

# Zahlen – Daten – Fakten?

Die Vermessung der Welt durch Mathematik  
und Informatik



Das Romseminar 2018

Arbeitsgemeinschaft Funktionalanalysis  
Eberhard Karls Universität Tübingen

&

Funktionalanalysis und Philosophie der Mathematik  
Universität Siegen

&

DreMatrix Gruppe der Fakultät Informatik/Mathematik  
Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden

&

Arbeitsbereich Analysis  
Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

**Organisation:**

BRITTA DORN	<britta.dorn@uni-tuebingen.de>
MARKUS HAASE	<haase@math.uni-kiel.de>
MICHAEL KOREY	<michael.korey@skd.museum>
KARI KÜSTER	<kaku@fa.uni-tuebingen.de>
RAINER NAGEL	<rana@fa.uni-tuebingen.de>
GREGOR NICKEL	<nickel@mathematik.uni-siegen.de>
MARKUS WACKER	<wacker@informatik.htw-dresden.de>

**Satz:**

GREGOR GIESEN	<grgi@math.uni-tuebingen.de>
---------------	------------------------------

**Internet:**

<https://www.romseminar.de>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Vermessung der Welt. Geschichte – Mathematik – Ideologie</b>	<b>1</b>
	SEBASTIAN RICKELHOFF, FRANZISKA WOLLNY	
<b>2</b>	<b>Das Kreuz mit dem Gerrymandering</b>	<b>9</b>
	NILS KRÜTGEN	
<b>3</b>	<b>Ich bin dann mal <i>nicht</i> weg</b>	<b>17</b>
	FRIEDRICH LORENZ	
<b>4</b>	<b>Zahlen im Gehirn</b>	<b>21</b>
	MAIKE FARNSCHLÄDER, CARA BROSS, LUCY ROHDE	
<b>5</b>	<b>Kurzer Beispielstiel</b>	<b>29</b>
	WIETE KELLER, HENRIK VALETT	
<b>6</b>	<b>MCMC-Algorithmen und ML-Inferenz</b>	<b>37</b>
	RIKO KELTER	
<b>7</b>	<b>Mit Münchhausen nach Karlsruhe</b>	<b>47</b>
	HANS KIESL	
<b>8</b>	<b>Der Zahlbegriff und wie sich unser Zahlssystem entwickelt hat</b>	<b>63</b>
	JAN HAUFFEN, CHRISTIN PETRI	
<b>9</b>	<b>Die Entschlüsselung der Gedanken</b>	<b>71</b>
	NIKOLAI EDEKO	
<b>10</b>	<b>Ökonomie und Bildung</b>	<b>81</b>
	LOVIS WAGNER	
<b>11</b>	<b>Primzahlen</b>	<b>85</b>
	FABIAN HAGEN, PATRICK HERMLE	



# Vorwort

*In der Tat hat alles, was man erkennen kann, eine Zahl.  
Denn ohne sie lässt sich nichts erfassen oder erkennen.*

PHILOLAOS (ca. 470–399 v. Chr.)

Während die Mathematik von einigen ihrer professionellen Vertreter gern mit Mengenlehre identifiziert und ob ihrer inhärenten Ästhetik gerühmt wird, ergibt sich doch „von außen gesehen“ ein ganz anderes Bild. Dort wird sie vornehmlich als eine Wissenschaft vom Quantitativen wahrgenommen. Schnöde gesagt: Der Mathematik geht es um Zahlen, der Informatik, die ja einst als wissenschaftliche Datenverarbeitung begann, um Daten. Mag diese Beschreibung auch unangemessen verkürzt sein, sollte ihr wahrer Kern nicht geleugnet werden, zumal gerade jene Aspekte, das Erheben von Daten (Quantifizierung) und das Manipulieren derselben, unser Leben in stets wachsendem Umfang prägen. Diese Dynamik wird noch befeuert durch die Sehnsucht, einer „postfaktischen“ Beliebigkeit mit gesichertem Wissen, felsenfesten Erkenntnissen und objektiven Wahrheiten entgegenzutreten. Und was ist objektiver, wahrer, sicherer als die in einer Zahl manifestierte Messung?

Von diesem Befund ausgehend (und ihn dabei auch wieder kritisch hinterfragend) nahm das Romseminar 2018 Mathematik und Informatik als Wissenschaften von Zahlen und Daten und ihre Rolle in der Gesellschaft in den Blick. Dabei ging es unter anderem um die folgenden Aspekte:

- Was ist überhaupt eine Zahl; wie hat sich der Zahlbegriff historisch entwickelt? Wie beschreiben Neurobiologie und Pädagogik unseren Umgang mit Zahlen?
- Was ist eine Messung im Bereich der Naturwissenschaften oder auch der Sozialwissenschaften? Wie kommt es eigentlich zu „Daten“ und wie können Schlussfolgerungen aus ihnen gezogen werden?
- Welchen Einfluss haben Daten und Zahlen, aber auch Algorithmen auf gesellschaftliche Verhältnisse und politische Entscheidungen? Wo liegen Grenzen einer Erfassung der Welt durch Zahlen und Daten?
- Welche (neuen) Möglichkeiten bietet die Informatik, gesellschaftliches und individuelles Leben zu gestalten, aber auch zu manipulieren?
- Welche Rolle spielen Mathematik und Informatik im öffentlichen Streit um Fakten? (Wie) lassen sich Fakt und Fake voneinander unterscheiden?

Ausgehend von diesen und verwandten Fragen wurde im Romseminar der Versuch unternommen, einmal nicht nur innerhalb der Disziplinen zu arbeiten, sondern *über* Mathematik und Informatik nachzudenken und die Überlegungen im Diskurs auszutauschen.

Im Jahr 2018 wurde das Romseminar bereits zum zwölften Mal in Kooperation der Hochschulen in Dresden, Siegen und Tübingen veranstaltet, zum dritten Mal war auch eine Gruppe aus Kiel dabei, sodass das Seminar nun Studierende aus allen vier Himmelsrichtungen Deutschlands zusammenführt. Der vorliegende Band enthält die schriftliche Ausarbeitung eines Teiles der im Romseminar 2018 gehaltenen Vorträge und repräsentiert so die Vielfalt der Themen.

Ein vielseitiges Begleitprogramm mit Begegnungen an sonst nicht öffentlich zugänglichen Orten in Rom bereicherte dieses insgesamt 23. Romseminar. Ein ganz herzlicher Dank gilt dem Direktor der *Deutschen Akademie Villa Massimo*, DR. JOACHIM BLÜHER, für die immer wieder neue und überraschende Aspekte der Akademie erschließende virtuose Führung, MSGR. OLIVER LAHL für die faszinierenden Einblicke in die deutsche Vatikan-Diplomatie sowie PROF. DR. HANS KIESL für seinen fulminanten Vortrag zur aktuellen Situation der Bevölkerungsstatistik in Deutschland (im vorliegenden Band nachgedruckt). Der Stadt Rom danken wir für die außergewöhnliche Wetterlage, die unsere Seminarwoche im dichtesten Schneetreiben beginnen ließ, und uns an den folgenden Tagen Spaziergänge über knirschenden Firn bei strahlendem Sonnenschein bescherte.

Das Romseminar durfte auch im Jahr 2018 die bewährte Gastfreundschaft römischer Institutionen genießen und auf diese Weise verschiedene Facetten der Stadt erkunden. Im einzelnen gilt unser Dank der *Deutschen Akademie Villa Massimo*, der *Deutschen Botschaft beim Heiligen Stuhl*, dem *Istituto Italiano di Studi Germanici – Villa Sciarra* und vor allem der traditionsreichen *Accademia Nazionale dei Lincei*.

Für die finanzielle Unterstützung danken wir schließlich dem DAAD, dem Akademischen Auslandsamt und dem Departement Mathematik der Universität Siegen, dem Mathematischen Institut der Universität Tübingen, dem Akademischen Auslandsamt und der Fakultät Informatik der HTW Dresden, der Firma d-fine sowie den großzügigen Spendern unter den ehemaligen Teilnehmern des Romseminars.

MARKUS HAASE  
Kiel

RAINER NAGEL  
Tübingen

GREGOR NICKEL  
Siegen

MARKUS WACKER  
Dresden

# Programm

## Montag, 26. Februar 2018 – Accademia dei Lincei

- 9<sup>30</sup> Begrüßung, Vorstellungsrunde
- 10<sup>30</sup> SEBASTIAN RICKELHOFF, FRANZISKA WOLLNY  
*Vermessung der Welt. Geschichte – Mathematik – Ideologie*
- 11<sup>45</sup> NILS KRÜTGEN  
*Das Kreuz mit dem Gerrymandering. Wie Gerhard Schröder sich wiederwählte*
- 14<sup>00</sup> FRIEDRICH LORENZ  
*Ich bin mal nicht weg – Bewusstes Reisen im digitalen Zeitalter*
- 15<sup>00</sup> CARA BROSS, LUCY ROHDE, MAIKE FARNSCHLÄDER  
*1, 2, 3, ganz viele – Zahlenverständnis aus neurologischer Sicht*
- 16<sup>15</sup> HENRIK VALETT, WIETE KELLER  
*Rechenschwäche oder schwacher Rechner?*
- 18<sup>30</sup> Cena da ‚Baffetto‘

## Dienstag, 27. Februar 2018 – Santa Maria degli Angeli / Deutsche Botschaft beim Heiligen Stuhl / Accademia dei Lincei

- 9<sup>00</sup> Santa Maria degli Angeli  
MICHAEL KOREY  
*Big Data vor Ort – Feiern, Fasten und 1500 Jahre Gremienarbeit  
(oder: Wenn Michelangelo es nur wüsste ...)*
- 11<sup>00</sup> OLIVER LAHL  
*Die Deutsche Botschaft beim Heiligen Stuhl*
- 14<sup>00</sup> JUSTUS WEYAND  
*Zahlen, Daten, Glaube – Zwischen Theologie und moderner Logik*
- 15<sup>00</sup> MAXIMILIAN TEUBERT  
*Wo Zahlen, Daten und Fakten am Ende sind  
– Wie extrem unwahrscheinliche Ereignisse die Welt verändern.*
- 16<sup>00</sup> TILL SCHNEIDER, ALEXANDRA SCHMIDT  
*Descartes: Beschreibung der Welt durch Mathematik.*

**Mittwoch, 28. Februar 2018 – Accademia dei Lincei**

- 9<sup>00</sup> ROBIN BITTERLICH  
*Ich wurde Fußballweltmeister mit Holland*
- 10<sup>00</sup> TOBIAS MACHA  
*Rechnen ist Geld*
- 11<sup>00</sup> CHRISTOPH SCHWANBECK  
*Fakt oder Fake im Klimawandel. Ein Selbstexperiment*
- 20<sup>00</sup> GREGOR NICKEL, MICHAEL KOREY, MARKUS WACKER, MARKUS HAASE  
*Worte, Texte und Fiktionen – Ein Literaturabend*

**Donnerstag, 1. März 2018 – Deutsche Akademie Rom Villa Massimo**

- 9<sup>30</sup> DR. JOACHIM BLÜHER (VILLA MASSIMO)  
*Führung durch die Villa Massimo*
- 10<sup>30</sup> RIKO KELTER  
*Historische Evolution statistischer Inferenzmodelle  
– zwischen Fisher und Bayes*
- 11<sup>30</sup> PROF. DR. HANS KIESL (OTH REGENSBURG)  
*Mit Münchhausen nach Karlsruhe oder mit dem Automobil in die SPD.  
Von den Schwierigkeiten, das Volk zu zählen*
- 13<sup>30</sup> JAN HAUFFEN, CHRISTIN PETRI  
*Geschichte und Entwicklung des Zahlbegriffs*
- 14<sup>45</sup> NIKOLAI EDEKO  
*Die Entschlüsselung der Gedanken*
- 16<sup>00</sup> Kleinkunsthöhne in der Villa Massimo

**Freitag, 2. März 2018 – Istituto Italiano di Studi Germanici – Villa Sciarra**

- 9<sup>30</sup> LOVIS WAGNER  
*Bildungsökonomie – Umsetzung und Konsequenzen*
- 10<sup>30</sup> PAUL PASCAL SCHEUB  
*Hochschulranking – Transparenzgarant oder Missverständnisfabrikant?*
- 11<sup>30</sup> FABIAN HAGEN, PATRICK HERMLE  
*Primzahlen zwischen Fakt und Fiktion*
- 14<sup>00</sup> Abschlussgespräch
- 20<sup>00</sup> Cena sociale *Trattoria Gino e Pietro*

**Samstag, 3. März 2018 – Domus Aurea**

- 10<sup>30</sup> Führung in der Domus Aurea (1. Gruppe)
- 11<sup>00</sup> Führung in der Domus Aurea (2. Gruppe)



# Die Vermessung der Welt. Geschichte – Mathematik – Ideologie

SEBASTIAN RICKELHOFF, FRANZISKA WOLLNY



Das Romseminar trägt den Titel „Zahlen, Daten, Fakten – Die Vermessung der Welt“, welcher von den einzelnen Teilnehmern auf unterschiedlichste Weise interpretiert wurde. Für uns war schnell klar, dass unser Vortrag die wörtliche Bedeutung von „Vermessung der Welt“ thematisieren sollte: das Kartieren der Erde.

Dabei betrachten wir drei verschiedene Blickwinkel. Zunächst beschäftigen wir uns mit der Entwicklung des Weltbildes über die Jahrhunderte. Im zweiten Teil stellen wir ausgewählte, mathematische Hilfsmittel zur Erstellung von Weltkarten vor. Abschließend beleuchten wir, inwieweit Karten zur Beeinflussung von Menschen genutzt werden.

Wir hoffen, dass wir dem interessierten Leser einen kleinen Einblick in die Welt der Kartographie geben können.

## 1.1 Geschichte

Seit Jahrtausenden versuchen wir Menschen die Welt möglichst genau zu vermessen und zu kartieren. Es ist allerdings schwer zu sagen, wann die Menschheit anfangs, Karten ihrer Umgebung zu erstellen. Man geht davon aus, dass es schon immer rudimentäre Beschreibungen und Zeichnungen gab, wie diese im 20. Jahrhundert noch bei Aborigines üblich waren. Der erste dokumentierte Fund einer Landkarte ist eine Höhlenzeichnung aus der heutigen Türkei, die auf ca. 6200 v. Chr. datiert wird und eine umliegende Siedlung zeigt.

Vor über 2000 Jahren wurden die Weltkarten dann überwiegend auf Tontafeln angefertigt. Ein Beispiel ist die Babylonische Weltkarte (Abbildung 1.1), die auf 700 – 500 v. Chr. datiert wird. Wir sehen hier ein für uns sehr fremdes Bild der Erde. Es handelt sich lediglich um das den Babyloniern bekannte Territorium: das Babylonische Reich.

Um Christus entstehen im antiken Griechenland und später im römischen Reich die ersten Weltkarten, die sowohl den Mittelmeerraum als auch Zentralasien und Indien darstellen, und eine für die damalige Zeit hohe Genauigkeit aufweisen.

Das mittelalterliche Weltbild wiederum wird stark von der Kirche geprägt. Erkennbar ist dies daran, dass die Karten meist geostet sind (im Osten soll das Paradies liegen) und Jerusalem im Kartenzentrum liegt. Auf diesen Karten werden meist Teile der Heilsgeschichte oder andere Bibelstellen schriftlich oder bildlich dargestellt.

Diese Weltkarten werden auch „Mappae Mundi“ genannt. Abbildung 1.2 zeigt eins der bekanntesten Werke dieser Zeit: die Ebstorfer Weltkarte.<sup>1</sup>

Die Blütezeit der Kartographie beginnt mit der Verbreitung der Schifffahrt und den damit verbundenen Entdeckungsreisen im 15. Jahrhundert. Die Sicht auf die Welt nähert sich unserem heutigen Weltbild an. Diese Zeit entspricht zudem der Geburtsstunde Amerikas<sup>2</sup>, das als Kontinent erstmals von MARTIN WALDSEEMÜLLER 1507 benannt wird. Die wohl berühmteste Weltkarte (siehe Abbildung 1.3), die heute wie damals weltweit bekannt ist, wird 1569 von GERHARD MERCATOR<sup>3</sup> veröffentlicht. Sie ist die erste Weltkarte, die winkeltreu ist. In den darauffolgenden Jahrhunderten wird



Abbildung 1.1: Babylonische Weltkarte

<sup>1</sup>um 1235 entstanden, Original wurde 1943 verbrannt

<sup>2</sup>Benennung nach AMERIGO VESPUCCI, einem italienischen Seefahrer

<sup>3</sup>flämischer Kartograf (1512-1594)



Abbildung 1.2: Ebstorfer Weltkarte

die Kartografie unter anderem aus militärischen Gründen für einzelne Staaten enorm bedeutsam, wodurch die Kartografie zu einer staatlich finanzierten Wissenschaft wird. Einzelne Techniken werden durch die finanzielle Unterstützung perfektioniert und Anfang des 20. Jahrhunderts entstehen im Zuge der Weltkriege erste Luftaufnahmen von Ländern. Um das Jahr 1990 werden dann die traditionellen Karten von digitalen Bildern und Satellitenbildern abgelöst.

## 1.2 Mathematik

Wir haben gesehen, dass die Weltbilder der verschiedenen Epochen nicht unterschiedlicher hätten sein können. Diese Unterschiedlichkeiten lagen hauptsächlich an unterschiedlichen Überzeugungen. Aber davon abgesehen, gibt es auch wissenschaft-



Abbildung 1.3: Weltkarte von Martin Waldseemüller

liche Problematiken: nämlich die der Abbildung der dreidimensionalen Weltkugel auf eine zweidimensionale Fläche.

Die Übertragung der Erdkugel auf eine Karte wird mathematisch durch Projektionen gelöst. Insgesamt gibt es über 400 verschiedene solcher Kartenprojektionen. Die zugrundeliegende Idee ist, dass die Meridiane und Breitengrade ein Gitter auf der Erdoberfläche bilden. Nun wird eine bestimmte Hilfsfläche, beispielsweise ein Kegel, ein Zylinder oder eine Ebene, um bzw. an die Erdkugel gelegt (siehe Abbildung 1.4). Je nach Projektion wird als nächstes eine Lichtquelle positioniert und die sich dank des Gitters auf der Hilfsfläche bildenden Schatten werden als Basis der Karte genutzt.

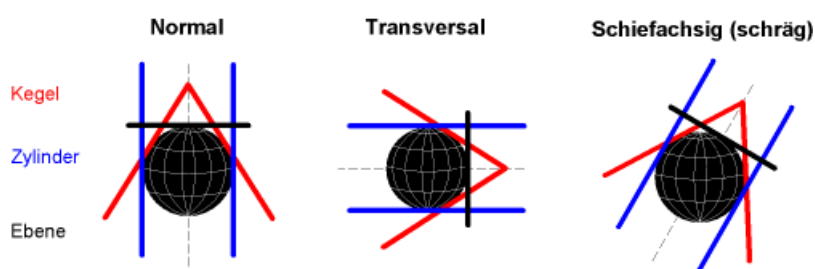


Abbildung 1.4: Verdeutlichung der Kartenprojektionen

Wie auf dem Bild zu erkennen ist, kann man sowohl die Projektion und die Hilfsfläche als auch die Art und Weise, wie die Erde mit der Hilfsfläche umhüllt wird, auswählen. Hieraus ergeben sich verschiedene Abbildungseigenschaften, die für eine Projektion wünschenswert sind: Längentreue, Winkeltreue, Achsentreue und Flächentreue. An dieser Stelle sei betont, dass keine Weltkarte alle vier Eigenschaften erfüllen kann,

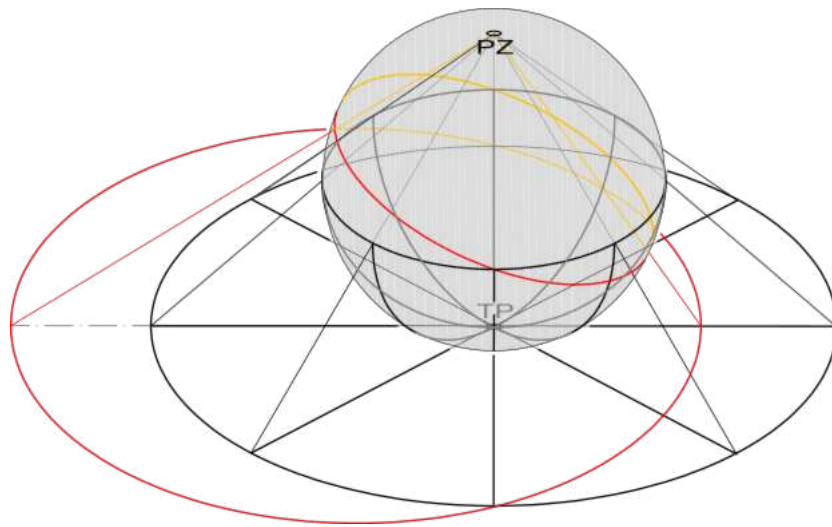


Abbildung 1.5: Verdeutlichung der stereographischen Projektion

denn bei der Projektion des dreidimensionalen Erdballs auf eine zweidimensionale Karte geht mindestens eine der drei Eigenschaften verloren. (Dies ist beweisbar, wird hier aber nicht gezeigt.)

### 1.2.1 Stereographische Projektion

Die stereographische Projektion ist eine Abbildung einer Kugeloberfläche in eine Ebene. Bei dieser Projektion bildet man mithilfe von Geraden ab. Diese verlaufen dafür, wie in Abbildung 1.5 zu sehen, durch ein Projektionszentrum und den abzubildenden Punkt und schneiden dann die Ebene im Bildpunkt.

Die stereographische Projektion wurde bereits in der Antike, vermutlich von HIPPARCHOS um 130 v. Chr., entdeckt und findet heute vor allem in der Kristallographie und der Geographie Anwendung. Die wichtigsten Eigenschaften dieser Projektion sind die Winkel-, sowie die Kreistreue. (Bei der Kreistreue werden Kreise auf der Kugel auf Kreise in der Ebene abgebildet.) Man bemerke hier, dass bei dieser Projektion Längenverzerrungen auftreten. Ebenso wird nicht flächentreu abgebildet.

### 1.2.2 Mercator-Projektion

Eine ebenfalls winkeltreue Projektion ist die Mercator-Projektion. Anders als bei der stereographischen Projektion wird hier die Erde mit einem Kreiszyylinder mit Erdradius umhüllt. Die normale Mercator-Projektion<sup>4</sup> zeichnet sich dadurch aus, dass der Zylinder die Erdkugel am Äquator berührt und sich die Lichtquelle am Erdmittelpunkt befindet. Nun werden die einzelnen Punkte der Erdoberfläche durch die Lichtstrahlen auf die Mantelfläche des Zylinders übertragen. Anschließend wird der Zylinder ausgerollt und bildet die gewünschte Karte.

Dank der Winkel- und Achsentreue findet diese Projektion vor allem in der Schifffahrt ihren Nutzen, wie es MERCATOR bereits 1569 gewollt hatte: In dem Titel

<sup>4</sup>Neben der normalen gibt es noch die transversale und schiefachsige Projektion.

seines Werks stellte er klar, dass die Projektion *ad usum navigatum*<sup>5</sup> genutzt werden solle. Trotzdem wird dieser Weltkarte wegen der Flächenverzerrungen die Verbreitung eines eurozentrischen Weltbildes nachgesagt.

### 1.2.3 Gall-Peters-Projektion

Schließlich möchten wir eine dritte Projektion vorstellen: die Gall-Peters-Projektion. Es handelt sich hierbei um eine flächentreue Projektion, bei der ebenfalls ein Zylinder als Hilfsfläche verwendet wird. Anders als bei der Mercator-Projektion wird hier waagrecht von der Erdachse durch den abzubildenden Punkt und nicht von einem Punkt ausgehend projiziert. Viele Hilfsorganisationen nutzen die Flächentreue dieser Projektion, um auf die deutlich größere Fläche Afrikas gegenüber Europa aufmerksam zu machen. Die Gall-Peters-Projektion wird auch häufig in britischen Schulen verwendet.

## 1.3 Ideologie

Wir haben im vorangegangenen Abschnitt gesehen, dass es schon aus mathematischen Gründen keine „richtige“ Weltkarte geben kann, denn mit der Abbildung der Erde auf eine Ebene gehen zwangsläufig Eigenschaften verloren. Im folgenden Abschnitt wollen wir aber noch einen Schritt weitergehen, und auf Kartenfälschungen zu sprechen kommen. Zum Abschluss wird auch auf Karten als Machtsymbol eingegangen.

### 1.3.1 Kartenfälschungen

Man kann davon ausgehen, dass es Kartenfälschungen schon so lange gibt, wie es Karten selbst gibt. So fälschten beispielsweise NAPOLEON BONAPARTE, der preußische König FRIEDRICH II. oder mittelalterliche Oberhäupter europäischer Städte präzise Vermessungen ihrer Ländereien. Meistens sollten so politische Feinde in die Irre geführt und das eigene Land vor militärischen Schlägen geschützt werden. Einen Höhepunkt erlebte die Kartenfälschung während des Kalten Krieges: Alle Länder des Warschauer Pakts beschlossen 1965 Landkarten zu verzerren und auch im Westen wurden Karten aus militärischen Gründen gefälscht. Aber selbst heute im Zeitalter der Satellitenaufnahmen gibt es noch Kartenfälschungen. So werden beispielsweise auf manchen Karten sogenannte „Trapstreets“, dabei handelt es sich um nicht existierende Straßen, hinzugefügt, um zu vermeiden, dass Karten gefälscht werden. Darüber hinaus werden häufig militärisch wichtige Orte oder Kernkraftwerke auf Satellitenbildern verpixelt oder entfernt.

Es gibt auch Kartenfälschungen, die meistens einen harmloseren Hintergrund haben. So werden Satellitenbilder häufig bearbeitet, um dem Betrachter einen besseren Überblick zu verschaffen. Dazu werden zum Beispiel Wolken entfernt, Flüsse vergrößert oder Farben verändert, um realitätsgetreuer zu wirken. Man sieht also, dass trotz hoher Wissenschaftlichkeit Karten auch immer subjektiv gestaltet sind.

---

<sup>5</sup>*ad usum navigatum* bedeutet zum Nutzen der Seefahrer/Navigation.

### 1.3.2 Machtausübung durch Karten

„Karten waren schon immer ein unverzichtbares Mittel zur konkreten Herrschaftsausübung nach innen“, schrieb der Historiker THOMAS TIPPACH am 1. September 2014<sup>6</sup>. So sollten schon im Mittelalter mit den sogenannten „Mappae Mundi“ die Glaubenssätze der Katholischen Kirche unterstrichen werden. Karten des 18. und 19. Jahrhunderts verkörpern die Interessen europäischer Nationalstaaten. Sie verbreiteten ein eurozentrisches Weltbild und sollten die Macht des jeweiligen Landes, gerade im Hinblick auf die Kolonialisierung, darstellen. Die Ausdehnung eines Landes war meistens ein Zeichen der Macht. Aber auch heute wird mit Karten noch ganz konkret Macht ausgeübt. Das sieht man am Beispiel von Google (Stand 2016). Das Unternehmen führte sogenannte „areas of interest“ ein. Es wurden Sehenswürdigkeiten umbewertet. Dabei wurden Unternehmen, die für ihre Onlinepräsenz bezahlten, deutlich bevorzugt. Da aber nach einer Studie 97 Prozent aller amerikanischen Internetnutzer online nach lokalen Produkten und Dienstleistungen suchen, werden präsenste Unternehmen deutlich bevorzugt. Eine weitere Machtausübung durch Zuschreibung übte Google im Jahre 2012 aus, indem es die Bezeichnung „Persischer Golf“ aus Google-Maps strich. Dies führte sofort zu Protesten aus Teheran.

## Literatur

[Fee02] FEEMAN, TIMOTHY G.: *Portraits of the Earth: A Mathematician Looks at Maps*. American Mathematical Society, 2002.

