

Übungen zur Vorlesung Algebraische Strukturen & Lineare Algebra II  
Sommersemester 2024

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 10.06.2024, 10:00 Uhr

---

Sei  $E$  ein regelmäßiges  $n$ -Eck in  $\mathbb{R}^2$  und sei  $\{1, \dots, n\}$  die Menge der Ecken von  $E$ . Eine *Symmetrie* von  $E$  ist eine affin-lineare Abbildung  $f$ , die  $E$  auf  $E$  so abbildet, dass Ecken auf Ecken abgebildet werden und Kanten auf Kanten, wobei das Bild einer Kante zwischen zwei Ecken  $i, j$  die Kante zwischen  $f(i)$  und  $f(j)$  ist. Die *Symmetriegruppe* von  $E$  ist die Menge aller Symmetrien von  $E$ . Die Verknüpfung dieser Gruppe ist die Verknüpfung von Abbildungen. Die Symmetriegruppe von  $E$  kann immer als Untergruppe von  $\mathbb{S}_n$  aufgefasst werden. Beispielsweise wird eine Drehung eines gleichseitigen Dreiecks mit Ecken  $1, 2, 3$  durch  $(123) \in \mathbb{S}_3$  beschrieben.

**Aufgabe 1** **(8 Punkte)**

Sei  $D_4 := \langle a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^4 = e \rangle$ . Zeigen Sie, dass  $D_4$  eine Präsentation der Symmetriegruppe des Quadrats ist.

---

**Aufgabe 2** **(4 Punkte)**

Sei  $R$  ein Ring und  $A := \{a_i \mid i \in I, a_i \in R\}$  eine Teilmenge, die ein Ideal  $\langle A \rangle$  erzeugt. Zeigen Sie, dass

$$\langle A \rangle = \left\{ \sum_{j \in J} r_j a_j \mid r_j \in R, J \subset I \text{ endlich} \right\}$$

gilt.

---

**Aufgabe 3** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}_n$  genau dann ein Körper ist, wenn  $n \in \mathbb{N}$  eine Primzahl ist.

---

**Aufgabe 4** **(6 Punkte)**

Zeigen Sie die universelle Eigenschaft des Kommutators und malen Sie ein Diagramm dazu:

Es sei  $G$  eine Gruppe mit Kommutator  $[G, G]$  und  $\pi : G \rightarrow G_{ab} := G/[G, G]$  der kanonische surjektive Gruppenhomomorphismus (warum ist das einer?). Dann existiert für jede kommutative Gruppe  $H$  und jeden Gruppenhomomorphismus  $\varphi : G \rightarrow H$  genau ein Gruppenhomomorphismus  $\tilde{\varphi} : G_{ab} \rightarrow H$  mit  $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \pi$ .

---

Die Abgabe der Übungsblätter erfolgt online über URM. Das Repetitorium findet freitags von 10-12 Uhr im Hörsaal N16 statt.