern Sie sich, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ mit $\sqrt{-5}^2 = -5$ und der Standardaddition und -multiplikation von $\mathbb{Z}$ einen Ring bildet.

(a) Zeigen Sie, dass $2 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel aber nicht prim ist und schlussfolgern Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist.

(b) Zeigen Sie noch einmal, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht faktoriell ist, indem Sie zwei verschiedene Faktorisierungen (d.h. Produkte von irreduziblen Elementen, die bis auf Reihenfolge und Einheiten bestimmt sind) von $6 \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ angeben.

(*Hinweis: Da* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$, *induziert* $\mathbb{C}$ *eine Norm auf* $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$, *nämlich* $||a + b\sqrt{-5}|| = \sqrt{a^2 + 5b^2}$.)

Aufgabe 2 (3+3=6 Punkte)

Sei R ein faktorieller Ring und seien $a, b \in R$. Seien $a = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ und $b = p_1^{r_k} \cdots p_k^{r_k}$ Darstellungen als Produkt paarweise verschiendener Primfaktoren. Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b)$ existieren und dass

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\min(s_i, r_i)} \tag{1}$$

$$\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\max(s_i, r_i)} \tag{2}$$

gilt.

Aufgabe 3 (3+2=5 Punkte)

Sei R ein endlicher Ring.

(a) Zeigen Sie, dass R genau dann ein Körper ist, wenn R nullteilerfrei ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Primideale von R genau die maximalen Ideale von R sind.

Aufgabe 4 (2+1+4+1=8 Punkte)

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $A := \{c + xg(x, y) \mid c \in \mathbb{K}, g(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]\}$.

(a) Zeigen Sie, dass A ein Unterring von $\mathbb{K}[x, y]$ ist und dass A kein Ideal von $\mathbb{K}[x, y]$ ist.

(b) Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ wird die Kette $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ von Idealen in $\mathbb{K}[x, y]$ mit $I_n := \langle x, xy, xy^2, \ldots, xy^n \rangle$ stationär?

(c) Zeigen Sie, dass die Kette $I_1 \subset I_2 \subset \ldots$ von Idealen in A mit $I_n := \langle x, xy, xy^2, \ldots, xy^n \rangle$ nicht stationär wird.

(d) Schlussfolgern Sie, dass Unterringe von noetherschen Ringen nicht noethersch sein müssen.

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.