## Weblinks

- [https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical\\_equal-area\\_projection](https://en.wikipedia.org/wiki/Cylindrical_equal-area_projection)  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- [https://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte\\_der\\_Kartografie](https://de.wikipedia.org/wiki/Geschichte_der_Kartografie)  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- <https://de.wikipedia.org/wiki/Kartennetzentwurf>  
Zuletzt aufgerufen: 26.02.2018.
- <http://deacademic.com/dic.nsf/dewiki/944190#Konstruktion>  
Zuletzt aufgerufen: 10.02.2018.
- <https://www.artalis.de/definition-kartographie/>  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- <http://www.mr-kartographie.de/kleine-kartenkunde/definition-karte-und-kartographie.html>.  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.

---

<sup>6</sup><https://www.uni-muenster.de/Staedtegeschichte/portal/einfuehrung/karten/historischekarten.html>

- <http://www.spiegel.de/wissenschaft/mensch/martin-waldseemueller-legendare-weltkarte-unter-faelschungsverdacht-a-1182804.html>  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- <https://sz.de/1.3869425>  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- <http://www.fr.de/wissen/waldseemueller-weltkarte-geburtsurkunde-amerikas-entdeckt-a-821911>  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator\\_1569\\_world\\_map](https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_1569_world_map)  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- <http://www.faz.net/aktuell/feuilleton/debatten/google-maps-manipuliert-unmerklich-die-weltkarte-14370487.html>  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.
- <http://www.spektrum.de/magazin/die-macht-der-karten/821205>  
Zuletzt aufgerufen: 20.02.2018.
- [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/58/Stereographic\\_Projection\\_Polar.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/58/Stereographic_Projection_Polar.jpg)  
Zuletzt aufgerufen: 25.02.2018.



# Das Kreuz mit dem Gerrymandering – Wie Gerhard Schröder sich wiederwählte

NILS KRÜTGEN



## 2.1 Einleitung

Eine moderne Demokratie organisiert sich zumeist über eine Gewaltenteilung. Die von der Bevölkerung ausgehende Macht wird auf miteinander agierende Organe des Staates verteilt. In den bekannten Organigrammen, die ein solches Staatswesen beschreiben, befindet sich fast sicher am unteren Ende ein Balken, welcher die wahlberechtigte Bevölkerung symbolisiert. Es wird dann von diesem Balken ein Pfeil mit der Beschriftung „wählt“ auf mindestens ein Organ der Legislative ausgehen. Allerdings wird genau dieses „wählt“ dabei oft nicht besprochen und ist auch kein prominentes Thema in der öffentlichen Wahrnehmung eines politischen Systems. Doch gerade die Art des Wahlsystems einer Demokratie ist eine ihrer wichtigsten

Charakteristika, ist es doch dafür verantwortlich wer genau die Wähler am Ende vertritt. Kurz gesagt: Wer das Wahlsystem kontrolliert, hat großen Einfluss auf das Ergebnis einer jeden Wahl. An dieser Stelle soll mit dem „Gerrymandering“ eines der größten Probleme vieler Wahlsysteme besprochen werden.

### 2.1.1 Fallbeispiel

Bevor wir zu einer Definition des titelgebenden Begriffes kommen, wollen wir ein Fallbeispiel zum Verständnis betrachten. In einem kleinen Modellstaat der Analytiker gebe es genau 15 Wähler, die einerseits in einem Raster wohnen und andererseits stets dieselbe Partei, entsprechend einer mathematischen Vorliebe, wählen. Es handelt sich hierbei um die rote Partei der reellen Zahlen oder um die gelbe Partei der komplexen Zahlen.

In diesem Staat soll nun ein Parlament mit fünf Abgeordneten gewählt werden. Dafür werden die Wähler in fünf Wahlkreise eingeteilt, welche jeweils gleich viele Wähler repräsentieren müssen und geographisch zusammenhängend sein sollen. In jedem Wahlkreis wird diejenige Partei einen Abgeordneten entsenden, die dort die meisten Stimmen erhalten hat. Blickt man auf das gesamte Stimmenverhältnis aller Wähler, erhält man eine knappe Mehrheit von einer Wählerstimme für die gelbe Partei. Das Parlament entspricht also genau dann am ehesten der politischen Lage des Landes, wenn die Partei der komplexen Zahlen drei und die Reellen zwei Sitze erhalten.

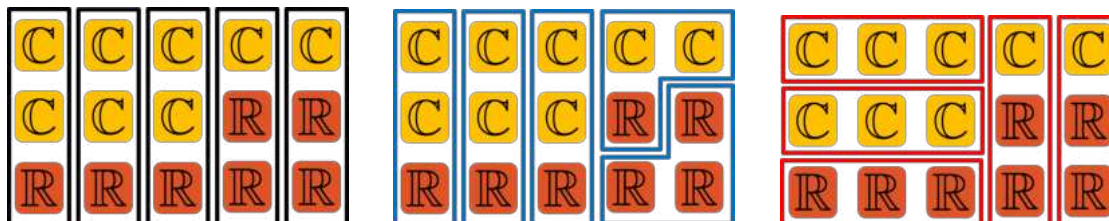


Abbildung 2.1: Mögliche Wahlkreise

Betrachten wir die drei abgebildeten Möglichkeiten für das Einteilen der Wahlkreise, so steht erkennen wir sofort, dass die schwarzen Wahlkreise links genau dem Idealfall entsprechen, während mit den blauen Wahlkreisen die komplexe Partei vier Abgeordnete bekommt und so über eine deutlich größere Mehrheit im Parlament verfügt als in der wahlberechtigten Bevölkerung. Extremere ist allerdings noch das rechte Beispiel der roten Einteilung. Hier erhält die rote Partei eine Mehrheit im Parlament, obwohl eine Minderheit der Wähler für sie gestimmt hat. Wir erkennen also, dass sich mit dem Wissen über das Wahlverhalten der Wahlberechtigten Wahlkreise gezielt einteilen lassen und sich so das Ergebnis der Wahl determinieren lässt.

### 2.1.2 Definition

Mit dem Fallbeispiel im Hinterkopf können wir nun den Begriff des Gerrymandering formal definieren:

## Gerrymandering ist

*die absichtliche Manipulation von Wahlkreisgrenzen zum Vorteil einer politischen Partei oder Bewegung.*

## 2.2 Theorie und Analyse

Wir interessieren uns zunächst für die theoretische Vorgehensweise beim Gerrymandering und dafür wie man Gerrymandering als solches erkennen kann.

### 2.2.1 Theorie und Strategien

Um in einem einzelnen Wahlkreis zu gewinnen, braucht unser gewünschter Kandidat eine Mehrheit der Stimmen. Das heißt im einfachsten Fall, in dem genau zwei Parteien oder Kandidaten antreten, werden 50% der Stimmen plus eine Weitere für den Erfolg benötigt. Jede weitere Stimme für unsere Interessen ist dann verschwendet, denn den Wahlkreis haben wir ja bereits gewonnen und benötigen hier keine weitere Wählerschaft, man spricht von Überschuss-Stimmen. Die Stimmen, für die in einem Wahlkreis unterlegenen Parteien sind natürlich ebenfalls verschwendet. Das Ziel beim Gerrymandering ist es also, in jedem Wahlkreis die Zahl der verschwendeten Stimmen für uns zu minimieren und die Zahl der verschwendeten Stimmen für den politischen Gegner zu maximieren.

Daraus leiten sich zwei Strategien ab. Die erste Strategie ist die Zerstreung von Oppositionsstimmen auf möglichst viele Wahlkreise. Wenn wir es schaffen, die Wähler der Opposition auf möglichst viele Wahlkreise zu verteilen, so werden sie dort jeweils in der Minderheit sein und wir gewinnen alle diese Wahlkreise. Andererseits wird uns das kaum überall gelingen. Zynisch formuliert wäre dies in der Praxis auch viel zu auffällig. Deswegen wenden wir für Wahlkreise, die an den politischen Gegner abgegeben werden müssen, die Strategie der Hochburgenbildung an. Dabei ziehen wir die Wahlkreisgrenzen so, dass fast ausschließlich Wähler des politischen Gegners dort wahlberechtigt sind. Damit sind auf nationaler Ebene viele für uns ungünstige Stimmen „abgearbeitet“ und wir werden es leichter haben, weitere Wahlkreise zu unseren Gunsten zu manipulieren.

Diese Vorgehensweisen kann man auch im Fallbeispiel wiedererkennen. Bei den blauen Wahlkreisen, haben wir in jedem Wahlkreis, in dem die gelbe Partei der komplexen Zahlen gewählt wurde die erforderliche Mehrheit von zwei Wählern für uns und eine verschwendete Oppositionsstimme gegen uns. Dazu kommt noch eine Hochburg der Opposition. Im Fall der roten Wahlkreise gibt es zwei Hochburgen für die Gelben und dann zwei Wahlkreise, in dem je eine gelbe Stimmen gegen zwei Rote steht. Auch hier fand also Zerstreung statt. Der fünfte Wahlkreis hier ist eine Hochburg für die begünstigte Partei. Dies liegt nur daran, dass man nach den bisher verbrauchten roten Stimmen, noch drei weitere rote Wähler verteilen kann und mit diesen nur einen Wahlkreis gewinnen kann. Es ist hier also egal wie wir diese Stimmen genau verteilen, solange wir den dritten Wahlkreis für die reelle Partei gewinnen.

## 2.2.2 Effizienzlücke

Um für ein gegebenes System von Wahlkreisen einen unfairen Vorteil für eine Partei erkennen zu können, führen wir die Effizienzlücke ein.<sup>1</sup> Sie ist durch

$$\frac{\text{Differenz aller verschwendeten Stimmen}}{\text{Anzahl aller abgegebenen Stimmen}}$$

definiert. Wenn dieser Quotient nahe bei Null ist, stellt er einen Indikator für fair gezogene Wahlkreise dar. Wenn der Bruch deutlich von Null abweicht<sup>2</sup>, so ist diese Effizienzlücke ein Hinweis darauf, dass ein unfairen Vorteil für eine Partei vorliegt.

Für die Wahlkreise aus dem Fallbeispiel wollen wir die Effizienzlücke berechnen. Nach Definition ist jeweils die dritte Stimme in jedem Wahlkreis verschwendet. Bei den blauen Wahlkreisen wird demnach in allen Wahlkreisen eine Stimme für die roten verschwendet. Wir erhalten mit  $\frac{5-0}{15} = 33,3\%$  einen sehr großen Wert für die Effizienzlücke, für die roten Wahlkreise haben wir eine rote und vier gelbe Stimmen verschwendet und erhalten so mit  $\frac{1-4}{15} = -20\%$  ebenfalls einen großen Wert. Wir wissen bereits um die Manipulation in beiden Fällen und sehen nun jeweils diesen Indikator ausschlagen. Im Fall der schwarzen Wahlkreise beträgt die Effizienzlücke  $\frac{3-2}{15} = 6,7\%$ . Man kann sich leicht überlegen, dass dies der geringste Wert ist, der im Fallbeispiel möglich ist.

## 2.3 Beispiele

Bis hierhin könnte man davon ausgehen, dass es sich bei dem Gerrymandering um eine polit-theoretische Möglichkeit handelt und in der Praxis nicht messbar vorkommt. Dies ist jedoch leider nicht der Fall wie die folgenden Beispiele zeigen.

### 2.3.1 Vereinigten Staaten von Amerika

Das Mehrheitswahlrecht in den Vereinigten Staaten von Amerika bietet aus nahe liegenden Gründen optimale Voraussetzungen für das Gerrymandering. So kam es bereits 1812 bei der Wahl zum Staatssenat des US-Bundesstaates Massachusetts zur Manipulation von Wahlkreisgrenzen. Der damalige Gouverneur ELBRIDGE GERRY manipulierte die Wahlkreise um die Stadt Boston, um seiner Partei, einem Vorläufer der heutigen Demokraten, einen Vorteil zu verschaffen. Die so entstandenen verzerrten Wahlkreise ergaben in der öffentliche Rezeption des Vorgangs die Figur eines mythologischen Salamanders. So entstand auch der seitdem genutzte Name aus dem Gouverneur und dem Salamander für das Gerrymandering: „Gerry-Mander“.

Die Kongresswahlkreise um die Stadt Columbus in Ohio stellen ein klassisches Beispiel für die Strategie der Zerstreuung dar. Mit insgesamt drei Wahlkreisen wurden jeweils ein Teil der demokratisch geprägten Stadt mit einem großen Teil der überwiegend republikanisch wählenden Vororte zusammengefasst. So wird die Wahl von Republikanern in allen drei Wahlkreisen sichergestellt.

<sup>1</sup>engl.: efficiency gap, [SM15]

<sup>2</sup>In der Praxis verwendetet man dafür bei der Effizienzlücke einen Wert von 9% als Grenze.

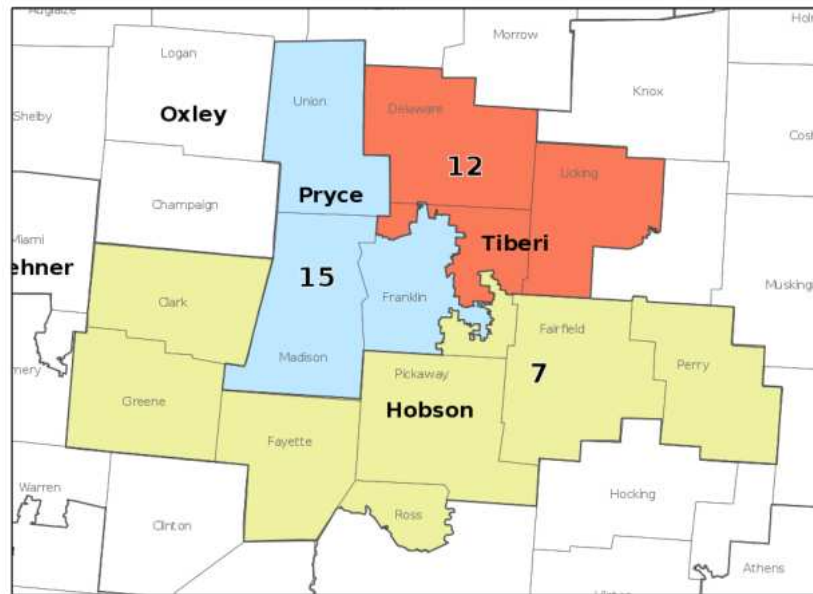


Abbildung 2.2: Wahlkreise bei Columbus, Ohio (aus [Wik16])

Insbesondere in den USA gibt es noch viele weitere Beispiele für das Gerrymandering, sogar für die Manipulation ganzer Wahlkreissysteme in Bundesstaaten, wie zum Beispiel in North-Carolina und Wisconsin. Dies führte zu einigen Gerichtsprozessen, die teils bereits beim obersten Gericht der Vereinigten Staaten vorlagen und aktuell noch vorliegen. Im Fall Wisconsins hat der Vertreter der benachteiligten Demokraten (ein Professor der Chicago Law School) zur Veranschaulichung seiner Argumentation vor Gericht den oben vorgestellten Begriff der Effizienzlücke entwickelt.

### 2.3.2 Deutschland

Durch das in Deutschland verwendete personalisierte Verhältniswahlrecht bei Bundestagswahlen ist Gerrymandering hierzulande zwar denkbar, hätte aber nur Auswirkungen auf die Erststimmen und nicht auf (die durch die Zweitstimme festgelegte) Sitzverteilung im Bundestag. Da allerdings die bekannte 5%-Hürde nicht für solche Parteien gilt, die bundesweit mindestens drei Direktmandate gewonnen haben<sup>3</sup>, kann es bei knappem Ausgang einer Wahl auch in Deutschland durch Gerrymandering zu entscheidenden Veränderungen kommen, wie das folgende Beispiel zeigt.

Bei der Bundestagswahl 1994 gewann die PDS<sup>4</sup> in Berlin vier Direktmandate und erhielt deshalb aufgrund obiger Ausnahmeregelung 30 Sitze, obwohl sie an der 5%-Hürde scheiterte. Bei der Wahl 1998 gewann die Partei die selben Direktmandate. Bei der Bundestagswahl 2002 hingegen erreichte die PDS einerseits keinen Anteil von 5% der Zweitstimmen und gewann andererseits nur noch zwei Direktmandate

<sup>3</sup> § 6 Abs. 3 BWahlG

<sup>4</sup>Der Vorläufer der heutigen Linkspartei.

Wahlkreis	Vorsprung/Rückstand der PDS 1998	Vorsprung/Rückstand der PDS 2002
Berlin-Marzahn	+31.656	ungefähr gleich
Berlin Lichtenberg- Hohenschönhausen	-	+17.210
Berlin Mitte	+283	-48.715
Berlin-Friedrichshain Kreuzberg-Prenzlauer Berg Ost	+14.039	-18.134
Berlin-Pankow	+3.293	-5.562

Tabelle 2.1: Stimmenvorsprung/-rückstand der PDS in Berlin 1998 und 2002 nach [Pro01]

in Berlin, in Folge dessen war die Partei nur noch mit eben diesen beiden Mandaten im Bundestag vertreten.

Dieser Verlust zweier Direktmandate ist auf neue Wahlkreisgrenzen in Berlin zurückzuführen, denn die Stimmenanteile in Berlin blieben im Vergleich von 1998 zu 2002 auf einem ähnlichem Niveau. Der Neuzuschnitt dort im Jahr 2001 fand unter Einfluss der SPD, die zu dieser Zeit in Berlin wie auch im Bund regierte, statt. Nur im Wahlkreis Berlin-Marzahn blieb der Stimmenvorsprung der PDS bei beiden Wahlen ungefähr gleich. Dazu gewann die PDS im neuen Wahlkreis Berlin Lichtenberg-Hohenschönhausen besonders deutlich. Der Verdacht liegt also nahe, dass hier eine PDS-Hochburg geschaffen wurde. Wenn man die Wahlkreise in Friedrichshain und Pankow betrachtet, wo die PDS 1998 noch mit tausenden Stimmen Vorsprung gewann, im Jahr 2002 allerdings ebenso deutlich den Kampf um die Direktmandate verlor, erhärtet sich ein solcher Eindruck. Im Wahlkreis Berlin-Mitte gewann die PDS 1998 noch knapp, bei der Wahl 2002 verlor sie hier mit fast 50.000 Stimmen Rückstand. Die drei für die PDS verlorenen Wahlkreise gingen alle an Kandidaten der SPD. Bei der Betrachtung dieser Ergebnisse muss sich die SPD und damit ihr damaliger Parteivorsitzender GERHARD SCHRÖDER den Vorwurf des Gerrymanderings gefallen lassen.

Besondere Brisanz gewinnt dieser Befund durch den Umstand, dass die Bundestagswahl 2002 besonders knapp ausging. Die am Ende wiedergewählte rot-grüne Koalition von GERHARD SCHRÖDER erhielt im neuen Bundestag eine Mehrheit von nur vier Stimmen. Hätte die PDS allerdings bei unparteiisch erstellten Wahlkreisen in Berlin drei Direktmandate gewonnen, wäre sie mit mindestens 25 Abgeordneten ins Parlament eingezogen und Rot-Grün nicht möglich gewesen. Somit kann man überspitzt sagen, dass GERHARD SCHRÖDER und die SPD sich, ohne es vorher genau zu wissen, mit dem Gerrymandering in Berlin selbst wiedergewählt haben.

## 2.4 Mögliche Lösungsansätze

Nach diesen Beispielen wollen wir einigen Ansätze zur Beseitigung von Manipulation durch Gerrymandering besprechen. So könnte man die Wahlkreisgrenzen ein für allemal festlegen und dann fortan nicht mehr verändern. Wären die ersten Wahlkreise

fair, müssten sie immer fair sein. Aber genau das ist in der Praxis nicht der Fall. Denn mit den Auswirkungen des demographischen Wandels werden die Wahlkreise, beziehungsweise die Zahl der von Ihnen repräsentierten Bürgern, unproportional, womit eine elementare Forderung an Wahlkreise verletzt ist. Die Neuzeichnung von Wahlkreisen könnte man nun „gerechten“ Gremien überlassen. Wenn alle politischen Parteien von Bedeutung in einem solchen Gremium sitzen, gilt es jedoch zu befürchten, dass diese Parteien viele Wahlkreise dahingehend manipulieren, dass jede von ihnen je eine gewisse Anzahl an sicheren Sitzen erhält und nur in wenigen Wahlkreisen ein echter Kampf stattfindet. Denn eine politische Partei hat kein Interesse an viel fairem Wettbewerb, da dieser teuer und aufwendig ist. Wenn nun die Wahlkreise von neutral besetzten Kommissionen festgelegt werden, steht es auch zu befürchten, dass sie sich nicht so neutral verhalten, wie man erwarten würde. Beispielsweise sind die Rundfunkräte im deutschen öffentlich-rechtlichen Fernsehen im Prinzip neutral, praktisch aber stark politisch motiviert.

Als Alternative könnte eine automatisch ablaufende Aktualisierung von Wahlkreisgrenzen attraktiv erscheinen. Mit relativ einfachen Algorithmen könnte man Wahlkreise festlegen, die möglichst nah an einer konvexen geometrischen Form sind. Dieses Vorgehen wird dann problematisch wenn in Grenzfällen keine Anpassung vorgesehen wird. Allgemein dürfen wir in Zweifel ziehen, ob einfache Algorithmen einem so komplexen Problem Rechnung tragen können. Als Alternative dazu besteht natürlich auch die Möglichkeit, alles an verfügbaren Daten und Rechenkraft moderner Computer aufzuwenden und mit komplexen Algorithmen Wahlkreise bestimmen zu lassen. Diese sind dann aber nicht mehr nachvollziehbar und intransparent. Das macht diese Lösung wahrscheinlich sehr unpopulär, denn warum sollte ein nicht nachvollziehbarer Computer den wahlberechtigten Bürgerinnen und Bürgern eines Landes vorschreiben, wie und wo diese zu wählen haben.

Im härtesten Schritt könnte man in ein Wahlsystem wechseln, in welchem Gerrymandering nicht möglich ist. Erster Kandidat hierfür wäre das Verhältniswahlrecht, bei dem, die Stimmenanteile auf nationaler Ebene die Verteilung der Sitze im Parlament bestimmen und nach vorher festgelegten Listen der Parteien besetzt werden. Jedoch gibt es auch in diesem System große Probleme, denn die Listen werden durch jeweilige Parteiführung festgelegt oder zumindest stark beeinflusst. So können Abgeordnete, die von der Parteilinie und dem Fraktionszwang abweichen, auf einer solchen Liste abgestraft werden und dadurch gegebenenfalls ihr Mandat verlieren. Bei einem System mit Direktwahl lokaler Vertreter hätten solche Abgeordnete immer noch die Chance, durch lokale Wähler wiedergewählt zu werden.

Wir erkennen also, dass es keinen Königsweg zur Beseitigung des Gerrymanderings gibt. Ein Wahlsystem, welches das Verhältniswahlrecht mit lokalen Vertretern kombiniert und dessen Wahlkreise möglichst transparent und fair festgelegt werden, erscheint als vorerst beste Lösung.

## 2.5 Fazit

Zum Abschluss der Betrachtungen können wir feststellen, dass es das Gerrymandering nicht nur in der Theorie, sondern auch als praktisches Problem ohne einfache

Lösung gibt. Es handelt sich um ein Jahrhunderte altes Problem, für das sich mittlerweile eine beeindruckende Datensammlung voller Beispiele gebildet hat. Es wurden immer wieder Wahlen mit dem anfälligen Mehrheitswahlrecht zugunsten einer Partei gelenkt.

Faire Wahlkreise zu schaffen und zur Erhaltung der Fairness immer wieder anzupassen, ist ein unglaublich komplexes Problem. Zwar gibt es etwa mit der Effizienzlücke Ansätze, die Analyse dieses komplexen Problems in einer einzigen Zahl zu realisieren. So verlockend dies scheint, birgt es aber vor allem das Risiko, Gerrymandering zu stark zu vereinfachen. Ein wie bereits erwähnt komplexes Problem lässt sich nicht auf einen einzigen Wert reduzieren, ohne die Betrachtung zu vereinfachen.

Die Lösung des Problems des Gerrymanderings steckt also weder in verständlichen Indikatoren zu seiner Aufdeckung noch in dem überhasteten Wechsel in ein anderes Wahlsystem oder anderen Vorgehensweisen zur Determinierung von Wahlkreisgrenzen, sondern vor allem in der Aufklärung über das Problem selbst. Das Wissen über diese Manipulationsmöglichkeit und seine Funktionsweise in der Gesellschaft zu verbreiten, gibt den Wählern und Wählerinnen die sprichwörtliche Macht und Souveränität zurück, die Ihnen durch Gerrymandering entzogen wird. Eine mündige Bevölkerung kann damit dafür sorgen, sich wieder seine Volksvertreter auswählen zu können und nicht die Politiker sich ihre Wähler.

## Literatur

- [Dar17] DARLA CAMERON: *Here's how the supreme court could decide whether your vote will count*, The Washington Post, 2017.  
[https://www.washingtonpost.com/graphics/2017/politics/courts-law/gerrymander/?utm\\_term=.ae4f2615e269](https://www.washingtonpost.com/graphics/2017/politics/courts-law/gerrymander/?utm_term=.ae4f2615e269)
- [Pro01] PROJEKTGRUPPE PARTEIENFORSCHUNG KONRAD ADENAUER STIFTUNG: *Bundestagswahlen 2002 – Kandidatenentwicklung und Personalwechsel*. Arbeitspapier, 50, 2001.
- [SM15] STEPHANOPOULOS, NICHOLAS and ERIC MCGHEE: *Partisan Gerrymandering and the Efficiency Gap*. University of Chicago Law Review, 82:831–900, 2015.
- [Wik16] WIKIMEDIA COMMONS CONTRIBUTORS: *Columbus, Ohio – congressional districts*, 2016.  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:ColumbusOhioCongressionalDistricts.svg&oldid=248633333>
- [Wik18] WIKIPEDIA: *Gerrymandering*, 2018.



# Ich bin dann mal *nicht* weg

## Bewusstes Reisen im digitalen Zeitalter: ein persönliches Essay

FRIEDRICH LORENZ



2012 bin ich das erste Mal in ein Flugzeug gestiegen. Damals ging es nicht nach Rom, sondern für sieben Monate nach Australien. Trotz aller großartigen Erlebnisse und Begegnungen fehlte mir eine grundlegende Erfahrung des Reisens: Selbst im australischen Outback, in über 14.000 km Entfernung zu meiner Heimat, erlebte ich, dass ich gar nicht weg war. Durch meine digitalen Begleiter war mein Leben daheim stets griffbereit und nur Sekunden entfernt – genau das, was ich in dieser Zeit zurücklassen wollte. Fünf Jahre später boten mir das Romseminar und die Reise in die Ewige Stadt die erneute Gelegenheit, mehr über das bewusste Reisen und die Grenzen von „Zahlen, Daten, Fakten?“ nachzudenken. Es folgen daher einige sehr persönliche Überlegungen.

Gerade mit dem Flugzeug in Rom gelandet und sofort wird das Handy aus dem Flugmodus befreit. Erste abgeschickte Nachricht: „Ich bin gut gelandet.“ Schon an diesem Punkt sollten wir die Erwartung der ständigen Erreichbarkeit hinterfragen. Unsere technischen Geräte ermöglichen uns viele Annehmlichkeiten, die allerdings auf dem zweiten Blick eine bedenkliche Kehrseite aufweisen. Besonders beim Reisen, wenn wir unsere ausgetretenen Pfade verlassen, muss das eigene Nutzungsverhalten der digitalen Medien gut reflektiert werden.

### **Technische Möglichkeiten**

Wie unterschiedlich unsere Reisen auch sein können, ob ein Campingurlaub im Nationalpark oder eine Studienreise nach Rom, grundlegende Motive haben sie gemeinsam: Es ist die Fremde, die uns anzieht und anspornt, den Alltag mit all seinen Verpflichtungen hinter sich zu lassen, sich neuen Eindrücken auszusetzen und dabei sich selbst zu finden. Mit unseren technischen Begleitern schaffen wir uns aber eine Blase des Vertrauten und grenzen diese neuen Erfahrungen weitgehend aus. Es fällt uns somit schwer, unsere Gedanken von den eigentlich fernen Alltagsproblemen zu befreien. Die Entfernung spielt dabei keine Rolle mehr; im Vergleich dazu mussten unsere Vorfahren lange auf den nächsten Brief oder ein Telegramm warten – in den meisten Fällen gab es sogar gar keinen Kontakt während der Reise.

Heute werden die kommunikativen Hürden während einer Reise immer geringer. Durch die neue Roaming-Verordnung von Juni 2017 war es bei unserem Romaufenthalt nicht mehr notwendig, aus Sorge vor hohen Kosten die Kommunikation zu begrenzen. Mit der ständigen Erreichbarkeit ist auch die Erwartung daran gewachsen und dabei das Gefühl des Abstands verloren gegangen. Wir können uns über große Entfernungen unterhalten, als stünden wir uns direkt gegenüber. Aber darin steckt das Problem, denn wir stehen uns nicht direkt gegenüber! Bekanntlich gehen viele Missverständnisse auf die Beschränktheit des Kommunikationskanals zurück, und dennoch wird der Fehler bei dem Gesprächspartner gesucht.

Es ist schwer, angesichts der Vielfalt an technischen Möglichkeiten auch mental weg zu sein. Ständig erreichen uns Nachrichten. Die Entscheidung, wann wir welche Informationen bekommen, scheint immer weniger bei uns zu liegen. Diese Fremdbestimmung belastet uns nicht nur im Alltag, sondern bringt uns auch mit unseren Reisemotiven in Konflikt.

Wir bleiben nicht nur privat unseren Aufgaben verpflichtet, auch beruflich können wir uns nicht mehr von den alltäglichen Problemen loslösen. Genauso wie wir aber einen freien Feierabend nach dem Arbeitstag brauchen, ist es wichtig, auf Reisen den Alltag hinter sich zu lassen und sich auf die neue Umgebung einlassen zu können. Dazu müssen wir uns selbstbewusst entscheiden, ansonsten werden wir von einer gefühlten Pflicht zur Erreichbarkeit gedrängt.

### **Erinnerungen festhalten**

Beim Wunsch, die Fremde zu erleben, stellen wir uns oft selbst in die Quere, indem wir sie festhalten möchten. Mal ein paar Schnappschüsse mit dem Smartphone gemacht, die Spiegelreflexkamera ist ebenso schnell zur Hand. Dank unserer ständigen, immer

griffbereiten technischen Begleiter dürfen wir keinen Moment mehr verpassen. Aber beinhalten die tausend Fotos vom letzten Urlaub unsere ganzen Erinnerungen? Die Kamera ermöglicht es, den Moment bildlich festzuhalten, um uns später daran erinnern zu können. Doch das Bild sollte nicht die gesamte Erinnerung darstellen. Es ist nur auf den visuellen Eindruck beschränkt, die Unmittelbarkeit der Erlebnisse geht verloren: beispielsweise beim Romseminar der Geruch der ausgezogenen, schneenassen Schuhe mitten im Vortragsraum, die Klänge des Chores vor der Cena oder der anschließende Geschmack des köstlichen Essens und guten Weines. Am besten beleben wir diese Erinnerungen, indem wir persönlich von ihnen berichten. Aber wir können nur von Erlebnissen berichten, die wir auch erleben, und das ist hinterm Bildschirm schwieriger. Jedes Mal, wenn wir den Moment digital festhalten möchten, verlassen wir kurz die Szenerie und nehmen eine beobachtende Rolle ein. Ist es dieser Moment, an den wir uns erinnern möchten? Laut einer im Februar 2014 veröffentlichte Studie der Psychologin LINDA HENKEL von der Fairfield University in Connecticut, USA, können wir uns an das Gesehene schwerer erinnern, wenn wir dabei Fotos gemacht haben. Bei einem Experiment hat sie die Teilnehmer in zwei Gruppen aufgeteilt, die sich in einem Museum Gemälde anschauen sollten. Dabei durfte eine Gruppe fotografieren, die andere nicht. Das Hauptergebnis des Experiments war, dass sich die Gruppe ohne Kameras an mehr Kunstwerke erinnern konnte und zudem mehr Details wahrgenommen hatte. Das Fotografieren kann also nicht nur unsere Erlebnisse bereichern, sondern auch unsere Wahrnehmung beeinflussen. Wie viele Bilder haben wir auf unserer Reise in Rom gemacht? Manche schauen wir einmal an, danach landen sie auf der Festplatte als Füllmaterial. Ein paar Bilder schaffen es auf unsere Profile auf Instagram oder Facebook: perfekt inszenierte Aufnahmen, die nur noch wenig mit dem tatsächlich Erlebten gemein haben, teilen wir mit der gesamten Welt. Man muss sich bewusst werden, ob die Bilder die Zeit hinter der Kamera wert sind, denn Bilder sollten unsere Erinnerungen ergänzen, nicht ersetzen.

### **Empfehlungen von Fremden**

Zu oft erleben wir unsere Reisen mit einem fahlen Beigeschmack. Wir lassen uns leicht von den vielen Geschichten aus den Netzwerken beeinflussen und versäumen unsere eigenen Erlebnisse. Besonders in fremden Städten scheint es unabdingbar, vor dem Besuch eines Restaurants dessen Bewertungen zu prüfen. Ob drei oder vier Sterne, unsere Entscheidung wird von solchen Zahlen beeinflusst. Jede Bewertung ist aber eine individuelle Erfahrung, woraus sich nur schwer auf die voraussichtlichen eigenen Erlebnisse schließen lassen; zudem bleibt uns der Einfluss von Dritten, beispielsweise durch gekaufte Beiträge, völlig verborgen. Mein Plädoyer ist daher, dass wir uns vom eigenen Erleben nicht abbringen sollen, egal ob positiv oder negativ.

### **Entscheidungen**

Wie gehen wir mit den neuen technischen Fortschritten um? Sollten wir jede Möglichkeit voll ausschöpfen, um uns den größten Vorteil zu verschaffen, oder uns besser der Technologie ganz entziehen und uns auf unsere eigenen Fähigkeiten besinnen? Wir

werden an immer mehr Stellen mit der digitalen Welt konfrontiert, selbst wenn wir es nicht wollen. Viele Funktionen unterstützen uns bei unseren Alltagsproblemen und unterhalten uns, jedoch verändern wir uns und unser Verhalten durch diese „Fremde Welt“. Ob zum Positiven oder zum Negativen – uns muss bewusst werden, inwieweit wir uns darauf einlassen und beeinflussen lassen. Genau diese Entscheidung muss von jedem selbst getroffen und darf nicht den Geräten überlassen werden.

# ⊙, zwei, 3 – Zahlen im Gehirn

MAIKE FARNSCHLÄDER, CARA BROSS, LUCY ROHDE



## 4.1 Zahlenverständnis

*„Zahlenverständnis“ ist die Überschrift des ersten Teils unseres Vortrags „⊙, zwei, 3 – Zahlen im Gehirn“. Dazu zählen die Fragestellungen, ob die Zählkompetenz angeboren ist, wie sich die Zählkompetenz weiterentwickelt und wie unser Gehirn Zahlen erkennt sowie mathematische Fragestellungen verarbeitet.*

Wie verschiedene Experimente beweisen, zeigen auch Tiere ein Verständnis für Mengen. Unter anderem befasst sich die italienische Wissenschaftlerin ROSA RUGANI mit den Rechenfähigkeiten von Küken. Dabei wurden Versuche durchgeführt, in denen für ein Küken sichtbar Bälle hinter zwei Wänden verschwinden. Ebenfalls vor den Augen des Küken werden diese auch von der einen hinter die andere Wand transportiert. Anschließend wird das Küken laufen gelassen und entscheidet sich in den meisten Fällen für die Wand, hinter der die meisten Bälle versteckt sind. Dieses und andere Experimente beweisen, dass Tiere ein Verständnis für unterschiedlich große Mengen haben, mit symbolischen Zahlen allerdings wenig anfangen können. Je größer die Mengen werden, desto mehr Schwierigkeiten haben die Tiere. Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass Tiere wohl ein Mengenverständnis haben, Mathematik jedoch nur Menschen beherrschen. Um festzustellen, ob die Zählkompetenz bei Menschen angeboren ist, wurden Versuche mit 4 bis 6 Monate alten Säuglingen durchgeführt, die hauptsächlich als Studien von WYNN veröffentlicht

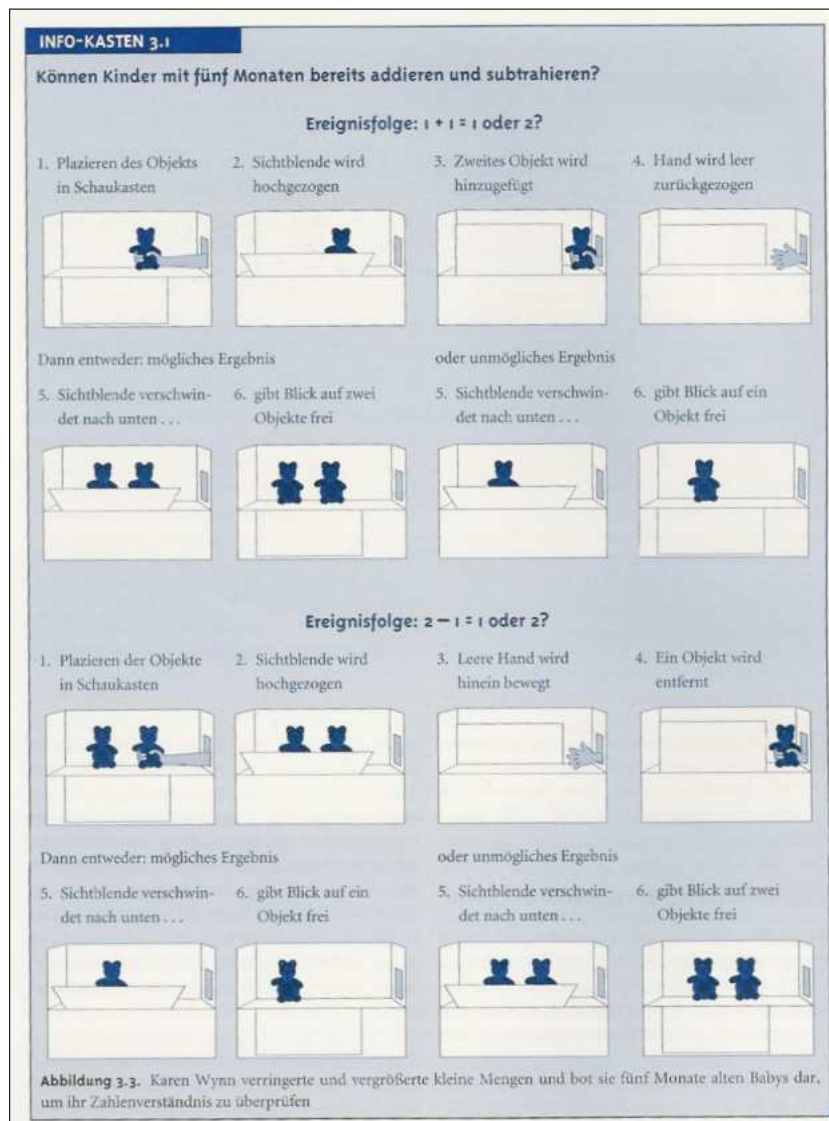


Abbildung 4.1: Rechenkompetenz im Kindesalter. [DE]

wurden. Dabei wurde die Zeit gemessen, die die Babys einem Ereignis widmeten. Dieses war das Ergebnis einer Addition von Puppen. Vor eine Puppe wurde eine Abdeckung gestellt, eine zweite Puppe dahinter platziert und die Hand sichtbar leer zurückgezogen. Fiel nun die Abdeckung war entweder das „richtige“ Ergebnis von 2 Puppen zu sehen oder nur eine. Beim „falschen“ Ergebnis blickten die Säuglinge länger auf das Ereignis. Daraus lässt sich schließen, dass die Fähigkeit zur groben Unterscheidung von Mengen nicht nur bei Tieren, sondern auch bei Menschen angeboren ist. Von einer Zählkompetenz bei Babys kann deswegen aber noch gesprochen werden. Letztere umfasst nämlich mehrere Aspekte, die sich erst im Laufe der Zeit entwickeln.

Nach dem Zahl-Größen-Verknüpfungs-Modell von KRISTIN KRAJEWSKI (2007) zählt neben der angeborenen Größenunterscheidung auch das Aufsagen von Zahlwörtern zu den beiden Basiskompetenzen der Zählkompetenz, die zunächst allerdings nicht in Verbindung stehen. Erst in der zweiten Kompetenzebene werden diese

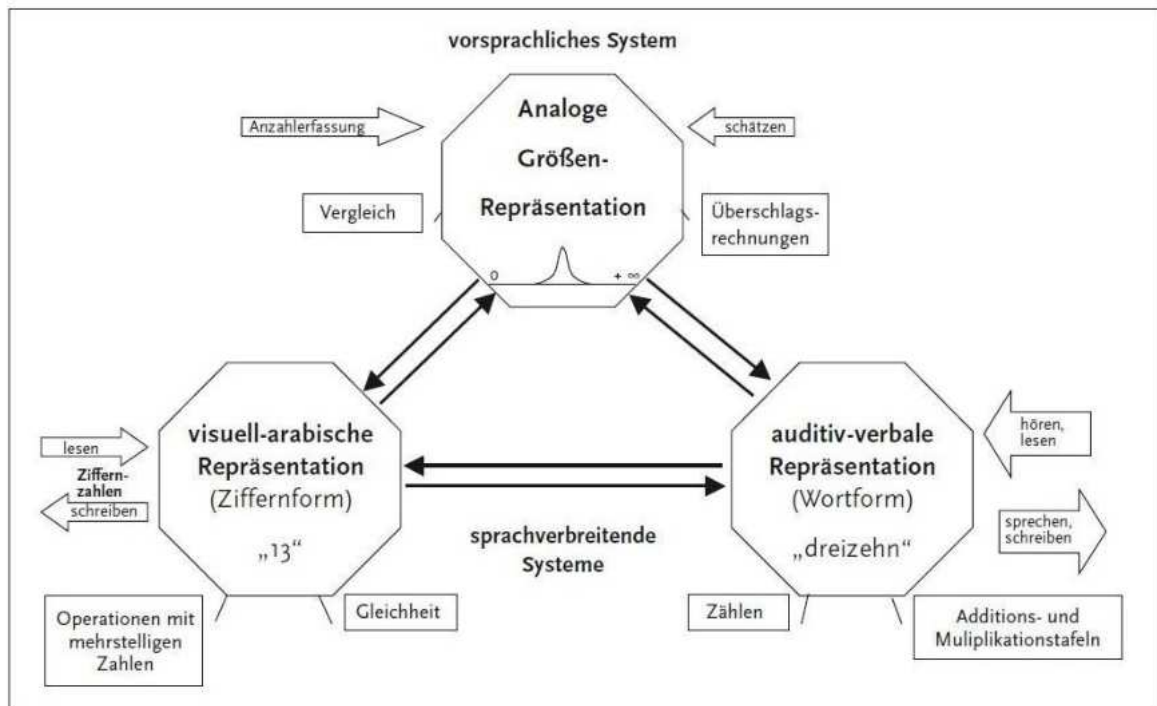


Abbildung 4.2: Triple-Code-Modell nach DEHAENE (1992). [SK<sup>+</sup>13, S. 47]

dergestalt verknüpft, dass sich eine Größenrepräsentation von Zahlen ergibt. Die dritte Kompetenzebene stellt das tiefere Zahlenverständnis anhand von Zahlenrelationen als Weiterentwicklung der vorherigen Kompetenzstufe dar. Je nach individueller Entwicklung und Bezug zu einem Zahlenraum befinden sich die Kinder im Alter zwischen 4 und 6 Jahren in der dritten Kompetenzebene. Man kann sich hierbei in verschiedenen Zahlenräumen in unterschiedlichen Kompetenzebenen befinden. Dann ist die Zählkompetenz bereits vollständig ausgebildet und im Lauf des weiteren Lebens kommen nur noch eine Weiterentwicklung des Zahlenraums und eine schnellere Verarbeitung hinzu.

Wie die Verarbeitung aussieht, erklären neuropsychologische Modelle wie das Triple-Code-Modell (1992) vom französischen Neurowissenschaftler STANISLAS DEHAENE. Dieses sieht drei Module für die Zahlenverarbeitung zuständig, die wechselseitig in Verbindung stehen. Dazu zählen

1. die analoge Größenrepräsentation, die für Schätzungen und Vergleiche zuständig ist,
2. die visuell-arabische Repräsentation, die sich der Verarbeitung von Ziffernzahlen und dem Operieren mit mehrstelligen Zahlen widmet,
3. die auditiv-verbale Repräsentation, die das Zählen, Additions- und Multiplikationstafeln und die Anwendung von Zahlen in Wortformen beinhaltet.

Die verwendeten Informationen stammen vorrangig aus dem Buch [SK<sup>+</sup>13]. Die Informationen zur Studie von WYNN sind in der Quelle [DE] nachzulesen und allgemeine Informationen über die Rechenkünste von Tieren in dem Zeitungsartikel [Lau17].

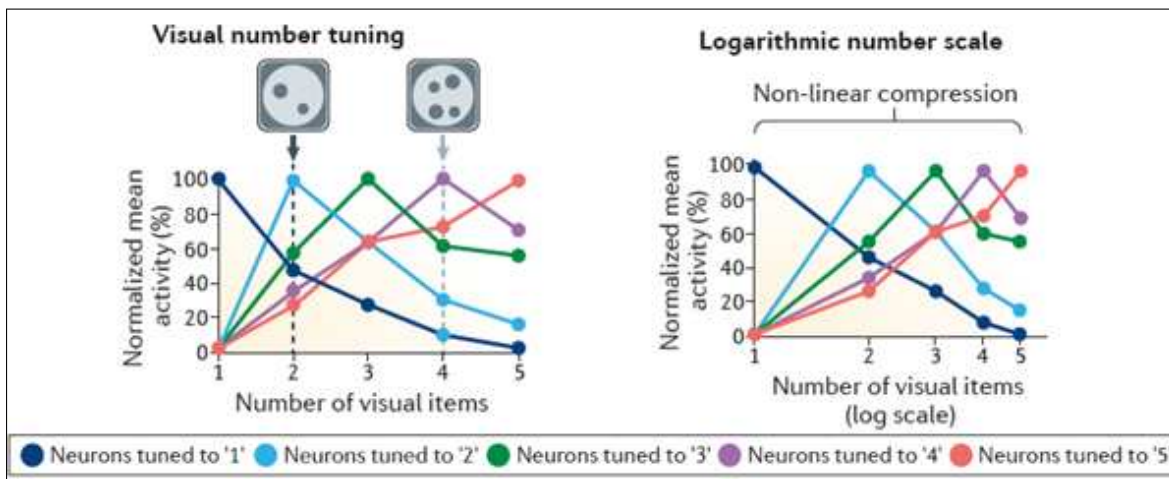


Abbildung 4.3: Ausschlagskurven der NSN.

## 4.2 Zahlenwahrnehmung auf neuronaler Ebene

Bei der Zahlenverarbeitung im Gehirn spielen sogenannte numerosity-selective neurons (im Folgenden NSN) (numerosity, engl.: Anzahl, Zahlengröße) eine zentrale Rolle. Durch ihre Funktionsweise ergeben sich zwei nennenswerte Effekte, der Größeneffekt und der Distanzeffekt, die unsere Zahlenwahrnehmung maßgeblich beeinflussen.

Die NSN sind für die Erkennung von Anzahlen zuständig – sobald wir auf Mengen oder Gruppen treffen, kommen wir (bewusst oder unterbewusst) mithilfe der NSN zu einer Größeneinschätzung der entsprechenden Gruppe/Menge. Dies geschieht ebenso unbewusst wie andere Sinneswahrnehmungen.

Die NSN sind jeweils auf eine spezifische Anzahl geprägt; sie senden Signale aus, sobald wir „ihre“ Anzahl wahrnehmen. Allerdings tun sie dies auch zu einem gewissen Anteil bei benachbarten Anzahlen und arbeiten ungenauer, je höher die Anzahlen sind, auf die sie geprägt sind (siehe Abbildung 4.3). Bei der Auswertung der Neuronsignale entstehen bei geringer Überschneidung der Neuronen-Ausschlagskurven (und damit eindeutigeren Signalen) weniger Fehler.

Neben den NSN existieren unzählige weitere, auf andere Sinneswahrnehmungen spezialisierte Neuronen. Vereinfacht gesagt existieren Neuronen, die die Wahrnehmung von Helligkeit steuern, andere sind für Lautstärke oder Wärmeempfinden zuständig. Einige dieser Sinneswahrnehmungen wie etwa die der Helligkeit oder Lautstärke lassen sich durch das Weber-Fechner-Gesetz beschreiben. Dieses besagt, dass bei einem exponentiellen Anstieg der Reizstärke die Empfindung im Sinnesorgan linear ansteigt. Wenn  $S$  die wahrgenommene Intensität,  $I$  die Reizintensität und  $k$  eine Konstante ist, so ist der Zusammenhang durch die Formel

$$S = k \cdot \log I$$

dargestellt.

Die NSN sind ebenfalls mit diesem Gesetz beschreibbar, was bedeutet, dass unser mentaler Zahlenstrahl logarithmisch aufgebaut ist (siehe Abbildung 4.3). Aus evolutionärer Perspektive ergibt diese Eigenschaft einiger Neuronen durchaus Sinn



– es ist wichtiger, Helligkeitsstufen in der Dämmerung unterscheiden zu können, als feine Nuancen der Helligkeitsänderung am Tag zu bemerken. Und ebenso ist es sehr wichtig, zu wissen, wie viele Nachkommen zu den eigenen zählen (sind es nun zwei oder drei?), bei der Frage, ob die feindlich gesinnte Gruppe nun aus dreißig oder einunddreißig Mitgliedern besteht, sind wir uns sicher, dass wir keine genaue Antwort brauchen, wenn doch feststeht, dass wir so oder so fliehen sollten.

Anhand dieser Eigenschaften der NSN lassen sich nun zwei Effekte auf unsere Zahlwahrnehmung beschreiben. Der Distanzeffekt besagt: Je dichter Zahlen zusammen liegen, desto schwerer sind sie zu unterscheiden. Beispielsweise sind die Zahlen 2 und 3 schwerer zu unterscheiden als 2 und 8. Dieser Effekt ist ein Resultat des Ausschlagverhaltens der NSN. Je dichter Zahlen beieinander liegen, desto stärker überschneiden sich die Ausschlagskurven der NSN, desto schwerer ist es also, eine eindeutige Angabe aus den Neuronensignalen zu bilden.

Der Größeneffekt besagt: Bei gleichem Abstand sind höhere Zahlen schwieriger zu unterscheiden als niedrigere. Beispielsweise fällt es leichter, die 2 und 3 zu unterscheiden als die 22 und 23. Grund hierfür ist das Weber-Fechner-Gesetz: Die Breite der Neuronen-Ausschlagskurven steigt linear mit der Größe der Zahlen, es kommt bei höheren Zahlen also zu einer größeren Ausschlagskurvenüberschneidung, also zu uneindeutigeren Signalen.

Die verwendeten Informationen stammen aus den Artikeln [Nie05] und [Nie16].

### 4.3 Zahlen im Gehirn

*In welchen Gehirnhälften und in welchen Arealen des Gehirns werden insbesondere Zahlen verarbeitet? Ergebnisse aus der Neuropsychologie.*

Ergebnisse in der Neuropsychologie können sowohl aus Gehirnverletzungen als auch aus bildgebenden Maßnahmen wie beispielsweise der Magnet-Resonanz- (MRT) und der Positronen-Emissions-Tomographie (PET) oder der Elektro- (EEG) und der Magneto-Enzephalographie (MEG) erhalten werden.



Abbildung 4.4: Weiße Substanz im Gehirn. [PW11, S. 43]

Die Forschung mit sogenannten „Split-Brain-Patienten“ liefert Informationen darüber, in welchen Gehirnhälften welche Vorgänge stattfinden. Bei solchen Patienten ist der Corpus Callosum, ein dickes Bündel von Nervenfasern zwischen beiden Gehirnhälften, vollständig durchtrennt, sodass kein Informationsaustausch zwischen linker und rechter Gehirnhälfte stattfinden kann. In Abbildung 4.4 ist die aus Myelin bestehende weiße Substanz, die die Neuronen im Gehirn umhüllt, abgebildet.

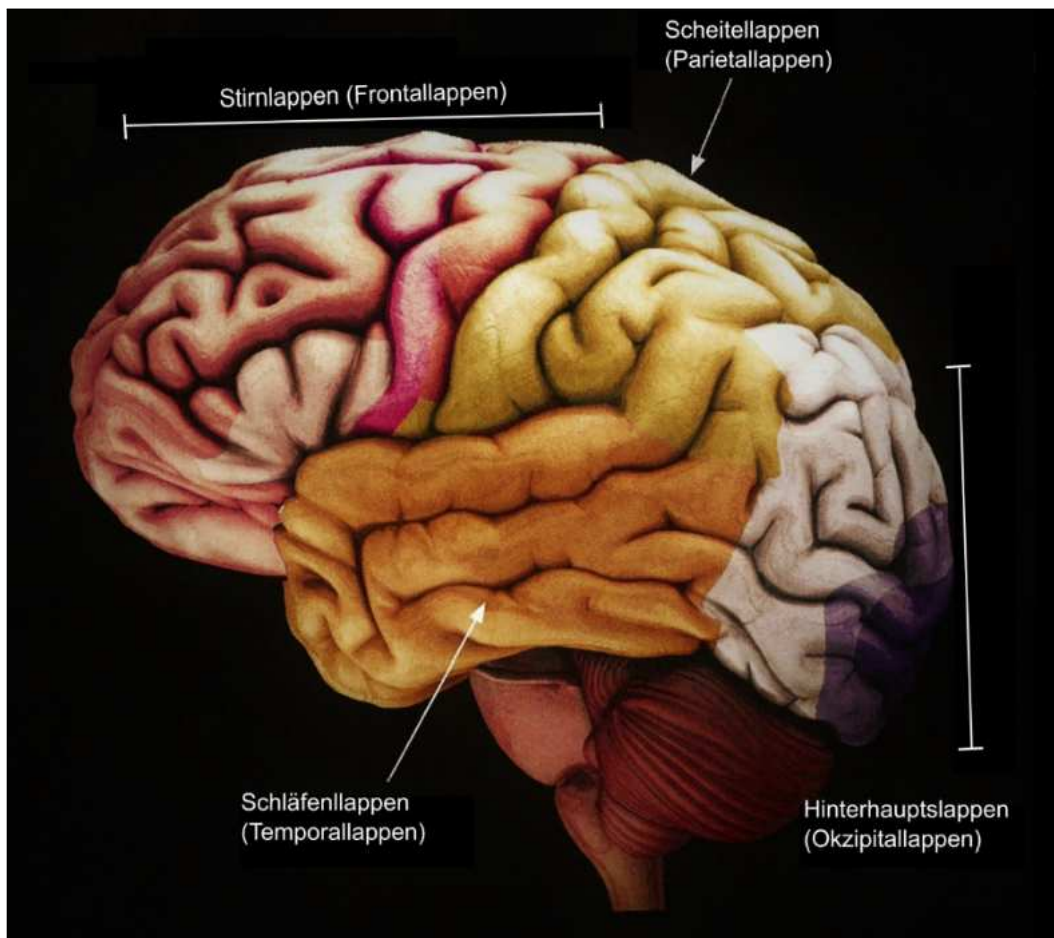


Abbildung 4.5: Areale der Großhirnrinde.[PW11, S. 38]

Während beispielsweise die Spracherzeugung, das Erkennen geschriebener Wörter und das Kopfrechnen allein in der linken Gehirnhälfte verortet sind, sind das Erkennen arabischer Ziffern, allgemeine motorische Fähigkeiten, Vergleichsverfahren und Repräsentationen numerischer Größen in beiden Gehirnhälften vertreten.

Während also Split-Brain-Patienten Informationen über die Verortung bestimmter Fähigkeiten in linker und rechter Gehirnhälfte liefern, interessieren sich Forscher außerdem für die genaueren Orte in den jeweiligen Gehirnhälften. Hierbei wird die Großhirnrinde betrachtet, die in den Okzipital-, den Parietal-, den Frontal- und den Temporallappen (siehe Abbildung 4.5) eingeteilt wird.

Die momentan vorherrschende Theorie besagt, dass das Gehirn eigene Schaltkreise hat, die seine Netzwerke koordinieren. Diese liegen vor allem im Frontallappen und kontrollieren neue, nicht automatisierte Verhaltensweisen wie das Planen, Anordnen, Entscheiden und Berichtigen von Fehlern. Sie stellen eine Art „Gehirn im Gehirn“ dar. Überdies sind im Frontallappen Aufgaben wie das Behalten von Zwischenergebnissen oder kognitive Abschätzungen verortet.

Im Okzipitalloben finden die visuelle Wahrnehmung und eine erste Sortierung von arabischen Ziffern, Wörtern und sinnlosen Buchstabenfolgen statt. Während arabische Ziffern oder Wörter dann in die dafür vorgesehenen Areale über elektrische Impulse weitergeleitet werden, werden beispielsweise sinnlose Buchstabenfolgen

erkannt und zunächst aussortiert.

Im Temporallappen werden u. a. geschriebene Wörter, die keine Zahlen darstellen, verarbeitet. Im unteren Bereich dieses Areals, dem inferioren temporalen Cortex, vermutet man außerdem eine Spezialisierung auf die Gesichtserkennung berühmter Persönlichkeiten.

Dem Parietallappen können u. a. Vorgänge zum Zahlenvergleich und zur Verknüpfung von Zahl und Raum zugeordnet werden. Unter letzterem wird dabei eine Art Zahlenstrahl im Gehirn verstanden, dessen Richtung kulturell bedingt aus der Schreibrichtung resultiert.

Es lässt sich also festhalten, dass nicht ein einziges Areal des Gehirns allein für die Verarbeitung von Zahlen zuständig ist, sondern dieser Vorgang wesentlich komplexer ist.

Die verwendeten Informationen stammen aus dem Buch [Deh99, S. 97ff, S. 201-264] und der Zeitschrift [PW11, S. 6-45].

## Literaturverzeichnis

- [DE] DUISBURG-ESSEN, UNI: *Neuropsychologische Theorie*. OpenOffice Impress.  
<https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-25523/neuropsycholog.%20Theorien.ppt>.
- [Deh99] DEHAENE, STANISLAS: *Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.
- [Lau17] LAUKENMANN, JOACHIM: *Die Rechenkunst der Tiere*. Süddeutsche Zeitung, 23. Juli 2017.  
<http://www.sueddeutsche.de/wissen/zahlenverstaendnis-eiertanz-um-die-mathematik-1.3597692>.
- [Nie05] NIEDER, ANDREAS: *Counting on neurons: The neurobiology of numerical competence*. Nature Reviews Neuroscience, 6:177–90, April 2005.
- [Nie16] NIEDER, ANDREAS: *The neuronal code for number*. Nature Reviews Neuroscience, 17:366–382, Mai 2016.
- [PW11] PAETSCH, MARTIN und TIM WEHRMANN: *Die Anatomie des Scharfsinns*. GEO Kompakt, 28:30–45, September 2011.
- [SK<sup>+</sup>13] SCHNEIDER, WOLFGANG, PETRA KÜSPERT et al.: *Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen*. Schöningh, Paderborn, 2013.



# Rechenschwäche oder schwacher Rechner?

HENRIK VALETT, WIETE KELLER



## 5.1 Einleitung

Rechenschwäche oder schwacher Rechner? Im Rahmen des diesjährigen Seminarthemas „Zahlen-Daten-Fakten?“ beschäftigten wir uns unter anderem mit der Wirkung von Statistiken innerhalb von Zeitungsartikeln auf die Gesellschaft. Dabei wurde deutlich, dass es für den Autor leichter ist, den Leser in seinem Sinne zu beeinflussen, wenn der Leser die dargestellten Fakten und Zahlen nicht gut verstehen kann. Dies war der Anlass dafür, uns näher mit dem Verständnis von Zahlen und

Mengen zu befassen und uns in unserem Vortrag mit dem Thema Dyskalkulie auseinanderzusetzen.

Obwohl es in unserer Gesellschaft salonfähig ist zu sagen, dass man keine Mathematik könne, wird über Dyskalkulie bisher nur wenig informiert und nicht jeder ist der Meinung, dass es sich um eine Leistungsstörung oder Krankheit handelt. Auch in der Wissenschaft herrscht Uneinigkeit bei der Frage ob es Dyskalkulie im Sinne von einer angeborenen Leistungsstörung gibt oder nicht.

## 5.2 Definition und Diagnosekriterien

In der Internationalen statistischen Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme, 10. Revision (ICD-10-WHO), wird Rechenschwäche folgendermaßen definiert: „Diese Störung besteht in einer umschriebenen Beeinträchtigung von Rechenfertigkeiten, die nicht allein durch eine allgemeine Intelligenzminderung oder eine unangemessene Beschulung erklärbar ist. Das Defizit betrifft vor allem die Beherrschung grundlegender Rechenfertigkeiten wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division, weniger die höheren mathematischen Fertigkeiten, die für Algebra, Trigonometrie, Geometrie oder Differential- und Integralrechnung benötigt werden.“ Diese Kriterien zugrundegelegt, kommen bei 4,5% bis 6% der Kinder Rechenschwächen etwa gleich häufig wie Lese-Rechtschreib-Schwächen vor. Nach PISA-Befunden liegt der Anteil von Schüler\*innen mit förderungsbedürftigen Rechenschwierigkeiten jedoch mit 15% deutlich höher.

Folgt man obiger Definition, ist das zentrale Kriterium für die Diagnose einer Rechenschwäche die Diskrepanz zwischen den Leistungen im Intelligenztest und den Leistungen im Rechentest. Gefordert ist ein Unterschied von 1,5 – 2 Standardabweichungen. Zudem müssen die Schwierigkeiten von Beginn der Schulzeit an bestehen und dabei die schulische Entwicklung behindern.

Diese Einstufungskriterien werden stark kritisiert, weil dabei einem Teil der förderungsbedürftigen Kinder keine Rechenschwäche diagnostiziert wird. Die Einhaltung des Diskrepanzkriteriums für die Diagnose führt dazu, dass bei einigen Kindern die Schwierigkeiten im mathematischen Kompetenzbereich nicht erkannt werden, weil die Differenz zwischen den Testergebnissen des allgemeinen Intelligenztest und des Rechentest zu klein ist. Hinzu kommt, dass Intelligenztests in der Regel viele Aufgaben beinhalten, für deren korrekte Bearbeitung bereits gewisse mathematische Kompetenzen benötigt werden. Bearbeiten rechenschwache Kinder nun solche Aufgaben, wird unter Umständen ihr Intelligenzwert dadurch so weit nach unten gedrückt, dass sie keinen durchschnittlichen Intelligenzwert mehr erreichen und die Kriterien zur Diagnose einer Teilleistungsstörung, wie einer Rechenschwäche, nicht erfüllt sind.

Aufgrund fehlender Beschulung des Lehrkörpers wird eine Rechenschwäche in vielen Fällen nicht erkannt und der von den Betroffenen benötigte individuelle Unterricht findet nicht statt. Noch ist unsere Gesellschaft für den Umgang mit der Rechenschwäche nicht so sensibilisiert, wie sie es für die Lese-Rechtschreib-Schwächen bereits seit einigen Jahren ist. Probleme werden zu häufig durch das soziale Umfeld bagatellisiert und verharmlost. Dabei spielen oft auch geschlechtsspezifische Vorur-

teile eine Rolle. Aus obengenannten Gründen können nicht alle Kinder die von ihnen benötigte Förderung erhalten. Gleichzeitig stellt sich die Frage, ob rechenschwache Kinder mit unterdurchschnittlicher Intelligenz von der üblichen Förderung für rechenschwache Kinder mit durchschnittlicher Intelligenz nicht ebenfalls profitieren könnten.

### 5.3 Entwicklung früher mathematischer Kompetenzen – sechsstufiges Kompetenzmodell

Um Leistungsstörungen, wie die Rechenschwäche einordnen zu können, verwenden Entwicklungspsychologen sogenannte Kompetenzmodelle. In diesen Modellen ist meist stufenartig eine altersgerechte Entwicklung des zu untersuchenden Kompetenzbereich dargestellt. Im Folgenden wird ein sechsstufiges Modell, welches den Erwerb der wichtigsten mathematischen Kompetenzen verdeutlicht erläutert, um anschließend Entwicklungsprobleme von rechenschwachen Kindern aufzeigen zu können.

#### Niveaustufe 1

Mit dem Erwerb der Sprache erlernen die Kinder Zahlwörter so, wie sie andere Worte lernen, und wenden diese auch im Sinne von Adjektiven an. In Liedern und Gedichten sind Zahlwörter als Reihen, bzw. Ausschnitte von Reihen enthalten. Sie werden zunächst als zusammenhängende Wortgebilde gelernt und können nicht für Zählhandlungen verwendet werden. Ab dem Alter von zwei bis drei Jahren lernen Kinder dann, kleine Anzahlen von Objekten in eine Reihenfolge zu bringen und dabei nach größer, bzw. kleiner mit Hilfe der 1-zu-1-Zuordnung zu bewerten. Es werden Begriffe wie viel, wenig, mehr und/oder weniger gelernt.

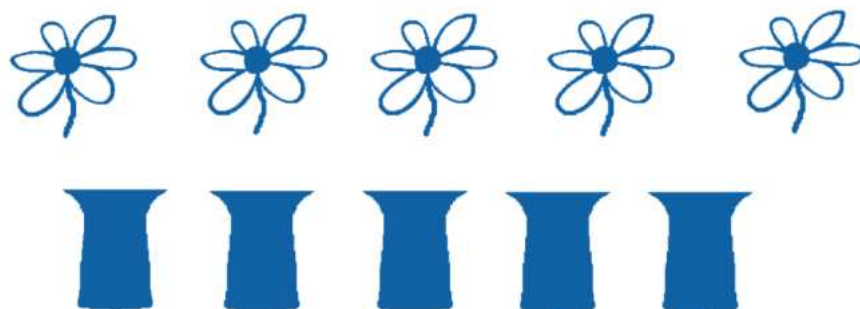


Abbildung 3: Invarianzaufgabe nach Piaget – Mehr Blumen oder mehr Vasen oder gleich viele Blumen und Vasen?

#### Niveaustufe 2

Diese Stufe ist erreicht, wenn die Zahlwörter voneinander unterschieden und in Zählhandlungen eingebunden werden. Dabei bildet die Zahlwortreihe immer noch

eine feste, untrennbare Sequenz, sodass Zählhandlungen nur durch ein vollständiges Aufsagen der Zahlwortreihe von „eins“ an ausgeführt werden können. Man bezeichnet diese Vorstellung als „mentalen Zahlenstrahl“, der mit einem „Richtungsmarker“ versehen ist und auf dem die Abstände zwischen den Zahlen noch keine Bedeutung haben. Kinder sind mit vier bis fünf Jahren in der Lage Zahlen hinsichtlich ihrer Größe miteinander zu vergleichen. Sie führen diesen Vergleich durch, indem sie die Zahlwortreihe aufsagen und diejenige Zahl als „größer“ identifizieren, die später in der Zahlwortreihe auftaucht.

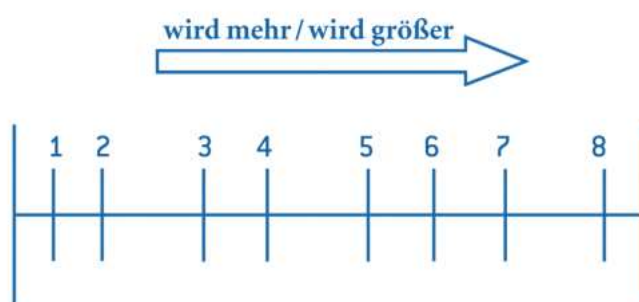


Abbildung 6: Mentaler Zahlenstrahl nach Resnick (1983) – In der fortlaufenden Zahlwortreihe werden die Zahlen „mehr, größer“.

### Niveaustufe 3

Die Kinder erkennen, dass Zahlen auch Anzahlen von Elementen einer Menge darstellen und Mengen in Mengen enthalten sind. Dieses Verständnis setzt das Wissen voraus, dass jede Zahl in der Reihe auch für eine Menge steht. Es kann nun von beliebigen Startpunkten der Zahlwortreihe aus weitergezählt werden. Dies leitet einen konzeptuellen Wechsel bei der Ermittlung der Kardinalität einer Menge ein, da nun die erste Zahl einer Additionsaufgabe als eine Menge betrachtet wird. Ausgehend von dieser Menge zählen die Kinder die zweite Menge hinzu und erhalten die Gesamtmenge.

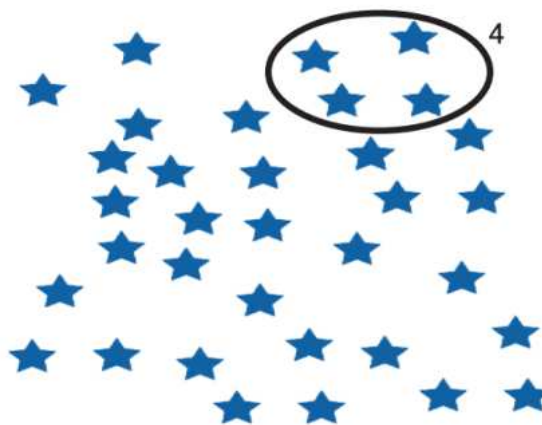


Abbildung 7: Kardinale Bedeutung der Zahl 4

### Niveaustufe 4

Das Verständnis für gleiche Abstände zwischen aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen wird entwickelt und Differenzen zwischen Mengen sowie Teil-Teil-Ganzes-



Verhältnisse werden erkannt. Diese Erkenntnisse sind wichtig für ein sicheres Verständnis der Grundrechenarten und vieler weiterführender Rechenoperationen, die auf diesem Konzept basieren. Das Verinnerlichen des Teil-Teil-Ganzes-Konzept bedarf einen längeren Lernprozesses, der gewöhnlich im ersten und zweiten Schuljahr stattfindet. Jedes Zahlwort in der Reihe steht für einen Zählschritt; damit steht das letztgenannte Zahlwort für die Anzahl abgezählter Gegenstände, ebenso wie für die Anzahl der Zähl Schritte. Mit diesem neuen Wissen können die Kinder die Differenzen zwischen zwei Mengen ermitteln.

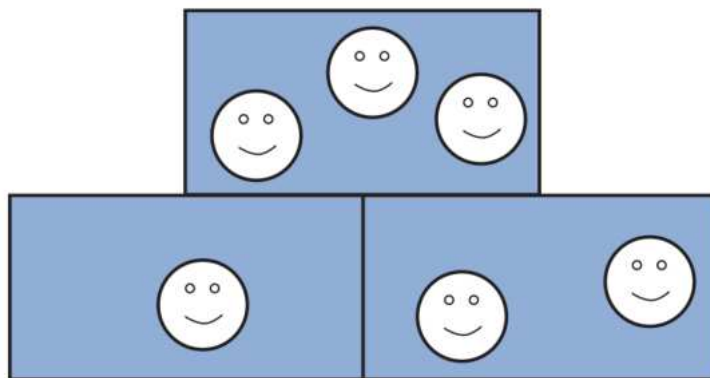


Abbildung 8: Zusammenhang zwischen Teilmengen und Gesamtmenge – die beiden Teilmengen sind äquivalent zur Gesamtmenge.

### Niveaustufe 5

Die Interpretation von Zahlen und Rechenoperationen in Begriffen von Teile-Ganzes-Beziehungen stellt die größte konzeptuelle Leistung der frühen Schuljahre dar. Die Entwicklung reicht bei Kindern ohne Rechenschwäche bis in das dritte Schuljahr hinein. Dabei lösen neue Konzepte die alten oft nicht sofort ab, sondern beide werden eine Zeit lang parallel verwendet.

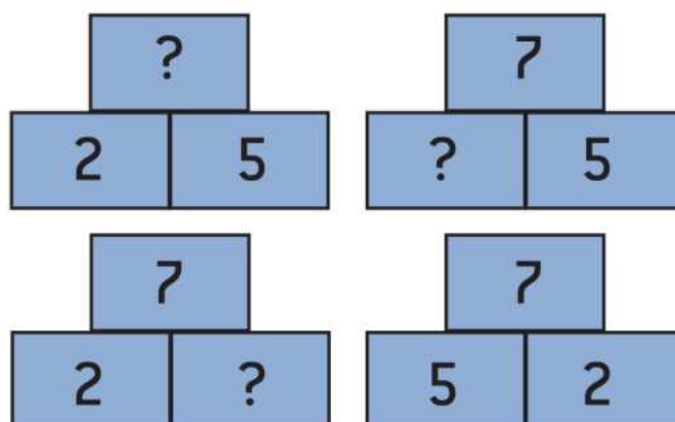


Abbildung 12: Die Beziehung zwischen den beiden Teilmengen und der Gesamtmenge ist determiniert; aus den Angaben zu zwei Mengen kann die dritte erschlossen werden.

### Stellenwertsystem (Niveaustufe 6)

Die Erweiterung des Zahlenraums von 20 bis 100 stellt den Kindern nicht nur einen größeren Zahlenvorrat zur Verfügung, sondern sie lernen damit auch das „Aufbauprinzip“ des dekadischen Zahlensystems zu verstehen und anzuwenden. Zweistellige Zahlen werden zunächst lediglich als Notation für eine größere Menge begriffen. Erst in einem weiteren Schritt wird das Verständnis aufgebaut, dass die erste Ziffer für die Anzahl der Zehner steht und die zweite Ziffer angibt, wie viele Einer die Menge enthält.

Tabelle 2: Ausschnitt Stellenwerttafel

Hunderter	Zehner	Einer
	1	5
3	2	4
		6

## 5.4 Besondere Hürden für Kinder mit Rechenschwäche

Generell machen rechenschwache Kinder im Vergleich zu unauffälligen Kindern mehr, aber nicht unbedingt andere Fehler. Nicht oder mangelhaft entwickelte Kompetenzen auf allen Niveaustufen, welche anschließend an dem vorher erläuterten Modell verdeutlicht werden sind der Grund für die auffällig große Fehleranzahl bei betroffenen Schülern.

### Kardinalität (Niveaustufe 3)

Zwei Konzepte müssen in diesem Entwicklungsschritt integriert werden: das Konzept der Zahlen als Positionen und das Konzept der Zahlen als Mengen einzelner Elemente. Die Entwicklung erfolgt durch unterschiedliche Erfahrungen, die die Mehrheit der Kinder auch ohne systematische Unterstützung verarbeiten können. Rechenschwache Kinder entwickeln dieses Verständnis für Kardinalität nicht. So verstehen rechenschwache Kinder, nachdem sie eine Menge ausgezählt haben, die Frage „Wie viele sind es?“ nicht. Sie zählen erneut von 1 an oder beziehen das letzte Zahlwort nur auf dieses Objekt. Denn durch Nachahmung haben Kinder gelernt, auf die Frage nach der Menge das zuletzt genannte Zahlwort zu wiederholen.

### Teil-Teil-Ganzes (Niveaustufe 4)

Ein nächster Entwicklungsschritt besteht in der Einsicht, dass Mengen auf unterschiedliche Weise zerlegt werden können, ohne dass sich an der Mächtigkeit der Gesamtmenge etwas ändert. Bei der Aufgabe  $8 + 5 = ?$  kann die 5 in die Teilmengen 2 und 3 zerlegt werden ( $8 + 2 + 3 = 13$ ). Wichtig ist dabei, dass es hier nicht um die hintereinander zu bewältigenden und zu koordinierenden Rechenschritte geht, sondern

darum, dass effiziente Portionen gesucht werden. Kinder mit Rechenschwierigkeiten können Beziehungen zwischen Additions- und Subtraktionsaufgaben nicht erkennen. Zerlegungen erfolgen mechanisch als Abarbeitung einer Schrittfolge, was kognitiv aufwendig ist und Einsichten in Beziehungen zwischen Mengen versperrt.

### **Modellierung von Additions- und Subtraktionsaufgaben (Niveaustufe 5)**

Auch mathematische Kompetenzen wie das Mathematisieren und Modellieren von Sachaufgaben bereitet rechenschwachen Kindern Probleme. „Textaufgaben“ werden von den meisten Schülern gefürchtet und im Vergleich zu Ziffernaufgaben schlechter bewältigt. Kinder mit Rechenschwierigkeiten haben weniger Probleme, den eigentlichen Text zu verstehen. Ihre Schwierigkeiten setzen dort an, wo es darum geht, den Text mathematisch zu modellieren. Dazu bedarf es zunächst eines angemessenen Situationsverständnisses, das dann in ein mathematisches Modell überführt werden kann.

### **Stellenwertverständnis (Niveaustufe 6)**

Das Verstehen des Stellenwertsystems stellt einen weiteren Bereich dar, in dem rechenschwache Kinder scheitern. Grundlegend für den Aufbau effektiver Rechenstrategien sowie für das Verständnis der Größe von Zahlen als auch für die Durchführung halbschriftlicher und schriftlicher Rechenverfahren ist der sichere Umgang mit dem Stellenwertsystem. Hier wird den Schülern oft eine größere Kenntnis zugeschrieben als tatsächlich vorhanden ist. Der Umgang mit mehrstelligen Zahlen ist den Kindern bereits möglich, wenn sie auf einer mechanischen Ebene die Bildung der „Zehner“ gelernt haben, ohne die Beziehung zwischen Einern und Zehnern und das Bündelungsprinzip zu verstehen. Rechenschwache Kinder können dadurch ihre Verständnisprobleme mittels schriftlicher Rechenverfahren verbergen. Die von ihnen dabei gemachten Fehler werden oft nicht mit fehlendem Stellenwertverständnis in Verbindung gebracht.

## **5.5 Einstufung und Förderungsmöglichkeiten: Beispiel DORT-E und ZBT**

Eine Rechenschwäche wird mit Hilfe von durch Entwicklungspsychologen entwickelter spezieller Rechentests diagnostiziert und der momentane Entwicklungsstand bestimmt. Betroffene Kinder können durch eine individuell abgestimmte Lerntherapie in ihrer mathematischen Entwicklung vorangebracht werden und so eine Verschlimmerung der Probleme verhindert werden. Es gibt zahlreiche Förderprogramme, welche sich niveaulich unterscheiden. Abschließend wird eines dieser Förderprogramme kurz vorgestellt.

Der Dortmunder Rechentest für die Eingangsstufe (DORT-E): Die Zielgruppe des Tests sind sowohl rechenschwache Grundschüler ab dem letzten Drittel der ersten Klasse als auch lernbehinderte Sonderschüler der Lernstufen 2 und 3. Er kann aber auch zur Diagnose bei älteren Kindern verwendet werden. Geeignet sind

der Test und das Training (ZBT) für Kinder, die mindestens bis etwa 15 vorwärts zählen können und diese Zahlen in Wort und Schrift kennen. Die Diagnose und Einordnung der Rechenschwäche erfolgt in den drei Testbereichen: Zähl- und Abzählfertigkeiten, Mengen- und Zahlrelationen und Numerischem Rechnen. Die Aufgaben werden verbal gestellt, sodass Vorgehensweisen und Lösungswege erkennbar sind. Die Antworten werden in einem Protokollbogen festgehalten. Durch regelmäßige Wiederholung des DORT-E können Leistungsveränderungen festgestellt werden, wonach das Training individuell angepasst wird.

Das Dortmunder Zahlbegriffstraining (ZBT): Das Training gliedert sich in acht Übungsstufen (Zähl- und Abzählfertigkeiten trainieren und automatisieren (Stufe 1 bis 5), Mengen- und Zahlrelationen, Mengenoperationen (Stufe 6 und 7), Vertiefung: Anwendung bisheriger Lerninhalte auf numerische Additionsaufgaben (Stufe 8)), wobei die Startstufe mittels des DORT-E bestimmt wird. Die Inhalte des ZBT werden für jeden Teilnehmer/jede Teilnehmerin individuell unter Rücksichtnahme auf den Leistungsstand und die außermathematischen Lernvoraussetzungen festgesetzt. Im Schnitt umfasst der Trainingsplan 19 halbstündige Sitzungen, wobei eine zeitliche Verlängerung oder Verkürzung im Laufe des Trainings immer möglich ist. Nach einem erfolgreichen Abschluss können die Kinder sicher mit dem Zahlenraum bis 20 umgehen, was ihnen die Möglichkeit gibt, an aufbauenden Programmen, beispielsweise zum Stellenwertverständnis, teilzunehmen.

## 5.6 Fazit

Die Ausgangsfrage, ob Dyskalkulie eine angeborene Krankheit ist oder nicht, kann sicherlich noch nicht eindeutig beantwortet werden. Möglicherweise wird durch weiterführende Forschung und das Durchführen umfangreicherer Tests in den nächsten Jahren eine zufriedenstellende Antwort gegeben werden können. Es gibt dazu bereits verschiedene Forschungsansätze und Vermutungen, die aus zeitlichen Gründen hier nicht betrachtet werden konnten. Fest steht aber, dass es zahlreiche Kinder mit teilweise großen Leistungsdefiziten, die genauer bestimmt werden können, im mathematischen Kompetenzbereich gibt. Diese sollten eine Förderung bekommen, da sich die Probleme nachweislich verringern können und Mathematik in unserer heutigen Gesellschaft einen stetig größer werdenden Teil des Lebens einnimmt.

## Literaturverzeichnis

[FR08] FRITZ, ANNEMARIE, GABI RICKEN: *Rechenschwäche*, Ernst Reinhardt Verlag, 2008.

[MS05] MOOG, WOLFGANG, ANDREAS SCHULZ: *Zahlen begreifen*, Beltz Verlag, 2005.

# Markov-Chain-Monte-Carlo- Algorithmen und Maximum-Likelihood-Inferenz: Ein Vergleich auf Basis einer medizinischen Simulationsstudie

RIKO KELTER

## 6.1 Einleitung

Daten und quantitative Informationen sowie die daraus gezogenen Schlüsse haben mehr Einfluss auf unsere heutige Gesellschaft und den Einzelnen als je zuvor. In einer zunehmend digitalisierten Welt, in der Informationen von Algorithmen erzeugt werden, stellt sich verstärkt die Frage, wie diese oft als Fakten hingegenommenen Informationen berechnet und hergeleitet werden. Statistische Inferenz durchzieht dabei fast den vollständigen Kanon der Wissenschaften und findet massive Verwendung unter anderem in der Psychologie, Medizin, Informatik, Physik, Biologie und den empirischen Sozialwissenschaften. Mit dem Ziel, datenbasierte Entscheidungen zu treffen formt und beeinflusst statistische Inferenz dabei all diese Wissenschaftsbereiche in der Weiterentwicklung, dem wissenschaftlichen Erkenntnisprozess und der Art und Weise, wie Ergebnisse dargestellt werden. Andererseits ist diese mathematische Disziplin selbst von einer turbulenten Geschichte von Veränderung und Transformationen innerhalb der letzten 250 Jahre gekennzeichnet, die in der aktuellen Konfrontation zweier Modelle für statistisches Schließen – der Maximum-Likelihood-Inferenz und der Bayes-Inferenz – gipfelt. Die Akzeptanz und Rolle beider Ansätze wird dabei von der historischen



Entwicklung ebenso wie von der Verfügbarkeit leistungsstarker Rechenressourcen sowie der Anwenderperspektive beeinflusst und es stellt sich die Frage, welcher Ansatz normativ präferiert werden sollte und wissenschaftssoziologisch präferiert wird.

## 6.2 Statistische Inferenz als Werkzeug wissenschaftlicher Erkenntnis

### 6.2.1 Aktuelle Situation und Problematik

Eine der wichtigsten Methoden wissenschaftlichen Erkenntnisgewinns ist heutzutage in vielen Wissenschaftsbereichen die statistische Inferenz. Techniken wie der t-Test zum Vergleich zweier Gruppen, Varianzanalysemodelle (ANOVA) für Vergleiche mehrerer Gruppen, Regressionsmodelle, das Testen von Nullhypothesen oder die Verwendung von p-Werten zur Beurteilung der Signifikanz von Ergebnissen sind weit verbreitet, um wissenschaftliche Fragestellungen im Sinne eines statistischen Argumentationsprozesses zu beantworten. Das Ziel ist dabei oft nachzuweisen, dass die durchgeführten Experimente oder Studien *signifikante* Ergebnisse liefern, was im Wissenschaftsjargon meistens als besonders wichtig oder bedeutungsvoll (fehl)interpretiert wird. Trotz des offensichtlichen Nutzens statistischer Inferenz zeichnet sich ein wachsendes Problem in allen Wissenschaftsdomänen ab: Der Missbrauch und die falsche Verwendung inferentiell hergeleiteter Fakten. Die American Statistical Association (ASA) veröffentlichte dazu selbst ein offizielles Statement im März 2016, in dem auf den Missbrauch und die Falschverwendung von p-Werten eingegangen wird [WL16]. Darin betonte die ASA-Präsidentin JESSICA UTTS, dass die gängige wissenschaftliche Praxis, in der p-Werte, die bei vielen Verfahren zur Beurteilung der Signifikanz verwendet werden, zu massiven Problemen hinsichtlich der Glaubwürdigkeit der publizierten Resultate führt:

*The current use] also leads to practices called by such names as p-hacking and data dredging that emphasize the search for small p-values over other statistical and scientific reasoning.* [WL16]

Um weiteren Missbrauch und die manipulative Suche nach signifikanten Ergebnissen zu vermeiden, empfahl die ASA in demselben Statement explizit die Verwendung unterstützender zusätzlicher Methoden bis hin zur vollständigen Ersetzung durch alternative Ansätze:

*[...] emphasize estimation over testing, such as confidence, credibility or prediction intervals; Bayesian methods; alternative measures of evidence, such as likelihood ratios or Bayes Factors; and other approaches such as decision-theoretic modeling and false discovery rates.* [WL16]

### 6.2.2 Maximum-Likelihood-Inferenz und Bayes-Inferenz

Während der dominierende Ansatz in nahezu allen Wissenschaften immer noch der von RONALD FISHER (1890–1962) entwickelten Maximum-Likelihood-Inferenz ent-

spricht, sind die diesem Ansatz zugrunde liegenden Probleme schon lange bekannt und in den letzten Jahren wurden aufgrund der steigenden Zahl an Alternativen – insbesondere der Bayes-Inferenz – die Kritikrufe lauter. Mehrere Arbeiten thematisierten die Probleme des klassischen Maximum-Likelihood-Ansatz [GSR<sup>+</sup>16], der sich auf die weitverbreiteten p-Werte und das Testen von Nullhypothesen stützt. WHITE und GORARD [WG17] diskutierten ausführlich die Probleme von p-Werten, Konfidenzintervallen oder dem Testen von Nullhypothesen.

Im Rahmen der parametrischen statistischen Inferenz wird zuerst der zu untersuchende Sachverhalt mit einem statistischen Modell (oft in Form von Wahrscheinlichkeitsdichten) beschrieben. Dies könnte zum Beispiel die Modellierung der Erfolgswahrscheinlichkeit eines Medikaments mittels einer Bernoullidichte sein. Testet man dieses an  $n$  Patienten, bietet sich entsprechend eine Binomialdichte an. Die je nach Anwendung verwendeten statistischen Modelle enthalten Dichten, welche wiederum den oder die zu schätzenden Parameter  $\theta$  enthalten, etwa die Wahrscheinlichkeit  $p$  in der Binomialdichte, bei gegebenem Stichprobenumfang  $n$  und Daten  $x$ , wobei  $x$  die Anzahl der Patienten ist, bei denen das Medikament gewirkt hat. Diese Aufgabe wird in der parametrischen Statistik auch als *Schätzproblem* bezeichnet und man kann verschiedene Hypothesen  $\theta = \theta_0$  aufstellen, um Parameter innerhalb des Modells zu schätzen. Hierbei bezeichnet  $\Theta$  den Parameterraum, der die möglichen Hypothesen beinhaltet, in diesem Fall  $\Theta = [0, 1]$ . Eines der allgemein anerkannten konzeptionellen Probleme der Maximum-Likelihood-Theorie stellt nun die Tatsache dar, dass diese ausschließlich die bedingte Wahrscheinlichkeit ermitteln kann, die in einer Studie oder einem Experiment ermittelten Daten  $x$  zu erhalten, wenn die Hypothese  $\theta$  gilt:

$$P(x|\theta) = \frac{P(x \cap \theta)}{P(\theta)} \quad (6.1)$$

Im Maximum-Likelihood-Ansatz wird die Wahrscheinlichkeit  $P(x|\theta)$  auch als Likelihood-Funktion  $L(\theta)$  bezeichnet und hinsichtlich  $\theta$  maximiert, so dass der Parameter gewählt wird, unter dem das Auftreten der vorliegenden Daten am plausibelsten erscheint:

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

Durch Differenzieren der Likelihood  $L(\theta)$  erhält man die sogenannte Score-Funktion  $S(\theta)$ . Standard-Calculus dieser führt zu einem Wert  $\hat{\theta}_{ML}$  für den Maximum-Likelihood-Schätzer. Die negative zweite Ableitung von  $L(\theta)$  bezeichnet man als Fisher-Information  $I(\theta)$ . Die mathematische Statistik stellt mehrere Theoreme bereit, die zeigen, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\theta}_{ML}$  für steigenden Stichprobenumfang asymptotische Eigenschaften hat. Unter anderem gilt unter den sogenannten Fisher-Regularitätsbedingungen, dass die folgende *Score-Statistik* bis auf Proportionalitätskonstanten asymptotisch normalverteilt ist:

$$\frac{S(\theta; x)}{\sqrt{I(\theta; x)}} \stackrel{a}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

Nun kann man zu einem gegebenen Wahrscheinlichkeitsmodell die Likelihood bestimmen, die Score-Funktion und die Fisher-Information berechnen, und auf Basis

der vorliegenden Daten  $x$  und einer Hypothese  $\theta = \theta_0$  den Wert der obigen Teststatistik bestimmen. Ist der Wert der Teststatistik unter Annahme der Nullhypothese  $\theta_0$  sehr groß oder sehr klein, treten also die Daten unter Annahme der Hypothese  $\theta = \theta_0$  sehr selten auf (etwa in weniger als 5% der Fälle), so wird die Hypothese verworfen. Der insbesondere in der englischsprachigen Literatur als p-value bekannte Wert gibt hierbei an, wie wahrscheinlich es ist, dasselbe oder ein noch extremeres Resultat (also eine noch größere oder noch kleinere Teststatistik) unter Annahme der Hypothese  $\theta = \theta_0$  zu erhalten. Ist diese Wahrscheinlichkeit, und damit auch der p-value hinreichend klein, so verwirft man die Hypothese  $\theta_0$ .

Das konzeptionelle Problem dahinter ist, dass Forscher eigentlich an der umgekehrten bedingten Wahrscheinlichkeit

$$P(\theta|x) = \frac{P(\theta \cap x)}{P(x)} = \frac{P(x|\theta) \cdot P(\theta)}{P(x)} \quad (6.2)$$

interessiert sind. Man möchte nicht wie in Gleichung (7.1) wissen, wie wahrscheinlich die Nullhypothese (über deren Gültigkeit man a priori noch keine Aussage treffen kann) die erhaltenen Daten prognostiziert. Stattdessen ist von Belang, wie stark die erhaltenen Daten die aufgestellte Nullhypothese untermauern oder widerlegen, so dass man zu einer Entscheidung für oder gegen diese Hypothese gelangt (vgl. Gleichung (7.2)).

Da die bedingten Wahrscheinlichkeiten aus den Gleichungen (7.1) und (7.2) nicht austauschbar sind, besteht in der Praxis die Schwierigkeit bei der Lösung von Gleichung (7.2) darin, dass die Wahrscheinlichkeit im Nenner ein Integral der Form

$$P(x) = \int_0^1 P(x|\theta) \cdot P(\theta) d\theta \quad (6.3)$$

annimmt. Der Rechenaufwand der Integration über alle Wahrscheinlichkeiten  $\theta$  zwischen 0 und 1 wird somit extrem groß. Mit dem Aufkommen der Markov-Chain-Monte-Carlo-Verfahren (MCMC) in der bayesschen Inferenz kann die Berechnung dieses Integrals durch eine Simulation umgangen werden. Die Idee hierbei ist stets, eine hinreichend große Stichprobe aus der Zielverteilung zu ziehen, anstatt diese direkt zu berechnen. Umso größer die Stichprobe, desto zuverlässiger die Simulation. Um sich also die konkrete Berechnung des Integrals im Nenner zu sparen, wird in der Bayes-Inferenz zunächst eine A-priori-Verteilung (vgl. Gleichung (7.2),  $P(\theta)$ ) des zu bestimmenden Parameters definiert. Daneben wird eine zugehörige *likelihood*-Funktion (vgl. Gleichung (7.2),  $P(x|\theta)$ ) bestimmt und durch eine MCMC-Simulation anschließend genügend Stichprobenwerte aus der gesuchten posteriori-Verteilung  $P(\theta|x)$  simuliert, so dass die konkrete Berechnung des Integrals  $P(x)$  (vgl. Gleichung (7.3)) vermieden wird.

### 6.2.3 Vergleich der Inferenzsysteme am Beispiel einer medizinischen Simulationsstudie

Im Folgenden sollen beide Inferenzsysteme am Beispiel einer simplen medizinischen Simulationsstudie verglichen werden. Sei dazu ein Experiment gegeben, in dem ein



Medikament an 100 Patienten getestet wird. Gesucht ist die Heilungsrate  $\theta$ , die nur durch die Studie mit Patienten ermittelt werden kann. Nach Auswertung der Studie wurden  $x = 73$  der  $n = 100$  Patienten geheilt. Die statistische Modellierung erfolgt mittels Binomialdichte mit den Parametern  $n = 100$  und  $x = 73$ . Die Plausibilität der Hypothese  $\theta = 0.5$  soll geprüft werden, wobei  $\theta \in [0, 1]$ . Praktisch heißt das, die Hypothese einer 50:50-Chance auf Heilung durch Anwendung des Medikaments wird getestet. Diese Modellierung ist in der Epidemiologie durchaus realistisch, wenngleich auch verfeinere Modelle abhängig vom Studiendesign existieren.

### Lösung mit Maximum-Likelihood-Theorie

Der ML-Ansatz verwendet die Likelihood-Funktion des Modells:

$$L(\theta) = f(x|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

Wegen der Monotonie des Logarithmus kann an Stelle der Likelihood auch die log-Likelihood zur Berechnung der Score-Funktion verwendet werden:

$$\log L(\theta) = \log \binom{n}{x} + x \log(\theta) + (n - x) \log(1 - \theta)$$

Ableiten dieser Funktion nach  $\theta$  liefert:

$$\tilde{S}(\theta) = \frac{x}{\theta} - \frac{n - x}{1 - \theta}$$

Hierbei bezeichnet  $\tilde{S}(\theta)$  die durch Differenziation der Log-Likelihood erhaltene Score-Funktion. Durch Nullsetzen erhält man den ML-Schätzer  $\hat{\theta}_{ML} = x/n = 73/100 = 0.73$ . Hier zeigt sich bereits, dass 0.5 nicht der plausibelste Wert für die Heilungswahrscheinlichkeit ist.

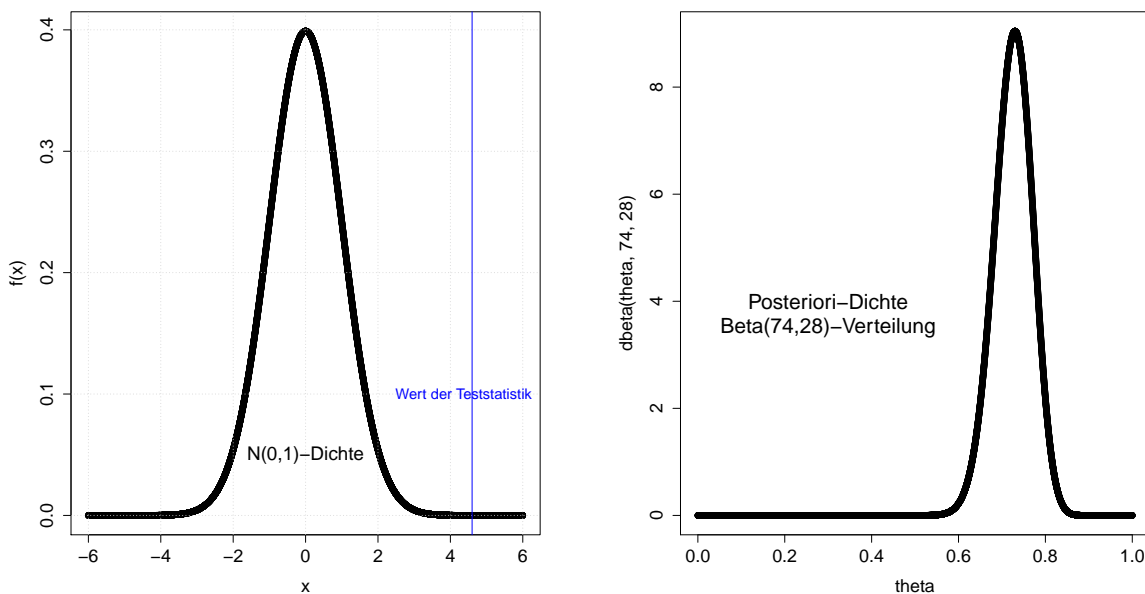
Für die Berechnung der Teststatistik benötigt man noch  $\tilde{I}(\theta)$ , welches sich durch nochmaliges Ableiten und Multiplikation mit -1 ergibt zu

$$\tilde{I}(\theta) = \frac{x}{\theta^2} + \frac{n - x}{(1 - \theta)^2}$$

$\tilde{I}(\theta)$  bezeichnet die negative, durch zweimaliges Differenzieren der Log-Likelihood erhaltene Fisher-Information. Einsetzen von  $x = 73$ ,  $n = 100$  und der Nullhypothese  $\theta = 0.5$  liefert nun die Teststatistik

$$\frac{\tilde{S}(\theta; x)}{\sqrt{\tilde{I}(\theta; x)}} = \frac{\tilde{S}(\theta = 0.5; x = 73)}{\sqrt{\tilde{I}(\theta = 0.5; x = 73)}} = \frac{\frac{73}{0.5} - \frac{100-73}{1-0.5}}{\left(\frac{73}{0.5^2} + \frac{100-73}{(1-0.5)^2}\right)^{0.5}} = 4.6$$

Abbildung 6.1a zeigt die Verteilung der Score-Statistik unter Annahme der Nullhypothese  $\theta = 0.5$ . Anhand der Abbildung ist leicht zu erkennen, dass die Teststatistik unter Annahme der Nullhypothese  $\theta = 0.5$  am häufigsten Werte nahe der 0 liefert, und eher selten große oder kleine Werte. Der entsprechende aus den Daten  $x$  berechnete Wert 4.6 für die Medikamentenstudie ist als blaue Linie eingetragen. Der



(a) Score-Statistik der Medikamentenstudie      (b) Beta(74,28)-Posterior der Medikamentenstudie für einen Beta(1,1)-Prior

Abbildung 6.1: Score-Statistik der Likelihood-Inferenz und Beta-Posterior der Bayes-Inferenz

Wert ist so groß, dass er unter Annahme der Nullhypothese  $\theta = 0.5$  aufgrund der normalverteilten Score-Statistik nur sehr selten auftreten würde. Konkret ist der p-value die Wahrscheinlichkeit, ein Ergebnis von  $x$  gleich oder größer als 4.6 zu erhalten und entspricht 0.0000021. Üblicherweise verwirft man die Hypothese bereits, sobald dieser p-value kleiner als 0.05 ist, also ein identisches oder noch extremeres Ergebnis in maximal 5% der Fälle unter Annahme der Nullhypothese auftreten würde. Der ML-Ansatz verwirft also die Hypothese  $\theta = 0.5$ . Damit weiß man lediglich, dass diese Hypothese unplausibel unter Vorliegen der Daten  $x$  ist. Eine Hypothese kann im ML-Ansatz nur verworfen werden.

### Lösung mittels exakter Bayes-Inferenz

Die Bayes-Inferenz setzt zunächst das Festlegen einer A-priori-Verteilung voraus. Die Likelihood-Funktion wird hier wie oben als Binomialverteilung auf Basis des statistischen Modells gewählt, so dass sich folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned}
 P(\theta|x) &= \frac{\overbrace{P(x|\theta)}^{\text{Likelihood}} \cdot \overbrace{P(\theta)}^{\text{Prior-Verteilung}}}{\underbrace{P(x)}_{\text{Normalisierungskonstante}}} = \frac{P(x|\theta) \cdot P(\theta)}{\int_0^1 P(D|\theta) \cdot P(\theta) d\theta} \propto P(x|\theta) \cdot P(\theta) \\
 &= \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x} \cdot P(\theta)
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

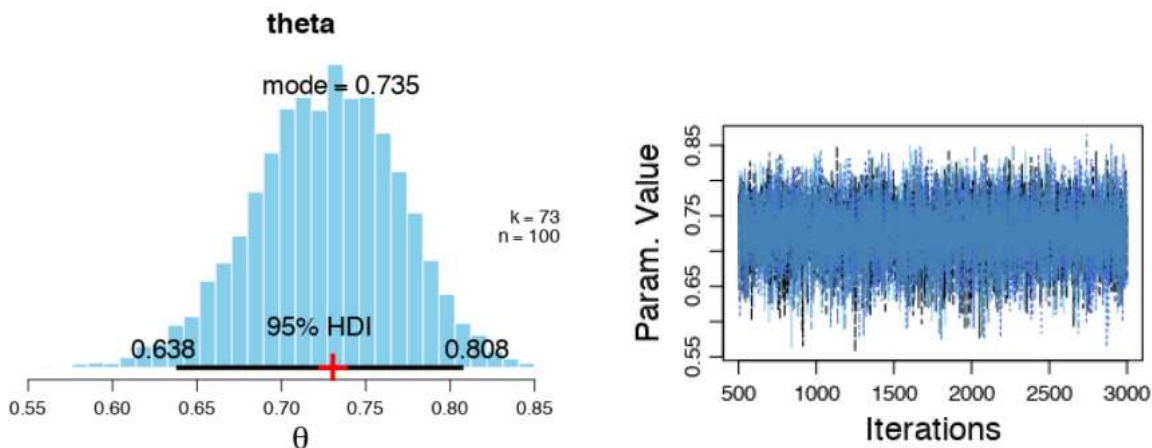
Als Prior-Verteilung konnten ohne leistungsfähige Rechner nur sogenannten konjugierte Verteilungen gewählt werden, sodass man die A-posteriori-Verteilung  $P(\theta|x)$  analytisch bestimmen konnte. Oft verwendet man bei einer Binomiallikelihood daher die Beta-Verteilung als A-priori-Verteilung  $P(\theta)$ , etwa eine Beta(1,1)-Verteilung, die jedem Parameter  $\theta$  zwischen 0 und 1 dieselbe Wahrscheinlichkeit zuweist (also nichtinformativ ist). Es lässt sich zeigen, dass die A-posteriori-Verteilung dann einer Beta(1+x,1+n-x)-Verteilung entspricht, im Fall der Medikamentenstudie also einer Beta(74,28)-Verteilung (vgl. Abbildung 6.1b).

In den meisten Fällen ist eine analytische Berechnung der A-posteriori-Verteilung jedoch nicht möglich. Eine numerische Approximation ist in hochdimensionalen Datensätzen enorm ineffizient, da die Berechnung des Integrals im Nenner von Gleichung (6.4) mit steigender Dimension des Parameter  $\theta$  immer aufwändiger wird.

### Lösung mittels MCMC-Simulation

Die Markov-Chain-Monte-Carlo-Verfahren (MCMC) sind eine Klasse von Algorithmen, mittels denen Stichproben aus Verteilungen gezogen werden können, deren Dichte bis auf eine Proportionalitätskonstante (diese entspricht dem schwer zu berechnenden Nennerintegral in (6.4)) bekannt sein muss. Auf Basis der Konstruktion einer Markov-Kette, welche die gewünschte Verteilung als stationäre Verteilung aufweist, werden so Stichproben aus der Wunschverteilung gezogen. Konkret entspricht das der Konstruktion einer Markov-Kette, die  $P(x|\theta) \cdot P(\theta)$  als stationäre Verteilung aufweist. Anschließend lässt man die Markov-Kette  $n$  Schritte „laufen“, und erhält eine Stichprobe der stationären Verteilung. Mit zunehmendem  $n$  konvergiert diese Stichprobe gegen die gewünschte Verteilung. Der Metropolisalgorithmus gehört zu den bekanntesten MCMC-Algorithmen und erzeugt Zufallsbewegungen für  $\theta$ , die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit akzeptiert oder zurückgewiesen werden. Dadurch lassen sich beliebige durch Prior-Verteilung und Likelihood festgelegte Posterior-Verteilungen simulieren. Das Simulationsergebnis entspricht bis auf eine Proportionalitätskonstante der wahren Posterior-Verteilung.

Abbildung 6.2a zeigt das Ergebnis einer Simulation mit 4 Markovketten, die je 2500 Simulationsschritte durchlaufen haben für die Medikamentenstudie mit einer Binomial-Likelihood mit  $n = 100$  und  $k = 73$ . Als Prior wurde wie oben auch eine Beta(1,1)-Verteilung verwendet. Abbildung 6.2b zeigt die 2500 gewählten Parameterwerte der Zufallsbewegungen im MCMC-Algorithmus. Addiert man die Häufigkeit der einzelnen Parameterwerte (etwa für  $\theta = 0.65$ ) in Abbildung 6.2b auf, ergibt sich die Verteilungstichprobe in Abbildung 6.2a. Man sieht, dass die simulierten Ergebnisse erstaunlich gut mit den analytischen Ergebnissen aus Abbildung 6.1b übereinstimmen. Auch die MCMC-Simulation spricht gegen  $\theta = 0.5$ , zeigt aber wie auch der analytische Bayes-Ansatz, dass Werte von  $\theta = 0.65$  noch durchaus plausibel sind. Die MCMC-Simulation bietet hier gegenüber dem ML-Ansatz und dem analytischen Bayes-Ansatz zwei entscheidende Vorteile: In Fällen, in denen die Likelihood-Funktion analytisch oder numerisch nur schwierig maximiert werden kann, kann keine Teststatistik berechnet werden. In vielen realen Anwendungsfällen lässt sich keine konjugierte A-priori-Verteilung finden, sodass die Posterior-Verteilung unbekannt ist. In beiden Fällen ist die MCMC-Simulation



(a) MCMC-Posterior-Verteilung für die Medikamentenstudie

(b) Werte des Parameter  $\theta$

Abbildung 6.2: MCMC-Simulation für die Medikamentenstudie; Quelle: Eigene Simulation in R mit dem MCMC-Sampler Jags

fähig, Lösungen zu finden:

- Im ersten Fall, indem zur beliebig komplexen Likelihood eine nichtinformative A-priori-Verteilung gewählt wird und der Algorithmus eine Markovkette konstruiert, die die stationäre Verteilung des Produktes von Likelihood und Prior hat.
- Im zweiten Fall wie oben im Beispiel der Medikamentenstudie beschrieben.

Das Beispiel zeigt, wie gut die MCMC-Simulation sich mit der analytischen Lösung deckt. Die vergleichsweise geringen Nachteile der MCMC-Algorithmen sind die Rechenintensität und Probleme mit Autokorrelation der Parameter aufgrund der Verwendung von Markovketten. In den letzten Jahren ist daher ein steigender Trend zu beobachten, der den bayesschen Ansatz propagiert [AB13].

ANDREWS und BAGULEY [AB13] analysierten den wachsenden Trend in der Bayesianen Statistik über einen längeren Zeitraum und stellten fest, dass die Thematik mittlerweile etwa 20% der veröffentlichten Publikationen im Bereich Statistik ausmacht. Sie betonen weiter:

*Despite their growing appeal, however, there remains a troubling lack of clarity about what exactly Bayesian methods do and do not entail and about how they differ from their so-called classical counterparts.* [AB13, S. 2]

ANDREWS und BAGULEY weisen darauf hin, dass der konzeptionelle Streit zwischen bayes'scher und frequentistischer Statistik insbesondere historisch bedingt ist, da die nötigen Rechenressourcen für die Bayes-Inferenz fehlten:

*[...] the bayesian versus frequentist account begins to seem like historical baggage that has yet to be replaced by an account more in keeping with how Bayesian methods have evolved and are presently being used.* [AB13]

### 6.3 Zusammenfassung

ML- und Bayes-Inferenz sind ein gutes Beispiel, welches zeigt, dass Mathematik als Wissenschaft auch heute noch vor vielen offenen Problemen steht, die die Gesellschaft und den Einzelnen beeinflussen. Beide konkurrierenden Inferenzmodelle haben Stärken und Schwächen. Der ML-Ansatz ist konzeptionell problematisch, da er nur Hypothesen verwerfen kann und die falsche bedingte Wahrscheinlichkeit berechnet. Bayes-Inferenz kann mehrere Hypothesen komparativ bewerten und liefert mehr Informationen wie etwa das sogenannte Highest-Density-Intervall (HDI) in Abbildung 6.2a, welches angibt, in welchem Intervall sich der wahre Parameter  $\theta$  mit 95% Wahrscheinlichkeit befindet. Dafür ist der ML-Ansatz leichter zu berechnen, verlässt sich dafür jedoch stark auf zentrale Grenzwerttheoreme und asymptotische Eigenschaften, Anforderungen, die gerade in kleinen Studien prekär werden. Die Bayes-Inferenz mittels MCMC-Simulationen hingegen beruht auf der Theorie von Markovketten und hier treten Schwierigkeiten hinsichtlich der Konvergenz und Autokorrelation auf, die bis heute Thema aktueller Forschung sind. Ebenfalls kann dem Bayes-Ansatz Subjektivität bei der Wahl der A-priori-Verteilung vorgeworfen werden, die die Posterior-Verteilung massiv beeinflussen kann. Dennoch existieren nichtinformativ Priors, und die Wahl eines geeigneten Priors ermöglicht es zudem, vorhandene Resultate aus bereits durchgeführten Studien oder Experimenten mit in die Analyse in Form eines modifizierten Priors einfließen zu lassen. Durch die steigende Verfügbarkeit von Rechenressourcen und die Bedeutung der Bayes-Inferenz etwa im Bereich des maschinellen Lernens, neuronaler Netze oder auch künstlicher Intelligenz hat diese einen starken Aufschwung erlebt und wird wohl auch in Zukunft an Bedeutung gewinnen.

### Literaturverzeichnis

- [AB13] ANDREWS, MARK und THOM BAGULEY: *Prior approval: The growth of Bayesian methods in psychology*. British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, **66**(1):1–7, 2013.
- [GSR<sup>+</sup>16] GREENLAND, SANDER, STEPHEN J. SENN, KENNETH J. ROTHMAN, JOHN B. CARLIN, CHARLES POOLE, STEVEN N. GOODMAN und DOUGLAS G. ALTMAN: *Statistical tests, P values, confidence intervals, and power: a guide to misinterpretations*. European Journal of Epidemiology, **31**(4):337–350, 2016.
- [WG17] WHITE, PATRICK und STEPHEN GORARD: *Against inferential statistics: how and why current statistics teaching gets it wrong*. 2017.
- [WL16] WASSERSTEIN, RONALD L. und NICOLE A. LAZAR: *The ASA's Statement on p-Values: Context, Process, and Purpose*. The American Statistician, **70**(2):129–133, apr 2016.



# Mit Münchhausen nach Karlsruhe

## (von den Schwierigkeiten, das Volk zu zählen)

HANS KIESL

### 7.1 Einleitung

Mathematiker und Statistiker treffen sich eher selten vor Gericht. Am 24. Oktober 2017 war es anders: vor dem zweiten Senat des Bundesverfassungsgerichts saßen sich Statistiker als Sachverständige auf verschiedenen Bänken im Rahmen einer mündlichen Verhandlung gegenüber. Der sogenannte „Zensus 2011“, der Nachfolger der traditionellen Volkszählungen, hatte zu einem Methodenstreit zwischen Städtestatistikern und dem Statistischen Bundesamt geführt. Zahlreiche Kommunen zogen vor Verwaltungsgerichte, die Verfahren eskalierten zur schließlichen Klage der Senate von Berlin und Hamburg vor dem Bundesverfassungsgericht in Karlsruhe; die Verfassungsmäßigkeit der Gesetzgebung des Zensus 2011 wurde in Frage gestellt.



ANDREAS VOSSKUHLE, der Präsident des Bundesverfassungsgerichts, rückte in der Verhandlung die Statistiker in die Nähe des Lügenbarons Münchhausen:

*„Man hat ein bisschen den Eindruck einer Münchhausen-Konstruktion,“ sagte Andreas Voßkuhle. „Sie erheben Daten und vergleichen sie miteinander. Es gibt aber keinen externen Maßstab, sondern die Daten werden am Maßstab dessen gemessen, was man selbst erhoben hat. Versuchen Sie nicht, sich am eigenen Schopf aus dem Sumpf zu ziehen?“*

(zitiert nach [Bub17])

Was hat der Zensus mit einer Münchhausen-Konstruktion zu tun? Warum führt eine statistische Erhebung zu einer Normenkontrollklage vor dem Bundesverfassungsgericht? Lesen Juristen und Mathematiker Gesetzestexte auf verschiedene Arten? Diesen

Fragen wollen wir in diesem Beitrag nachgehen. Dazu betrachten wir in Abschnitt 7.2 die Geschichte der Volkszählungen in Deutschland, in der schon einmal Urteile des Bundesverfassungsgerichts eine wichtige Rolle spielten und die ein Verständnis wichtiger Aspekte der heutigen Gesetzgebung erst möglich macht. In Abschnitt 7.3 beschreiben wir die statistisch relevanten Teile der Gesetzgebung für den Zensus 2011 und diskutieren einige ausgewählte Ergebnisse. Warum der Vergleich mit Baron Münchhausen doch eher unangebracht ist, zeigen wir in Abschnitt 7.4, nachdem dort die mathematische Methodik hinter dem Zensus 2011 diskutiert wurde. Im letzten Abschnitt 7.5 beschreiben wir kurz das Urteil des Bundesverfassungsgerichts und richten den Blick in die Zukunft.

## 7.2 Volkszählungen in Deutschland

### 7.2.1 Situation vor 1983

Bereits aus dem Altertum sind uns sogenannte Volkszählungen überliefert, mit denen die jeweiligen Herrscher einen Überblick über Zahl und Zusammensetzung der im Herrschaftsgebiet lebenden Menschen gewinnen wollten. Hauptsächlich hatte dies militärische und finanzielle Gründe: Armeen mussten mit jungen Männern aufgefüllt, Steuern mussten von möglichst vielen Menschen bezahlt werden, und eine wesentliche Voraussetzung für die Durchsetzung der herrschaftlichen Ansprüche war eine weitestgehend lückenlose Erfassung des Volkes.

In der Neuzeit werden in Volkszählungen neben der Anzahl der vorhandenen Personen üblicherweise zusätzliche Informationen erhoben, die für verwaltungsrechtliches und politisches Handeln relevant sind, etwa Alters-, Bildungs- und Erwerbsstruktur der Bevölkerung. Seit der Gründung des Deutschen Kaiserreichs 1871 fanden auf seinem Gebiet etwa alle fünf Jahre Volkszählungen statt; diese Tradition wurde in der Weimarer Republik und unter der sich anschließenden Herrschaft der Nationalsozialisten fortgeführt. Bei der Volkszählung 1939 waren alle Bürger verpflichtet, zusätzlich zum üblichen Fragebogen eine sogenannte Ergänzungskarte auszufüllen, auf der (neben Namen, Geburtsdatum und Hochschulabschluss) einzutragen war, ob „einer der vier Großelternteile der Rasse nach Volljude“<sup>1</sup> war. Bis heute ist nicht vollständig geklärt, ob und wie die Informationen dieser Ergänzungskarten bei der Vorbereitung der Deportation von Menschen jüdischer Abstammung (im Sinne der Nürnberger Rassengesetze) verwendet wurden [AR84, Wie01], sicher ist jedoch, dass die Angaben den polizeilichen Meldestellen zur Verfügung gestellt wurden (wenn auch mit erheblicher zeitlicher Verzögerung). Es handelte sich somit mindestens um den Bruch des Statistikgeheimnisses, das es nicht erlaubt, Einzelangaben aus staatlich angeordneten statistischen Erhebungen an Personen oder Behörden außerhalb der statistischen Ämter weiterzugeben.

Auch nach dem Krieg fanden in der Bundesrepublik Deutschland (wie auch in der DDR) regelmäßig Volkszählungen statt, die ziemlich geräuschlos, d. h. ohne größeren Widerstand oder Proteste unter der Bevölkerung, durchgeführt wurden. Das änderte

---

<sup>1</sup>So lautete die Formulierung auf den amtlichen Vordrucken. Der größte Teil der gesammelten Ergänzungskarten hat den Krieg überlebt und befindet sich heute im Besitz des Bundesarchivs.



sich aber mit der für 1983 geplanten Volkszählung.

### 7.2.2 Die geplante Volkszählung von 1983

Das „Gesetz über eine Volks-, Berufs-, Wohnungs- und Arbeitsstättenzählung (Volkszählungsgesetz 1983)“ bestimmte die Volkszählung (wie stets in der Vergangenheit) als vollständige Erhebung aller Bürgerinnen und Bürger und definierte in §2 den umfangreichen, gegenüber der vorherigen Volkszählung erweiterten Fragenkatalog. Entscheidende Sätze werden in §9 formuliert:

Angaben der Volkszählung nach §2 Nr. 1 und 2 können mit den Melderegistern verglichen und zu deren Berichtigung verwendet werden. Aus diesen Maßnahmen gewonnene Erkenntnisse dürfen nicht zu Maßnahmen gegen den einzelnen Auskunftspflichtigen verwendet werden.

Als Begründung für diesen geplanten Melderegisterabgleich wurde eine vermutete Untererfassung der Register angegeben, d. h. die mögliche Existenz von Bürgern, die sich (aus welchen Gründen auch immer) nicht im zuständigen Einwohnermeldeamt registrieren ließen. Eine Vollerhebung im Rahmen der Volkszählung könnte diese Untererfassungen aufdecken und korrigieren helfen.

In weiten Teilen der Bevölkerung formierte sich großer Widerstand gegen die geplante Zählung. Bürgerinitiativen riefen zum Boykott auf, mehrere Klagen landeten vor dem Bundesverfassungsgericht. Die Empörung richtete sich zum einen gegen den umfangreichen, mit Auskunftspflicht versehenen Fragebogen, zum anderen gegen den in §9 vorgesehenen Melderegisterabgleich; Begriffe wie „gläserner Bürger“ und „Überwachungsstaat“ wurden in der Diskussion verwendet. Man muss aus heutiger Sicht konstatieren, dass die Menge der zu erhebenden Informationen gegenüber früheren Volkszählungen zwar vergrößert wurde, sich aber inhaltlich nicht entscheidend von anderen Erhebungen unterschied. Vielmehr lässt sich der Protest zum großen Teil mit einem seit einigen Jahren ohnehin aufgeladenen gesellschaftlichen Klima erklären (jüngere Menschen können dazu im Internet z. B. nach den Begriffen „Nato-Doppelbeschluss“, „Startbahn West“ oder „Anti-AKW-Bewegung“ suchen). Anders verhält es sich mit dem Widerstand gegen den neu ins Gesetz genommenen Melderegisterabgleich; hier wurde von Politikwissenschaftlern der Bogen zu 1939 geschlagen und daran erinnert, dass damals Informationen aus den Ergänzungskarten schließlich doch für nicht-statistische Zwecke verwendet wurden.

Am 13.4.1983 erließ das Bundesverfassungsgericht eine einstweilige Anordnung gegen das Volkszählungsgesetz; bis zu einem endgültigen Urteil mussten die Planungen für die Volkszählung daher gestoppt werden.

### 7.2.3 Das Volkszählungsurteil von 1983 und seine Folgen

Am 15.12.1983 verkündete das Bundesverfassungsgericht sein Urteil [BVe83]. Es lohnt sich, wichtige Sätze daraus im Wortlaut zu studieren, weil sie über das Thema Volkszählungen hinaus wegweisend für die Rechtsprechung in Bezug auf den Schutz persönlicher Daten sind.

1. Unter den Bedingungen der modernen Datenverarbeitung wird der Schutz des Einzelnen gegen unbegrenzte Erhebung, Speicherung, Verwendung und Weitergabe seiner persönlichen Daten von dem allgemeinen Persönlichkeitsrecht des Art. 2 Abs. 1 GG in Verbindung mit Art. 1 Abs. 1 GG umfaßt. Das Grundrecht gewährleistet insoweit die Befugnis des Einzelnen, grundsätzlich selbst über die Preisgabe und Verwendung seiner persönlichen Daten zu bestimmen.

Hier wurde festgehalten, dass persönliche Daten unter das allgemeine Persönlichkeitsrecht fallen und daher schutzwürdig sind. Dem Datenschutz wird hier zum ersten Mal Grundrechtcharakter zugesprochen.

2. Einschränkungen dieses Rechts auf „informationelle Selbstbestimmung“ sind nur im überwiegenden Allgemeininteresse zulässig. Sie bedürfen einer verfassungsgemäßen gesetzlichen Grundlage, die dem rechtsstaatlichen Gebot der Normenklarheit entsprechen muß. Bei seinen Regelungen hat der Gesetzgeber ferner den Grundsatz der Verhältnismäßigkeit zu beachten. Auch hat er organisatorische und verfahrensrechtliche Vorkehrungen zu treffen, welche der Gefahr einer Verletzung des Persönlichkeitsrechts entgegenwirken.

Der Begriff der „informationellen Selbstbestimmung“ war bereits in Juristenkreisen in Gebrauch, mit diesem Urteil gelangte er in die Alltagssprache.

4. Das Erhebungsprogramm des Volkszählungsgesetzes 1983 (§2 Nr. 1 bis 7, §§3 bis 5) führt nicht zu einer mit der Würde des Menschen unvereinbaren Registrierung und Katalogisierung der Persönlichkeit; es entspricht auch den Geboten der Normenklarheit und der Verhältnismäßigkeit. Indessen bedarf es zur Sicherung des Rechts auf informationelle Selbstbestimmung ergänzender verfahrensrechtlicher Vorkehrungen für Durchführung und Organisation der Datenerhebung.

Das Bundesverfassungsgericht kam somit zu der Auffassung, dass der Fragenkatalog der geplanten Volkszählung mit der Verfassung vereinbar war. In diesem Punkt konnten sich die Kläger nicht durchsetzen.

5. Die in §9 Abs. 1 bis 3 VoZählG 1983 vorgesehenen Übermittlungsregelungen (unter anderem Melderegisterabgleich) verstoßen gegen das allgemeine Persönlichkeitsrecht. [...]

Das war ein entscheidender Satz im Urteil: Ein Melderegisterabgleich ist nicht mit der Verfassung vereinbar. Dieses „Rückspielverbot“ hat bis heute reichende Folgen. Es ist nicht erlaubt, Informationen der Volkszählung zu verwenden, um die Melderegister zu korrigieren.

Obwohl vom Gericht in seinem Urteil keine verfassungsrechtlichen Bedenken gegen den Fragenkatalog geäußert wurden, dauerte es noch bis 1987, ehe die Volkszählung (mit einem neuen Volkszählungsgesetz ohne Registerabgleich) trotz neuerlicher Proteste und mit geschätzten Gesamtkosten von 630 Mio. DM tatsächlich durchgeführt wurde.

### 7.3 Der Zensus 2011

Langfristig sollen (auch aufgrund von Vorschriften der Europäischen Union) in Deutschland (wie in vielen anderen Ländern) alle zehn Jahre Volkszählungen stattfinden. Wegen der Verzögerung der ursprünglich für 1981 geplanten Volkszählung kam eine erneute Erhebung Anfang der 1990er Jahre nicht in Betracht, stattdessen plante man zunächst eine neue Volkszählung für den Beginn des neuen Jahrtausends. Im Zuge der zur Vorbereitung nötigen Beratungen in den Parlamenten des Bundes und der Länder kam man aber zu der Auffassung, dass eine Vollerhebung wegen der zu erwartenden Kosten und des neuerlich zu erwartenden Widerstands in der Bevölkerung nicht mehr möglich sein würde, eine durchaus historische Entscheidung.

Als Alternative entstand der Plan, eine Totalerhebung durch eine Stichprobenerhebung zu ersetzen. Ergänzend sollten die Informationen in den Melderegistern verwendet werden, obwohl man natürlich wusste, dass Melderegister nicht vollständig korrekt waren und Karteileichen (gemeldete Personen, die tatsächlich bereits verzogen oder verstorben sind) und Fehlbestände (Personen, die sich bei der Gemeinde, in der sie wohnen, [noch] nicht angemeldet haben) aufwiesen. Nebenbei wurde auch entschieden, von staatlicher Seite von dem Wort „Volkszählung“ abzurücken und in Zukunft das Fremdwort „Zensus“ zu bevorzugen (obwohl inhaltlich bedeutungsgleich, kommt ein Zensus, also wörtlich eine „Schätzung“, harmloser daher als eine (scheinbar lückenlose) „Zählung“).

Um die Qualität der Melderegister zu überprüfen und gleichzeitig die Durchführbarkeit einer Stichprobenerhebung zu testen, wurde 2001 der sogenannte Zensustest durchgeführt. Dabei wurden rund 38000 Adressen in 555 Gemeinden unterschiedlicher Größe für eine Haushaltebefragung auf Stichprobenbasis ausgewählt, um die Qualität der Melderegister zu testen. Für jede Adresse wurde die Zahl der in den Melderegistern geführten Personen ermittelt, und anschließend versuchte ein Interviewer, vor Ort die Zahl der tatsächlich dort lebenden Personen zu ermitteln.

Als wichtigste Erkenntnis aus dieser Testerhebung ergab sich, dass die Melderegister grundsätzlich sehr nahe an der Wirklichkeit waren. Allerdings gab es eine leichte Übererfassung in den Registern, bei der vor allem Ausländer betroffen waren (also mutmaßlich Personen, die [evtl. wieder] ihren hauptsächlichen Wohnsitz ins Ausland verlegt hatten, ohne sich in Deutschland abzumelden). Prozentual war diese Übererfassung in großen Städten größer als in kleinen; in sehr kleinen Gemeinden war die festgestellte Übererfassung meist vernachlässigbar (zu weiteren Ergebnissen siehe [Sta04]).

Nach längeren Beratungen entstand schließlich ein Plan für einen registergestützten Zensus im Jahre 2011. Der Zielkonflikt zwischen möglichst hoher Genauigkeit (wofür der Stichprobenumfang groß sein müsste) und möglichst niedrigen Kosten (wofür der Stichprobenumfang klein sein sollte) wurde mit dem folgenden Kompromiss gelöst. In Gemeinden mit weniger als 10000 Einwohnern (laut Melderegister) sollte keine stichprobenmäßige Haushaltebefragung durchgeführt werden (weil der Zensustest für kleine Gemeinden nur geringe Fehler in den Registern vermuten ließ); stattdessen sollten dort Einzelfallprüfungen zur Korrektur von auffälligen Registereinträgen vorgenommen werden. In Gemeinden ab 10000 Einwohnern (laut Melderegister) sollten bis zu 10% aller Haushalte in eine Stichprobe gelangen, auf

deren Basis die Einwohnerzahlen in den einzelnen Gemeinden geschätzt würden. Weil es sich nicht um Vollerhebungen handelte, musste mit einem Schätzfehler gerechnet werden; man einigte sich auf einen tolerierbaren Schätzfehler von 0,5%.

Diese Überlegungen wurden im „Gesetz über den registergestützten Zensus im Jahre 2011 (Zensusgesetz)“ festgeschrieben (das natürlich auch vom Bundesrat, also von den Ländern, beschlossen wurde):

#### §7 Haushaltebefragung auf Stichprobenbasis

(1) Die statistischen Ämter der Länder führen zum Berichtszeitpunkt eine Haushaltebefragung auf Stichprobenbasis (Haushaltsstichprobe) durch. Die Erhebung dient:

1. in Gemeinden mit mindestens 10000 Einwohnern [...] der Feststellung, ob Personen, die im Melderegister verzeichnet sind, an der angegebenen Anschrift wohnen oder ob an einer Wohnanschrift Personen wohnen, die nicht im Melderegister verzeichnet sind, und damit der Ermittlung der amtlichen Einwohnerzahl mit einer angestrebten Genauigkeit eines einfachen relativen Standardfehlers von höchstens 0,5 Prozent, [...]

(2) Der auf Grund der Qualitätsvorgaben des Absatzes 1 Satz 2 erforderliche Stichprobenumfang soll 10 Prozent der Bevölkerung nicht überschreiten. [...]

Der Zensus 2011, die erste Volkszählung auf dem Gebiet der alten BRD seit 1987 und sogar die erste Zählung seit 1981 auf dem Gebiet der früheren DDR, konnte wie geplant durchgeführt werden. Abgesehen von gewissen Ausnahmen (Gemeinschaftsunterkünfte wie z. B. Pflegeheime wurden vollständig erfasst) wurden in allen Gemeinden mit mindestens 10000 Einwohnern rund 10% der Bevölkerung persönlich aufgesucht und erfasst.

Wie aufgrund des Zensustests von 2001 vermutet, korrigierte das Statistische Bundesamt aufgrund der Ergebnisse des registergestützten Zensus die Einwohnerzahlen der meisten Städte und Gemeinde nach unten (vgl. Abbildung 7.1). Großstädte mussten zum Teil enorme Einwohnerverluste hinnehmen, Berlin z. B. hatte auf dem Papier von einem Tag zum anderen 180000 Einwohner verloren. Die geringsten Veränderungen hatten (auch wenig überraschend) die kleinen Gemeinden mit weniger als 10000 Einwohnern zu verzeichnen. Die Gesamtbevölkerungszahl in Deutschland wurde um rund 1,5 Mio. auf 80,2 Mio. vermindert.

In vielen Statistik-Ämtern vor allem der großen Städte sorgten die Ergebnisse für Ärger und Unmut. Wegen des Länder- und kommunalen Finanzausgleichs in Deutschland ist jeder Einwohner bares Geld für eine Stadt oder Gemeinde wert; plötzlich verringerte Einwohnerzahlen bedeuten also in der Regel geringere Finanzzuweisungen oder im Einzelfall sogar Rückzahlungsverpflichtungen. Die Städtestatistiker zweifelten die für sie ungewohnte und scheinbar komplizierte Stichprobenmethodik an.

Das Volkszählungsurteil von 1983 hatte einen Abgleich von Volkszählungsergebnissen mit den Melderegistern ausgeschlossen, und an diese Rechtsprechung mussten sich die Statistischen Ämter der Länder natürlich auch 2011 halten. Den Kommunen

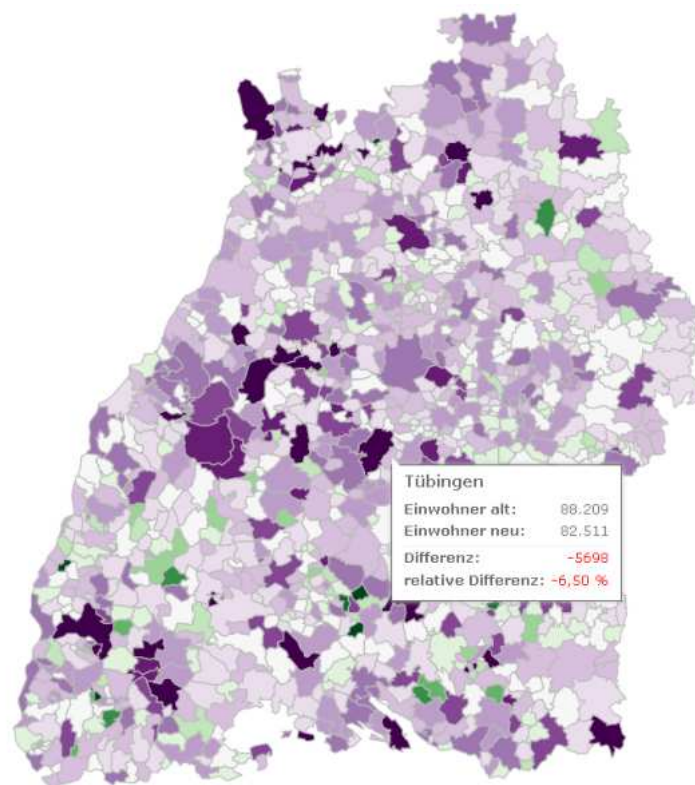


Abbildung 7.1: Korrektur der Einwohnerzahlen nach dem Zensus 2011 am Beispiel von Tübingen und den anderen Gemeinden Baden-Württembergs. Grün markierte Gemeinden haben Einwohner gewonnen, violett markierte Gemeinden haben Einwohner verloren.

Quelle: [http://www.spiegel.de/static/happ/politik/2013/bevoelkerung\\_gemeinden/v2/pub/](http://www.spiegel.de/static/happ/politik/2013/bevoelkerung_gemeinden/v2/pub/)

durfte nur mitgeteilt werden, dass in der Stichprobe ein bestimmter Anteil der in den Registern gemeldeten Personen nicht aufgefunden wurde, die Kommunen durften aber nicht im Einzelnen unterrichtet werden, um welche Personen oder Wohnungen es sich dabei handelte. Den Städtestatistikern konnte also keine Gelegenheit zur Überprüfung der angeblichen Karteileichen gegeben werden; Zweifel an der Korrektheit der Stichprobenerhebungen wuchsen und konnten nicht ausgeräumt werden.

Nach und nach zogen im ganzen Land viele Gemeinden vor Verwaltungsgerichte und klagten gegen den Zensus, d. h. gegen die neuen amtlichen Einwohnerzahlen, die zu erheblichen finanziellen Einbußen geführt hatten. Schließlich kulminierten die Klagen in einer Normenkontrollklage der Senate von Berlin und Hamburg vor dem Bundesverfassungsgericht in Karlsruhe gegen die Gesetzgebung zum registergestützten Zensus (der ja unter anderem Berlin und Hamburg im Bundesrat zugestimmt hatten). Die wichtigsten beiden Argumente waren dabei:

1. Gemeinden über und unter 10000 Einwohner wurden mit unterschiedlicher Methodik behandelt. Dies verstoße gegen den Gleichbehandlungsgrundsatz, zumal Gemeinden mit mehr als 10000 Einwohnern viel größere Einwohnerzahlverluste hatten hinnehmen müssen.

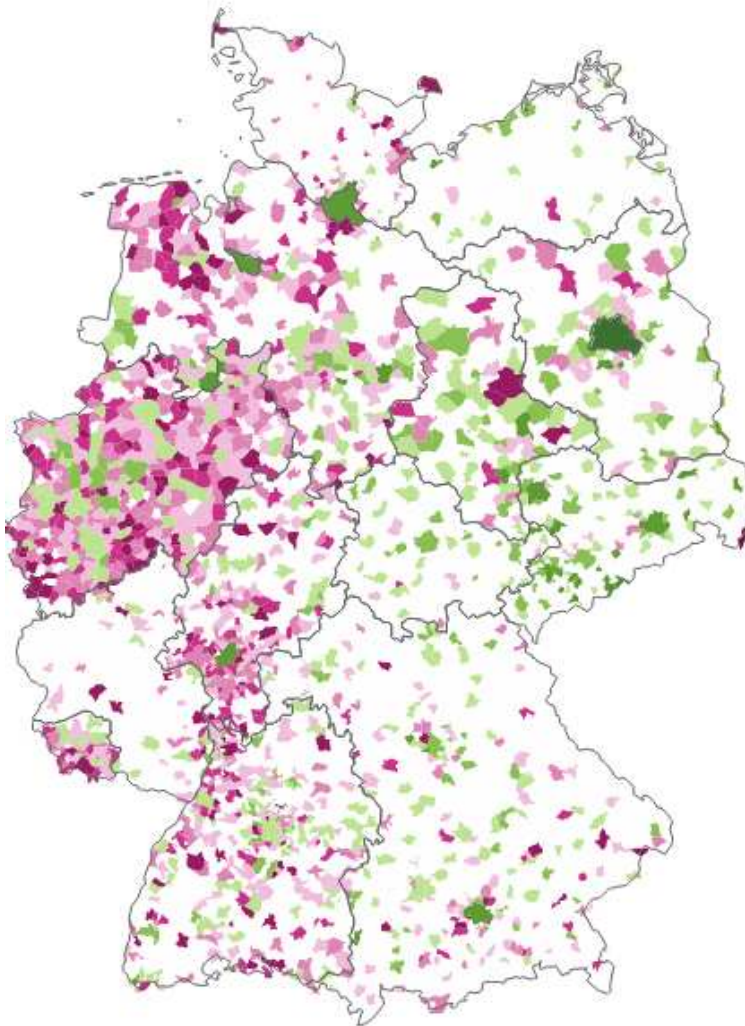


Abbildung 7.2: Relativer Standardfehler der Einwohnerzahl für alle Gemeinden mit mehr als 10000 Einwohnern. Grün sind Gemeinden bis zu 0,5% dargestellt, violett sind Gemeinden über 0,5% (je dunkler, desto größer ist die Abweichung vom Wert 0,5%).

Quelle: [http://www.spiegel.de/static/happ/politik/2013/bevoelkerung\\_gemeinden/v2/pub/](http://www.spiegel.de/static/happ/politik/2013/bevoelkerung_gemeinden/v2/pub/)

2. Der im Gesetz festgelegte relative Standardfehler der Einwohnerzahl von 0,5% wurde in vielen Gemeinden überschritten, so dass die Ausführung des Zensus nicht mit der Gesetzgebung vereinbar gewesen wäre.

In der Tat war die relative Veränderung der Einwohnerzahlen bei Gemeinden unter 10000 Einwohnern geringer. Man hatte aus Kostengründen auf Stichproben in kleinen Gemeinden verzichtet, weil der Zensus test 2001 ja gerade gezeigt hatte, dass der Korrekturbedarf in den Registern dort eher gering war.

Auch nicht von der Hand zu weisen war, dass sich der relative Standardfehler von Gemeinde zu Gemeinde unterschied. Tatsächlich wurde ein relativer Standardfehler von 0,5% in mehr als 60% aller Gemeinden mit mehr als 10000 Einwohnern überschritten (vgl. Abbildung 7.2); der größte relative Standardfehler wurde mit

1,23% für Hünstetten in Hessen angegeben.

Das Statistische Bundesamt wies auf die genaue Formulierung im Gesetz hin; dort wird von einer „angestrebten Genauigkeit“, nicht von einer „maximalen Genauigkeit“ gesprochen. Hier zeigte sich, dass Mathematiker und Juristen Gesetzestexte unterschiedlich auslegen. Für (manche) Juristen bedeutet „angestrebte Genauigkeit“ an dieser Stelle, dass die Genauigkeit auch eingehalten werden muss, sonst würde dem Gesetz widersprochen. Die meisten Mathematiker nehmen Texte wörtlich und neigen zu der Ansicht, wenn die Genauigkeit angestrebt, aber dann doch nicht erreicht wurde, hätte man dem Gesetz durchaus Genüge getan.

Man kann sich an dieser Stelle fragen, warum denn im Gesetz überhaupt von einer „angestrebten Genauigkeit“ gesprochen wird und was überhaupt genau unter dem „einfachen relativen Standardfehler“ zu verstehen ist. Dazu muss man sich zunächst mit den Methoden der Schätzung aus Stichproben vertraut machen; wir steigen daher etwas tiefer in die mathematischen Grundlagen ein.

## 7.4 Schätzungen aus Stichproben

### 7.4.1 Allgemeine Theorie

Wir betrachten eine Gesamtheit von  $N$  Untersuchungseinheiten mit einem Merkmal  $X$  und Merkmalswerten  $x_1, \dots, x_N$ . Die Summe aller dieser Werte ist der Gesamt- oder Totalwert  $t_X$  des Merkmals  $X$

$$t_X := \sum_{i=1}^N x_i,$$

das arithmetische Mittel aller Werte ist

$$\bar{x} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

die Varianz aller Werte ist

$$\sigma_X^2 := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2.$$

Inhaltlich gibt die Varianz an, wie „unterschiedlich“ die einzelnen Werte sind. Wenn alle  $x_i$  näherungsweise identisch sind, ist die Varianz ungefähr 0; je größer die Unterschiede zwischen den einzelnen  $x_i$  werden, desto größer ist die Varianz.

Wir nehmen nun an, dass wir nicht alle Werte  $x_i$  in der Gesamtheit kennen, sondern nur eine einfache Stichprobe vom Umfang  $n$  ziehen. „Einfache“ Stichprobe soll dabei bedeuten, dass jede Teilmenge von  $n$  Einheiten aus den  $N$  Einheiten der Gesamtheit dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, als Stichprobe ausgewählt zu werden (insbesondere folgt daraus, dass jede Einheit dieselbe Wahrscheinlichkeit hat, in die Stichprobe zu gelangen, nämlich  $\frac{n}{N}$ ). Die ausgewählten Einheiten und damit auch ihre Merkmalswerte sind dann zufällig, d. h. wir schreiben die ausgewählten  $n$  Werte als Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$ . Unser Ziel ist eine Schätzung des Totalwerts  $t_X$  oder des arithmetischen Mittels  $\bar{x}$  der Gesamtheit. (Im Kontext des registergestützten

Zensus 2011 ist  $N$  die Anzahl aller Anschriften in einer Gemeinde,  $x_i$  ist die Zahl der Personen, die unter der  $i$ -ten Anschrift ihren Hauptwohnsitz haben,  $t_X$  ist die gesamte Einwohnerzahl der Gemeinde. Aus allen  $N$  Anschriften wurden  $n$  Anschriften ausgewählt, und durch sogenannte Erhebungsbeauftragte wurde die Realisierung von  $X_i, i = 1, \dots, n$ , erfragt.)

Naheliegender ist es,  $\bar{x}$  durch  $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  (also den Mittelwert der Gesamtheit durch den Mittelwert der Stichprobe) zu schätzen. Daraus erhält man eine Schätzung für den Totalwert der Gesamtheit durch  $\hat{t}_X := N \cdot \bar{X}$ .

In jedem Lehrbuch zu Stichprobenverfahren (z. B. [SSW92]) lassen sich die Herleitungen der folgenden Resultate nachlesen:

- $\hat{t}_X := N \cdot \bar{X}$  ist eine erwartungstreue Schätzung für  $t_X$ , d. h.  $E(\hat{t}_X) = t_X$ : im Einzelfall kann die Schätzung von der Wahrheit abweichen, aber im Durchschnitt über alle Schätzungen aus allen möglichen Stichproben erhält man den wahren Wert.
- Für die Varianz der Schätzung  $\hat{t}_X$  gilt

$$\text{Var}(\hat{t}_X) = \frac{N^2}{n} \cdot \sigma_X^2 \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

- Der relative Standardfehler (die Wurzel aus der Varianz geteilt durch den wahren Wert) ist

$$\text{rel\_s}(\hat{t}_X) = \frac{\sqrt{\frac{N^2}{n} \cdot \sigma_X^2 \cdot \frac{N-n}{N-1}}}{t_X}$$

- Für große Stichprobenumfänge  $n$  ist  $\hat{t}_X$  näherungsweise normalverteilt. Daraus folgt u. a., dass sich ein sogenanntes Konfidenzintervall zum Niveau 95% wie folgt bilden lässt:

$$\left[ \hat{t}_X - 2 \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{t}_X)}; \hat{t}_X + 2 \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{t}_X)} \right].$$

Etwa 95% aller möglichen Stichproben liefern ein Konfidenzintervall, in dem der wahre Wert  $t_X$  enthalten ist. Oder anders ausgedrückt: mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 95% ist der zu schätzende Wert im Intervall  $\hat{t}_X \pm 2 \cdot \sqrt{\text{Var}(\hat{t}_X)}$  enthalten.

Varianz und relativer Standardfehler machen Aussagen über die Genauigkeit der Schätzung aus einer Stichprobe. Sie haben zunächst aber einen Nachteil: in den Formeln kommen  $\sigma_X^2$  und  $t_X$  vor, also die Varianz und der Totalwert in der Gesamtheit. Diese Größen sind aber ja unbekannt, weil wir nur eine Stichprobe kennen. Der Ausweg ist, die Größen aus der Stichprobe zu schätzen. Man kann zeigen, dass man bei einer einfachen Stichprobe ohne Zurücklegen die Varianz  $\sigma_X^2$  erwartungstreu durch folgenden Ausdruck schätzen kann:

$$\frac{N-1}{N} \cdot \hat{\sigma}_X^2 := \frac{N-1}{N} \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Wir erhalten dann die geschätzte Varianz und den geschätzten relativen Standardfehler:



- Die geschätzte Varianz der Schätzfunktion  $\hat{t}_X$  ist

$$\text{Var}(\hat{t}_X) = \frac{N^2}{n} \cdot \hat{\sigma}_X^2 \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right). \quad (7.1)$$

- Der geschätzte relative Standardfehler ist

$$\text{rel\_s}(\hat{t}_X) = \frac{\sqrt{\frac{N^2}{n} \cdot \hat{\sigma}_X^2 \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}}{N \cdot \bar{X}}. \quad (7.2)$$

Im Kontext des Zensus ergibt sich dann ein (approximatives) Konfidenzintervall aus folgender Aussage: Mit Wahrscheinlichkeit 95% liegt die wahre Bevölkerungszahl einer Gemeinde zwischen  $\hat{t}_X - 2 \cdot \hat{t}_X \cdot \text{rel\_s}(\hat{t}_X)$  und  $\hat{t}_X + 2 \cdot \hat{t}_X \cdot \text{rel\_s}(\hat{t}_X)$ . Wenn  $\text{rel\_s}(\hat{t}_X)$  maximal 0,5% wäre, läge die wahre Bevölkerungszahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% im Intervall  $\hat{t}_X \pm 1\% \cdot \hat{t}_X$ .

In der Praxis gibt es viele Möglichkeiten, den Standardfehler einer Schätzung noch zu verkleinern. Eine wichtige Idee ist das Nutzen von Zusatzinformation in folgendem Sinn: Nehmen wir an, neben dem Merkmal  $X$ , dessen Totalwert wir schätzen wollen, gibt es noch ein Merkmal  $Z$ , dessen Totalwert wir aus anderen Quellen kennen. In der Stichprobe beobachten wir beide Merkmale, d. h. wir haben Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  und  $Z_1, \dots, Z_n$ . Falls  $X$  und  $Z$  positiv korreliert sind (was man anhand der Stichprobe überprüfen kann), werden sich  $\hat{t}_X$  und  $\hat{t}_Z$  ähnlich verhalten, d. h. wenn  $\hat{t}_Z$  den Totalwert  $t_Z$  überschätzt, wird wohl auch  $\hat{t}_X$  den Totalwert  $t_X$  überschätzen. Wir kennen  $t_Z$ , wissen also, wie stark  $\hat{t}_Z$  den wahren Wert verfehlt, und dieses Wissen kann man verwenden, um auch die Schätzung  $\hat{t}_X$  zu korrigieren.

Der Regressionsschätzer für den Totalwert von  $X$  ist so ein korrigierter Schätzer. Er ist wie folgt definiert:

$$\hat{t}_{X,\text{reg}} := N \cdot \bar{X} + \hat{\beta} \cdot \left( \sum_{i=1}^N z_i - N \cdot \bar{Z} \right);$$

dabei ist  $\hat{\beta}$  die Steigung der Kleinste-Quadrate-Regressionsgeraden von  $X$  auf  $Z$ . Es lassen sich folgende Resultate zeigen:

- Der Regressionsschätzer ist ein asymptotisch erwartungstreuer Schätzer für den Totalwert  $t_X$ .
- Varianz und relativer Standardfehler des Regressionsschätzers lassen sich schätzen, wenn in (7.1) und (7.2)  $\hat{\sigma}_X^2$ , also die (geschätzte) Varianz von  $X$ , durch die Varianz der Residuen in der Regression von  $X$  auf  $Z$  (im Folgenden mit  $\hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2$  bezeichnet) ersetzt wird (vgl. Abbildung 7.3):

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{t}_{X,\text{reg}}) &= \frac{N^2}{n} \cdot \hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2 \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right), \\ \text{rel\_s}(\hat{t}_{X,\text{reg}}) &= \frac{\sqrt{\frac{N^2}{n} \cdot \hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2 \cdot \left(1 - \frac{n}{N}\right)}}{\hat{t}_X}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

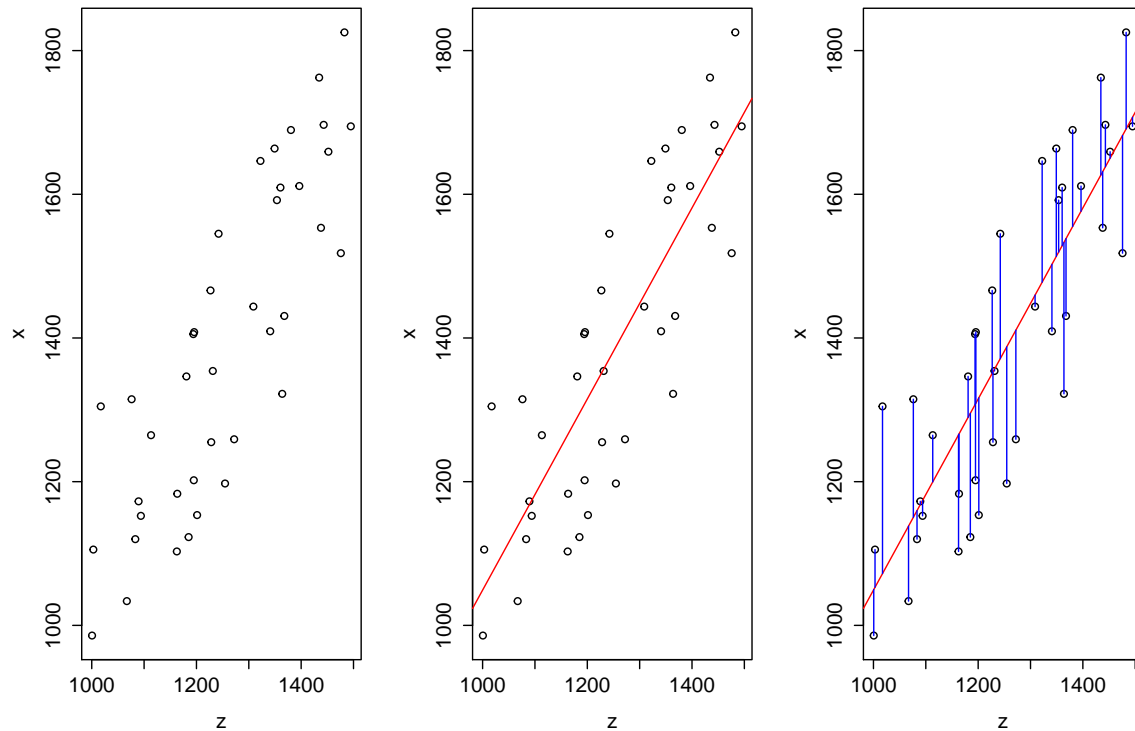


Abbildung 7.3: Regressionsgerade (Mitte) und Residuen (rechts) einer linearen Regression von  $X$  auf  $Z$

Die Residuen sind die Abweichungen von der Regressionsgerade; ein Standardresultat aus der Theorie der linearen Regression besagt, dass die Varianz der Residuen von  $X$  auf  $Z$  nie größer als die Varianz von  $X$  sein kann, somit ist der Regressionsschätzer stets mindestens so genau wie der Schätzer  $\hat{t}_X$ . Außerdem ist die Varianz der Residuen umso kleiner, je größer die Korrelation zwischen  $X$  und  $Z$  ist.

Der relative Standardfehler des Regressionsschätzers ist also umso kleiner, je stärker der Zusammenhang zwischen  $X$  und  $Z$  ist und je größer der Stichprobenumfang gewählt wird.

Auf den Zensus bezogen, bietet es sich an, für  $Z_i$  die Zahl der im Melderegister verzeichneten Personen an Adresse  $i$  zu wählen, da sicher eine hohe Korrelation zwischen den an einer Adresse gemeldeten und den tatsächlich dort wohnenden Personen besteht.

## 7.4.2 Stichprobenverfahren im Zensus 2011

Die Theorie aus dem vorherigen Abschnitt wurde für eine Schätzung der Einwohnerzahlen im Rahmen des Zensus 2011 verwendet. Im Vorfeld wurde vom Statistischen Bundesamt unter Zuhilfenahme verschiedener Quellen ein Adressenverzeichnis erstellt. Für jede Stadt oder Gemeinde lag somit eine Liste mit  $N$  Adressen vor. Daraus wurde jeweils eine Stichprobe von  $n$  Adressen gezogen (wobei das Verhältnis  $n/N$  im Durchschnitt bei ungefähr 10% lag). Die Meldebehörden der Kommunen

mussten im Vorfeld einen Datenabzug ihrer Einwohnerregister zu einem Stichtag an die Statistischen Ämter der Länder und des Bundes liefern; es war also nun einerseits möglich, für jede Kommune die Summe  $t_Z$  aller in den Registern verzeichneten Personen zu berechnen, und andererseits konnten den Daten die Zahlen der gemeldeten Personen an den  $n$  zufällig ausgewählten Anschriften entnommen werden  $(Z_1, \dots, Z_n)$ . Erhebungsbeauftragte (also Interviewer) wurden sodann zu den  $n$  Anschriften geschickt, um die tatsächliche Zahl der dort im Hauptwohnsitz lebenden Personen zu erfragen  $(X_1, \dots, X_n)$ . Falls die Melderegister und auch die persönlichen Auskünfte fehlerfrei wären, müsste stets  $X_i = Z_i$  gelten; tatsächlich sind zwar (wie man aus dem Zensusstest wusste) die Registerzahlen nicht immer korrekt, trotzdem war eine hohe Korrelation zwischen  $X$  und  $Z$  zu erwarten, weshalb die Verwendung des Regressionsschätzers mit den Registerzahlen als Hilfsvariable naheliegend war.

Die tatsächlich verwendete Methodik ist im Detail um einiges komplizierter, weil es möglich ist, die Genauigkeit des Regressionsschätzers noch zu erhöhen, indem man von der Vorgabe einer einfachen Stichprobe abrückt und es zulässt, dass die Wahrscheinlichkeiten für die Einheiten der Gesamtheit, in die Stichprobe zu gelangen, nicht alle identisch sind. Die gefundenen Formeln müssen dann entsprechend angepasst werden; Details finden sich in [MGG<sup>+</sup>12], sind für unsere grundsätzliche Diskussion aber nicht von Bedeutung.

Vergegenwärtigen wir uns noch einmal einen zentralen Punkt: im Zensusgesetz wurde einerseits gefordert, dass der Stichprobenumfang 10% der Bevölkerung nicht überschreiten sollte. Andererseits war ein relativer Standardfehler von maximal 0,5% anzustreben. Dem Ausdruck (7.3) ist klar zu entnehmen, wovon der relative Standardfehler für die Einwohnerzahl einer Gemeinde im Wesentlichen abhängt: einerseits vom Stichprobenumfang  $n$ , andererseits von der Varianz  $\hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2$  der Residuen der Regression von  $X$  auf  $Z$ . Diese Varianz kann aber erst aus den erhobenen Daten geschätzt werden, ist also erst nach der Erhebung bekannt. Dieser Punkt verwirrte ANDREAS VOSSKUHLE in der mündlichen Verhandlung des Bundesverfassungsgerichts: kann man tatsächlich aus den erhobenen Daten berechnen, wie genau die Schätzung aus diesen Daten ist? Oder zieht man sich hier am eigenen Schopf aus dem Sumpf?

Es handelt sich aber gerade nicht um einen Zirkelschluss. Die Genauigkeit der Schätzungen kann man tatsächlich erst nach der Erhebung bestimmen. Aber natürlich versucht man die Genauigkeit vor Beginn der Erhebung zu steuern, indem man einerseits Vermutungen über  $\hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2$  anstellt und andererseits den Stichprobenumfang  $n$  entsprechend wählt.

Vermutungen über  $\hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2$  konnten im Statistischen Bundesamt nur mittels der Ergebnisse des Zensusstests von 2001 angestellt werden, da es nur zu diesem einmaligen Zeitpunkt Informationen über die Residuen der Regression von  $X$  nach  $Z$  gab. Freilich lag der Zensusstest 10 Jahre zurück, und über Veränderungen in der Korrelation zwischen den Registerdaten und den wahren Wohnverhältnissen konnte nur spekuliert werden. Aus diesem Grund wurde ins Gesetz der „angestrebte“ Standardfehler aufgenommen: die genaue Planung der Stichprobengrößen in den einzelnen Gemeinden wurde so vorgenommen, dass sich überall relative Standardfehler von maximal 0,5% ergeben hätten, wenn sich seit 2001 an den Residualvarianzen  $\hat{\sigma}_{X \rightarrow Z}^2$  nicht viel verändert hätte. Nach der Erhebung musste man feststellen, dass sich

diese Varianzen in vielen Gemeinden vergrößert hatten.

## 7.5 Das Urteil und Volkszählungen in der Zukunft

Im Urteil vom 19.9.2018 wies das Bundesverfassungsgericht die Klagen als unbegründet zurück [BVe18]. Nach Ansicht des Gerichts war der Zensus 2011 verfassungsgemäß.

Die vermeintliche Ungleichbehandlung von Gemeinden unter und über 10000 Einwohnern wurde von den Richtern als sachgerecht eingestuft:

Die Verwendung unterschiedlicher Verfahren zur Korrektur von Über- und Untererfassungen in den Melderegistern gemäß §7 Abs. 1 Satz 2 Nr. 1 und §16 ZensG 2011 erscheint vor dem Hintergrund des dem Gesetzgeber zur Verfügung stehenden Erkenntnisstandes jedenfalls vertretbar. Die in der mündlichen Verhandlung befragten sachverständigen Auskunftspersonen haben ausgeführt, dass das Ziel einer wesentlichen Reduktion des Verwaltungsaufwands, vor allem aber einer geringeren Belastung der Bevölkerung durch primärstatistische Befragungen ohne eine entsprechende Grenze für die Anwendung des Stichprobenverfahrens nicht erreichbar gewesen wäre. Wäre das Stichprobenverfahren auf sämtliche Gemeinden erstreckt worden, wäre es organisatorisch und technisch nicht mehr handhabbar gewesen.

Dass der relative Standardfehler der Einwohnerzahl in etlichen Gemeinden tatsächlich größer als 0,5% war, führt ebenfalls nicht dazu, dass der registergestützte Zensus von 2011 als verfassungswidrig eingestuft werden müsste:

Die Vorgabe einer lediglich „angestrebten“ Genauigkeit in §7 Abs. 1 Nr. 1 ZensG 2011 führt nicht zu einer unzulässigen Unbestimmtheit der Vorschrift. §7 Abs. 2 Satz 1 und Abs. 3 Satz 6 ZensG 2011 erheben die Genauigkeit des Stichprobenverfahrens zu einer wichtigen Maxime des gesamten Verfahrens [...] Dass Werte hierbei lediglich „angestrebt“ werden, ist der Verwendung des gewählten statistischen Verfahrens inhärent und bedeutet nicht, dass der Gesetzgeber insoweit lediglich unverbindliche Vorgaben aufgestellt hätte. Da es allein um eine prognostische Begrenzung systembedingter Fehler geht, kann die tatsächliche Fehlerquote aus fachlichen Gründen nicht ex ante bestimmt werden, sondern – wie auch die mündliche Verhandlung gezeigt hat – notwendigerweise erst auf der Grundlage der tatsächlich erhobenen Daten.

Wie man sieht, wurde der Münchhausen-Vorwurf vom Tisch gewischt. Im Rahmen der mündlichen Verhandlung waren mit RALF MÜNNICH (Universität Trier) und SUSANNE RÄSSLER (Universität Bamberg) zwei Sachverständige zur Unterstützung der Argumentation des Statistischen Bundesamtes geladen, denen es gelang, die Richter von gewissen statistischen Zusammenhängen (z. B. dass der tatsächliche Stichprobenfehler immer erst nach der Datenerhebung geschätzt werden kann) zu überzeugen.

Im Statistischen Bundesamt laufen unterdessen schon die Vorbereitungen für den Zensus 2021. Obwohl das Verfassungsgericht den Methodenwechsel an der Grenze von 10000 Einwohnern nicht beanstandete, wird die Stichprobenerhebung aller Voraussicht nach auf alle Gemeinden ausgeweitet. Kommunen sollen sich beim nächsten Zensus nicht wieder ungleich behandelt fühlen. Bei kleinen Gemeinden wird der „anzustrebende“ relative Standardfehler aber größer als 0,5% gesetzt werden, um den nötigen Gesamtstichprobenumfang (und damit sowohl die Kosten als auch die Belastung der Auskunftspflichtigen) nicht unverhältnismäßig ansteigen zu lassen.

## Literaturverzeichnis

- [AR84] ALY, G. und K.H. ROTH: *Die restlose Erfassung: Volkszählen, Identifizieren, Aussondern im Nationalsozialismus*. Rotbuch, 1984.
- [Bub17] BUBROWSKI, H.: *Das geschätzte Volk*, 2017.
- [BVe83] BVERFG: *Urteil vom 15.12.1983 - 1 BvR 209/83, 1 BvR 269/83, 1 BvR 362/83, 1 BvR 420/83, 1 BvR 440/83, 1 BvR 484/83*, 1983.
- [BVe18] BVERFG: *Urteil des Zweiten Senats vom 19. September 2018 - 2 BvF 1/15 - Rn. (1-357)*, 2018.
- [MGG<sup>+</sup>12] MÜNNICH, R., S. GABLER, M. GANNINGER, J.P. BURGARD und J.-P. KOLB: *Stichprobenoptimierung und Schätzung im Zensus 2011*. Statistisches Bundesamt, 2012.
- [SSW92] SÄRNDAL, C.-E., B. SWENSSON, and J. WRETMAN: *Model Assisted Survey Sampling*. Springer, 1992.
- [Sta04] STATISTISCHE ÄMTER DES BUNDES UND DER LÄNDER: *Ergebnisse des Zensustests*. *Wirtschaft und Statistik*, (4):813–833, 2004.
- [Wie01] WIETOG, J.: *Volkszählungen unter dem Nationalsozialismus*. Duncker und Humblot, 2001.



# Der Zahlbegriff und wie sich unser Zahlssystem entwickelt hat

JAN HAUFFEN, CHRISTIN PETRI



## 8.1 Historisches zum Zahlbegriff

Die ältesten Funde von „Zahlen“ oder, was damit in Verbindung gebracht werden kann, stammen von vor 35.000 Jahren: Bei diesen Funden handelt es sich um die sogenannten Lebombo-Knochen, welche versehen mit 29 Kerben in Swasiland gefunden wurden. Man vermutet, dass es sich dabei um einen Zählstab handelt, der die Tage in einem Mondmonat zählt.

Vor 20.000 Jahren wurden in Ishango ein Knochen gefunden (siehe Abbildung 8.1); bei diesem Knochen handelt es sich vermutlich auch um einen Zählstab. Jedoch wird von einigen Anthropologen vermutet, dass es sich um einen Stab mit arithmetischen Strukturen handelt, der Elemente der Multiplikation und Division enthält. Andere glauben, dass es sich auch hier um einen Mondkalender handelt. Allerdings gibt es auch Wissenschaftler, die keinen Bezug zur Mathematik erkennen und die Kerben lediglich als Griffigkeit des Knochenwerkzeuges deuten. Dieses Thema bietet

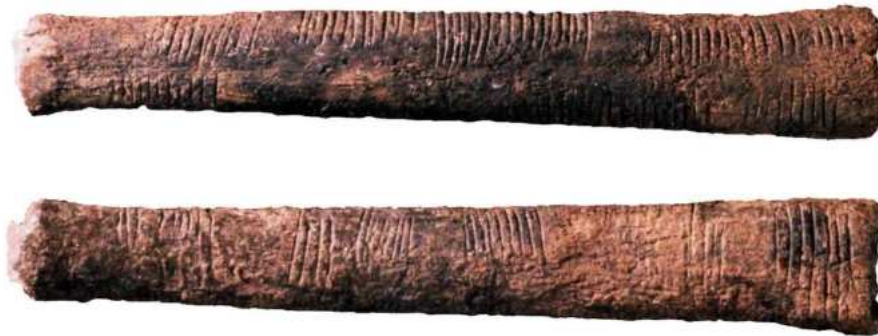


Abbildung 8.1: Knochenfunde aus Ishango<sup>1</sup>

viel Spielraum für Spekulationen. Auf dem zweiten Bild kann man beispielsweise erkennen, dass die Kerben mit Abständen eingeritzt sind. Dabei handelt es sich um eine Reihe 3, 6, 4, 8, 10, 5, 7. Dazu könnte man nun sagen, 3 mal 2 sind 6. 4 mal 2 sind 8 und 5 mal 2 sind 10. Dabei wären natürlich die Zahlen 5 und 10 vertauscht und die 7 passt gar nicht ins Bild. Ob eine solche Interpretation der Kerben sinnvoll erscheint, soll an dieser Stelle jedem selbst überlassen werden, denn auch die Wissenschaftler sind sich nicht einig.

Vor knapp 10.000 Jahren wurden im Nahen Osten Tonfiguren zur Darstellung von Zahlen benutzt. Diese Tonfiguren werden als Token bezeichnet, was auch Zahlstein bedeutet. Es gibt dabei ein System, um nicht zu viele Figuren auf einmal benutzen zu müssen, z. B. stand ein Token für ein Schaf, entsprechend 7 für 7 Schafe, für 10 Schafe gab es ein eigenes Token. Ein anderer Typ der Figuren zählte dann zum Beispiel Ziegen.

Um 4000 v. Chr. fing man an, die Tokens an einer Kette zu tragen. Da es damit leicht war die Anzahl der Token zu manipulieren, umwickelte man sie mit Lehm und hat sie dann gebacken. So musste dann jedes Mal, wenn die Anzahl der Token geändert werden sollte, der Lehm aufgebrochen werden. Um dies zu vermeiden fing man 3500 v. Chr. an auf die Hüllen Symbole zu schreiben. Hierbei merkte man dann, dass die Symbole auch unabhängig von den Tokens funktionierten.

## 8.2 Die natürlichen Zahlen

In der griechischen Antike fing man bei Auflistungen von Zahlen erst mit 2, 3, 4, ... an, also unseren „natürlichen“ Zahlen bis auf die Eins und die Null. Bezüglich der Zahl 1 gibt es viele Besonderheiten. Die Multiplikation mit der Zahl 1 lässt jede beliebige Zahl unverändert. Außerdem ist die Eins die kleinste positive Zahl und gilt als unteilbare Einheit der Arithmetik, da sie die einzige positive Zahl ist, die sich nicht durch Addition zweier ganzer positiver Zahlen erzeugen lässt.

Wichtige Resultate der antiken Zahlentheorie sind in EUKLIDS Elementen enthalten. Um 1500 wurde langsam EUKLIDS Werk kritisch wahrgenommen und der Mathemati-

<sup>1</sup>Quelle: <https://sites.google.com/site/asimathandafrikanhistory/ishango-bone>



ker und Physiker SIMON STEVIN definierte: „Zahl ist das, wodurch sich die Quantität eines jeden Gegenstandes ausdrückt.“ (Vgl.: Stevin 1685 - zitiert nach Gericke) Mit dieser Definition erfasst er sogar alle positiven reellen Zahlen. SIMON STEVIN schlug bereits ein dezimales Maßsystem vor, denn ihm war bewusst, dass es nur eine Frage der Zeit sein kann, bis allgemeingültige Einheiten, wie das Dezimalgewicht, eingeführt werden. Mit dieser Definition gehört nun auch die Eins zu den natürlichen Zahlen. Die Eins ist die Basis des Zahlenkonzepts. Mit der Zahl 1 beginnen wir zu zählen. Egal von welcher Zahl wir ausgehen, bilden wir die nächste Zahl, indem wir 1 hinzufügen.

Der nächste große Schritt in der Entwicklung des Zahlsystems ist die Einführung von Brüchen.

### 8.3 Die rationalen Zahlen

Ein Bruch ist eine Darstellung, bei der eine ganze Zahl durch eine andere geteilt wird. Brüche sind erst dann interessant wenn das Ergebnis nicht „glatt“ ist, also keine ganze Zahl ist, denn dafür brauchen wir einen neuen Typ von Zahlen: Die rationalen Zahlen. Einer der wichtigsten Brüche auf den dies zutrifft ist  $\frac{1}{2}$ . Dieser Bruch sagt aus, dass ein Ganzes zu gleichem Anteil auf zwei Leute aufgeteilt werden soll.

Die Besonderheit von  $\frac{1}{2}$  taucht bereits bei EUKLID auf. Dabei wird eine Konstruktion gesucht, um einen Winkel in zwei gleiche Teile zu teilen. Und das geht so: gegeben sei ein Winkel BAC; mit Hilfe eines Zirkels konstruiert man auf den Geraden AB und AC in gleichem Abstand von A die Punkte D und E. Nun wird ein Kreis mit dem Radius DE um D gezeichnet und ein Kreis mit dem Radius ED um E. Diese beiden Kreise schneiden sich in dem Punkt F, der den gleichen Abstand von D und E hat. Dementsprechend teilt die Gerade AF den Winkel BAC in zwei gleich große Hälften. EUKLID zeigt uns nicht, wie man einen beliebigen Winkel drittelt, also in drei gleichgroße Teile zerlegt, was dem Bruch  $\frac{1}{3}$  entsprechen würde. Rund 2000 Jahre später haben Mathematiker bewiesen, dass dies mit Lineal und Zirkel auch nicht möglich ist. Die einzigen „Brüche“ eines Winkels, die sich auf diese Weise konstruieren lassen, haben die Form  $\frac{p}{2^k}$  für  $p, k \in \mathbb{N}$ . Dabei wird wiederholt halbiert: Man teile  $k$  mal durch 2 und mache dann  $p$  Kopien.

Die nächste große Entwicklung des Zahlbegriffs fand durch die Akzeptanz der negativen Zahlen als Zahlen statt.

### 8.4 Die negativen Zahlen - Weniger als Nichts?

Negative Zahlen sind keine Selbstverständlichkeit. Es stellt sich die Frage, ob eine Zahl überhaupt kleiner als Null sein kann. Nehmen wir als Beispiel Kühe. Es kann nicht weniger als keine (also null) Kühe geben, es sei denn man führt „virtuelle“ Kühe ein. Also etwa Kühe, die eine Person der anderen Person schuldet.

Ähnlich ist es auch mit negativen Zahlen. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung des Zahlensystems. Die negativen Zahlen tauchten nach heutigem Wissenstand erstmals in chinesischen Dokumenten der Han-Dynastie auf (202 v. Chr. – 220 n. Chr.). Die Besonderheit dabei ist, dass Chinesen mit Stäbchen rechneten. Dabei standen

schwarze Stäbchen für die negativen Zahlen, während rote Stäbchen die positiven Zahlen darstellen. So konnten sie durch die Anordnung der roten Stäbchen eine Schuld ausdrücken, welche gleich der Anzahl an schwarzen Stäbchen war. Auch die indischen Mathematiker kannten negative Zahlen und die Idee wurde von arabischen Mathematikern aufgegriffen und breitete sich so bis nach Europa aus. FIBONACCI bemerkte, dass es sich im Zusammenhang mit finanziellen Berechnungen um Schulden handeln musste. Bis ins 17. Jahrhundert galt ein negatives Ergebnis als Beweis dafür, dass das Problem unlösbar ist. Erst ab dem 19. Jahrhundert werden negative Zahlen als selbstverständliche Gegenstände der Mathematik behandelt.

Mit den negativen Zahlen haben wir das „Gegenteil“ der positiven Zahlen, daher müssen sie auch am Zahlenstrahl in die entgegengesetzte Richtung gehen. Einige Rechenregeln lassen sich anhand des Zahlenstrahls leicht verifizieren. Um etwa 2 zu einer beliebigen Zahl zu addieren, muss man sich lediglich um 2 Einheiten bzw. Schritte nach rechts auf dem Stahl bewegen. So kann man auch ganz leicht sehen, dass negative Zahlen nach demselben Prinzip miteinander verrechnet werden, wie positive Zahlen. Wenn wir aber die Multiplikation der negativen Zahlen betrachten stoßen wir auf eine Besonderheit. Ein vollkommen alltäglich Gegenstand ist die Multiplikation zweier negativer Zahlen, die eine positive Zahl liefert, doch warum ist dies der Fall? Die Bedeutung von  $(-6) \cdot (-5)$  ist Sache der Übereinkunft, also Definitionssache. Mathematiker hätten auch entscheiden können, dass das Ergebnis  $-30$  ist. Allerdings gibt es mehrere Gründe, wieso dies eine unpraktische Entscheidung gewesen wäre.

1. Wenn  $(-6) \cdot (-5) = -30$  wäre, so wäre dies dasselbe Resultat wie  $(-6) \cdot 5 = -30$ . Dürfte man dieses selbe Ergebnis nun durch  $-6$  teilen, so erhielte man  $-5 = 5$ , also einen Widerspruch.
2. Wir wissen  $5 + (-5) = 0$  (das können wir sogar am Zahlenstrahl ablesen). Die Multiplikation einer jeden Zahl mit 0 sollte ebenfalls 0 ergeben. Vernünftig ist, dies auch für negative Zahlen zu vermuten, denn wir fordern, dass sich die negativen Zahlen bezüglich der Addition und Subtraktion genau so verhalten wie die positiven Zahlen. Es folgte also

$$0 = 6 \cdot 0 = -6 \cdot (5 + -5) = -6 \cdot 5 + -6 \cdot -5.$$

Wenn  $(-6) \cdot (-5) = -30$  ist, erhalten wir jedoch  $-30 + -30 = -60 = 0$ , also wieder einen Widerspruch. Hätten wir minus mal minus gleich plus gewählt, würde die Gleichung mit  $-30 + 30 = 0$  „aufgehen“.

3. Der dritte Grund, der für die Definition von minus mal minus gleich plus spricht, ist die Struktur des Zahlenstrahls. Multipliziert man eine positive Zahl mit  $-1$  so erhält man damit die entsprechende negative Zahl. Nach DESCARTES, kann man sich das so vorstellen, als hätte man die positive Hälfte des Zahlenstrahls um 180 Grad um die Null gedreht und damit sind wir von rechts nach links gekommen. Daher ist es sinnvoll, dieses Verfahren auch anzuwenden, wenn wir eine negative Zahl mit einer negativen multiplizieren wir drehen also die negative Hälfte des Zahlenstrahls ebenfalls um 180 Grad und kommen damit auf der positiven Seite raus.

4. Ein vierter Grund ist die Deutung eines negativen Geldbetrags als Schuld. Nach dieser Interpretation hat die Multiplikation eines Geldbetrags mit einer negativen Zahl dasselbe Resultat, wie eine entsprechende Multiplikation mit einer positiven Zahl, jedoch wird das Guthaben hierbei zur Schuld. Das Wegnehmen einer Schuld, ist so, wie wenn die Bank das, was geschuldet wird, aus den Unterlagen streicht. Eine Schuld von 10€ abziehen ist also nichts anderes als 10€ auf das Konto zu tun. Was in diesem Beispiel den Kontostand wieder auf Null bringen würde.  $(-6) \cdot (-5)$  hat also denselben Effekt auf den Kontostand, wie das Wegnehmen von sechs Verschuldungen je 5€, und das heißt der Kontostand wird um 30 erhöht.
5. Zum Abschluss führen wir noch einen Beweis im Sinne der modernen Mathematik an:

**Definition.** Eine Menge  $(K, +, \cdot)$  mit zwei inneren Verknüpfungen (Addition und Multiplikation) heißt ein **Körper**, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (a)  $(K, +)$  ist eine abelsche Gruppe,
- (b)  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  ist eine abelsche Gruppe,
- (c) es gelten die Distributivgesetze, d. h.  $\forall a, b, c \in K$ :

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (a + b) \cdot c &= a \cdot c + b \cdot c \end{aligned}$$

**Satz.** In jedem Körper gilt  $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$  für alle  $a, b \in K$ .

*Beweis.* Mit Hilfe der Körperaxiome lässt sich die Aussage beweisen: Zunächst zeigen wir, dass  $-a = (-1) \cdot a, \forall a \in K$  gilt:

$$\begin{aligned} (-1) \cdot a &= (-1) \cdot a + a + (-a) \\ &= (-1 + 1) \cdot a + (-a) \\ &= 0 \cdot a + (-a) \end{aligned}$$

Hierzu müssen wir noch zeigen, dass  $0 \cdot a = 0, \forall a \in K$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= a + (-a) \\ &= (1 + 0) \cdot a + (-a) \\ &= a + 0 \cdot a + (-a) \\ &= a + (-a) + 0 \cdot a \\ &= 0 + 0 \cdot a \end{aligned}$$

Jetzt können wir zeigen, dass  $(-1) \cdot (-1) = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= (-1) \cdot 0 \\ &= (-1) \cdot (1 + (-1)) \\ &= (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \\ \implies 0 &= (-1) + (-1) \cdot (-1) \iff 1 = (-1) \cdot (-1) \end{aligned}$$

Es folgt schließlich  $(-a) \cdot (-b) = (-1) \cdot (a) \cdot (-1) \cdot (b) = (-1) \cdot (-1) \cdot (ab) = ab$ .  $\square$

## Exkurs: Die Null

Lange gehörte die Null gar nicht zu den Zahlen und nach wie vor ist es Sache der Konvention, ob die 0 zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht. Mathematisch gehört sie zu den ganzen Zahlen. Mit der Einführung der negativen Zahlen geht es nicht mehr ohne die 0, denn  $-1 + 1 = 0$ , und die Summe von zwei Zahlen soll nichts anderes als eine Zahl sein. Im Zuge dessen wurde auch die 0 als Zahl anerkannt. Wir sind historisch an einem Punkt angekommen, indem schon einiges, was wir heute als Zahl auffassen, zu den Zahlen gehört. Wir kennen die natürlichen Zahlen, die ganzen Zahlen und die rationalen. Aber es gibt immer noch Zahlen, die zu diesem Begriff nicht passten.

## 8.5 Reelle und komplexe Zahlen

Schon die Griechen wussten, dass ein Ausdruck wie Wurzel 2 existieren muss, wollten dies jedoch nicht als Zahl auffassen. Nach dem Satz des Pythagoras muss Wurzel 2 dem Verhältnis der Länge der Diagonalen eines Quadrats mit Seitenlänge 1 entsprechen. Will man dieses Verhältnis als Zahl auffassen, werden weitere Zahlen gebraucht, da die rationalen an dieser Stelle nicht ausreichen. In den folgenden Jahrhunderten entwickelte sich dieser Gedanke weiter. Außerdem stellten sich bereits im 15. Jahrhundert Mathematiker die Frage, ob es nicht einen neuen Zahlentyp – eben die komplexen Zahlen – geben müsse.

Trotz dieser Kenntnisse gab es im Bereich der reellen und komplexen Zahlen keinen Fortschritt bis zum 18. Jahrhundert. Erst dann gelang LEONHARD EULER die Darstellung der Quadratwurzel  $-1$ , der dazu das Symbol  $i$  einführte. Das  $i$  steht dabei für imaginär. Zeitgleich entwickelte sich langsam die Analysis in Gestalt der Differential- und Integralrechnung (NEWTON, LEIBNIZ).

## Peano-Axiome

DEDEKIND und PEANO sind im 19. Jahrhundert die Ersten, die den Zahlbegriff axiomatisch fassen, und damit der Zahlentheorie und der Analysis eine neue Grundlage geben.

Es sei  $\mathbb{N}$  eine Menge, auf der eine (injektive) Abbildung  $n \mapsto n'$  gegeben sei, so dass folgendes gilt:

1.  $0 \in \mathbb{N}$
2.  $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N})$
3.  $\forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 0)$
4.  $\forall n, m(n, m \in \mathbb{N} \Rightarrow (m' = n' \Rightarrow m = n))$
5.  $X(0 \in X \wedge \forall n(n \in \mathbb{N} \Rightarrow (n \in X \Rightarrow n' \in X)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq X)$

Die Axiome lassen sich wie folgt lesen, dabei ist mit  $n'$  der Nachfolger von  $n$  gemeint:

1. 0 gehört zu den natürlichen Zahlen.
2. Jede Zahl  $n$  hat einen Nachfolger  $n'$  in den natürlichen Zahlen.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Falls die Nachfolger von  $n$  und  $m$  gleich sind, dann sind  $n$  und  $m$  auch gleich.
5. Wenn eine Menge  $X$  die 0 enthält und zu jeder natürlichen Zahl auch ihren Nachfolger, dann sind die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von  $X$ .

## **Literaturverzeichnis**

- [Ste16] STEWART, IAN: *Unglaubliche Zahlen*. Rowohlt Taschenbuchverlag, Reinbek bei Hamburg, 2016.



# Die Entschlüsselung der Gedanken

NIKOLAI EDEKO

*Die Gedanken sind frei  
wer kann sie erraten?  
Sie fliehen vorbei  
wie nächtliche Schatten.  
Kein Mensch kann sie wissen,  
kein Jäger erschießen.  
Es bleibt dabei:  
Die Gedanken sind frei!*

Jeder kann im Geiste reflektieren, sinnieren, fantasieren oder philosophieren wie es ihm beliebt, denn dieser Prozess findet abgeschirmt von der Außenwelt statt: Unsere Gedanken sind begrenzt auf unser Gehirn und wenn wir uns nicht dazu entschließen einen Gedanken auszusprechen, aufzuschreiben oder anderweitig zu kommunizieren, wird niemand jemals um seine Existenz wissen. Und wir sind oft froh, dass diese „nächtlichen Schatten“, welche ohne Unterlass in unserem Kopf umherhuschen, dort gefangen sind und wirklich nur ans Tageslicht gelangen, wenn wir unseren Teil dazu beitragen.

Nun stellen wir uns jedoch einmal das folgende Szenario vor: Nichts ahnend gehen wir unseren täglichen Aktivitäten nach, sind zum Beispiel auf dem Weg zu unserer Hochschule oder beim Einkaufen, als wir plötzlich das gleiche Schicksal teilen, wie über 260.000 Deutsche jedes Jahr: Wir erleiden einen Schlaganfall. Zum Glück wird uns schnell geholfen, wir gehören zu den ca. 75%, die überleben, und kommen irgendwann im Krankenhaus langsam wieder zu Bewusstsein. Wir hören vertraute Stimmen, versuchen uns zu regen, aber . . . unser Körper reagiert nicht. Verschlafen versuchen wir unsere Augen zu öffnen, doch unsere Lieder bleiben geschlossen. Währenddessen vernehmen wir im Hintergrund Worte wie „Wachkoma“, „ohne Bewusstsein“, „wissen nicht, wann er (oder sie) wieder aufwacht“. Wir versuchen uns zu Wort zu melden, hören aber statt unserer Stimme nur unsere eigenen Gedanken und realisieren: Unsere Lippen bewegen sich nicht. Plötzlich sind wir so hellwach wie beunruhigt als uns langsam klar wird: Wir können keinen einzigen Muskel in unserem Körper mehr bewegen. Da von uns keine Patientenverfügung vorliegt, entscheiden unsere Angehörigen, dass wir künstlich am Leben erhalten werden sollen. So vergehen Wochen, Monate, Jahre . . . ohne, dass irgendjemand registriert,

dass wir bei vollem Bewusstsein sind und sehr wohl mitbekommen, was um uns herum geschieht.

Was würden wir auf einmal dafür geben, dass man unsere Gedanken eben doch nicht nur erraten sondern *wissen* kann, einfach aus dem Wunsch heraus, mit unserer Umwelt wieder in irgendeine Interaktion zu treten? Aber das ist nur Wunschdenken: Wir sind nun – vielleicht ohne Ausweg – gefangen in unserem eigenen Körper, ohne irgendeine Kontaktmöglichkeit zur Außenwelt.

Dies ist kein schönes Szenario aber leider auch kein frei erfundenes, sondern so oder so ähnlich für schätzungsweise bis zu 3000 Menschen in Deutschland Realität. Sie leiden unerkannt am sogenannten „complete locked-in“-Syndrom.

## 9.1 Das locked-in Syndrom

Das „locked-in“-Syndrom bezeichnet einen Zustand, in dem der Mensch zwar gänzlich bei Bewusstsein, jedoch körperlich weitgehend gelähmt ist. In diesem Zustand sind fast keine Bewegungen mit dem Körper mehr möglich, so dass eine Kommunikation mit der Außenwelt eventuell noch durch Augenbewegungen oder Blinzeln möglich ist. Wenn der Körper sogar vollständig gelähmt ist, spricht man vom „**complete locked-in**“-Syndrom (CLIS).

Der Begriff „locked-in“-Syndrom für diesen Zustand wurde erst in den 60er Jahren geprägt, davor wurden Betroffene meist einfach als „scheintot“ erklärt und dementsprechend behandelt. Auch heute werden immer wieder CLIS-Patienten fälschlicherweise als Wachkoma-Patienten diagnostiziert, mangels Kenntnis der Ärzte über dieses rare Phänomen. Genaue Zahlen dazu, wie häufig das locked-in Syndrom ist, gibt es nicht. Fest steht lediglich, dass es sehr selten ist. Ursache ist meistens ein Schlaganfall, aber auch unheilbare degenerative neurologische Erkrankungen wie Multiple Sklerose oder Amyotrophe Lateralsklerose (ALS) können dazu führen.

Bei ALS verlieren die Betroffenen im Laufe von Jahren oder Jahrzehnten irreversibel die Kontrolle über ihren Körper und oft auch die Fähigkeit selbstständig zu atmen, da die für das Ansteuern von Muskeln zuständigen Motoneuronen nach und nach absterben. Die Patienten müssen daher ggf., um am Leben erhalten zu werden, künstlich beatmet und über eine Magensonde ernährt werden. Oft folgt bei solchen Patienten auf das „locked-in“-Syndrom das „complete locked-in“-Syndrom, wenn irgendwann auch die Augenmuskulatur nicht mehr reagiert. Ab diesem Zeitpunkt sind die Erkrankten dann komplett von der Außenwelt abgeschnitten.

Das wohl bekannteste Beispiel eines ALS-Patienten ist der kürzlich im Alter von 76 Jahren verstorbene theoretische Physiker STEPHEN HAWKING. Er erhielt seine ALS-Diagnose im Alter von 21 Jahren zusammen mit der Prognose, dass er nur noch zwei Jahre zu leben hätte. Er gehörte jedoch zu der Gruppe derjenigen, bei denen die Krankheit einen langsamen Verlauf aufweist und so zwar im Laufe der Jahre einen Großteil des Körpers, jedoch z. B. nicht die Augenmuskulatur lähmt, so dass durch Augenbewegungen und Blinzeln durchaus noch Kommunikation mit der Außenwelt möglich ist. Auch









STEPHEN HAWKING konnte zuletzt nur noch über Augenbewegungen kommunizieren, hatte aber durch Verwendung eines augengesteuerten Sprachcomputers eine gewisse Autonomie und führte trotz seiner Einschränkungen ein erfülltes Leben.

Für komplett eingeschlossene CLIS-Patienten ist dies allerdings keine Option. Bedenkt man, was für eine große psychologische Belastung es sein muss, z. B. durch einen Schlaganfall von einem Tag auf den anderen hilflos in seinem Körper gefangen zu sein, dann ist es schon allein aus psychologischen Gründen unabdingbar, dass Fachpersonal schnell Kommunikation zu CLIS-Patienten herstellen kann. Und die einzige Hoffnung dies zu tun, liegt darin, direkt am Gehirn anzusetzen.

## 9.2 Gehirn-Computer-Schnittstellen

Eine **Gehirn-Computer-Schnittstelle** ist eine Vorrichtung, die es erlaubt nur unter Verwendung des Gehirns einen Computer zu steuern. Im Englischen ist der Begriff Brain-Computer Interface (BCI) gängig. Ein BCI muss die Information über Gedanken aus dem Gehirn in für Computer analysierbare Daten umwandeln. Dazu muss die Gehirnaktivität gemessen werden, wozu eine Reihe gängiger Verfahren existieren:

	EEG 	MRT 	NIRS 	Gehirn-Implantate 
Invasiv	Nein	Nein	Nein	Ja
Funktionsprinzip	elektrisch	magnetisch	metabolisch	meist elektrisch
Erfassung <sup>1</sup>	oberflächlich	komplett	oberflächlich	tief

Möchte man eines dieser Verfahren verwenden, um eine Gehirn-Computer-Schnittstelle zu konstruieren, dann stellt sich zuerst die Frage nach der konzeptionellen Funktionsweise: Lernt der Mensch, die Maschine zu verstehen, mit Gehirnpulsen zu bedienen, oder lernt die Maschine den Menschen zu verstehen und seine Gedanken zu entschlüsseln? Ist also der Mensch aktiv und die Maschine passiv oder übernimmt die Maschine die aktive Rolle während der Mensch sich nicht umstellen muss?

Beide Rollenverteilungen existieren bereits heute und haben jeweils ihre Vor- und Nachteile. Wir betrachten im folgenden Beispiele für beides.

## 9.3 Neurofeedback

Beim Lernen ist ganz allgemein die Existenz von Feedback essentiell: Ist das Feedback positiv, trifft man zum Beispiel auf einem Instrument den richtigen Ton, so versucht das Gehirn bei gleichem Kontext die entsprechenden Handlungen zu reproduzieren, bei negativem Feedback hingegen die entsprechenden Handlungen zu vermeiden.

<sup>1</sup>Im Sinne der Erfassungstiefe, nicht im Sinne der Auflösung

Die Idee des **Neurofeedbacks** ist nun, dass man über (z. B. visuelles oder auditives) Feedback lernt, seine Gehirnaktivität zu steuern, so wie man vielleicht ein Musikinstrument lernen würde.

Ein konkretes Beispiel: Kurz vor der Jahrtausendwende führte der Tübinger Neurowissenschaftler NIELS BIRBAUMER mit dem ALS-Patienten HANS-PETER SALZMANN Versuche unter Verwendung einer EEG-Haube durch. Herr SALZMANN war locked-in, jedoch nicht completely locked-in, d. h. Kommunikation war bei ihm noch über die Augen möglich. Herr BIRBAUMER wollte nämlich die Effektivität von BCIs erst einmal bei Menschen



erforschen, mit denen man noch kommunizieren kann, bevor er diese bei den vollkommen isolierten CLIS-Patienten anwendete.

Die EEG-Haube wurde verbunden mit einem Computer, welcher so programmiert war, dass spezifische Aktivitätsprofile des Gehirns eine Bewegung des Cursors auf dem Bildschirm des Computers auslösten. Per *trial and error* konnte Herr SALZMANN langsam lernen durch Modulation seiner Hirnaktivität den Cursor gezielt zu bewegen und Buchstaben zu schreiben, wenn auch nur mit einer Geschwindigkeit von 2 Buchstaben pro Minute. Herr SALZMANN verfasste auf diese Weise ganze Briefe und kommentierte den Versuch mit den Worten:

Ein großer Vorteil für mich.  
Es gibt mir ein Stück Selbstständigkeit.  
Schreiben ist eine intime Angelegenheit.

Für SALZMANN war dies also schon ein wichtiger Fortschritt, der dazu beitrug, dass er mit seinem Zustand besser umgehen konnte. Inzwischen kommt man mit invasiven BCIs auf bis zu 12 Wörter pro Minute, was schon recht nah an den 15 Wörtern pro Minute liegt, die STEPHEN HAWKING mit seinem augengesteuerten Sprachcomputer erreichte. Langfristig ist zu erwarten, dass die Kommunikation über BCIs schneller sein wird, als die über augengesteuerte Sprachcomputer.

Erwähnenswert ist an dieser Stelle: SALZMANN war, bevor er durch ALS seine Autonomie verlor, Richter in Stuttgart und hatte eine wasserdichte Patientenverfügung aufgesetzt, die den Einsatz lebenserhaltender Maßnahmen eigentlich unterbunden hätte. Als allerdings eines Tages seine Atmung versagte, schaute niemand in die Schublade, in welcher die Erklärung lag, so dass dennoch lebenserhaltende Maßnahmen eingeleitet wurden. Als er dann von den Gehirn-Computer-Schnittstellen hörte, entschied er sich diese auszuprobieren. Er führte dann noch 8 weitere Jahre ein glückliches Leben bevor er an einer Lungenentzündung, einer häufigen Todesursache bei ALS Patienten, starb. Dieses Beispiel zeigt, dass Patientenverfügungen oft in einem Zustand des Unwissens verfasst werden, sowohl im Hinblick auf die Möglichkeiten (BCIs oder Rehabilitation), als auch im Hinblick darauf, dass man eventuell bei vollem Bewusstsein langsam verhungert oder erstickt, wenn lebenserhaltende Maßnahmen eingestellt werden.

Nachdem der Neurofeedback-Ansatz bei locked-in Patienten, die noch ihre Augen bewegen können, funktionierte, hatte man die Hoffnung, dass dies auch zur Kommunikation taugt, wenn ein Patient in den „complete locked-in“-Zustand übergeht. Hier sieht die Realität anders aus: Die Ergebnisse waren niederschmetternd, nicht einmal einfache Ja-Nein-Fragen konnten konsistent beantwortet werden – man hätte genauso gut eine Münze werfen können. BIRBAUMER formulierte hierfür den folgenden Erklärungsansatz: Wenn Menschen über längere Zeit im complete locked-in Zustand sind, so hat keiner ihrer Gedanken mehr eine Auswirkung, und sie stellen daher mit der Zeit Gedanken, die ein Ziel als Objekt haben, ein. Dadurch verringert sich ihre Fähigkeit zu zielorientiertem Denken, welches für bewusste Lernprozesse essentiell ist.

Bisher weiß man jedoch nicht sicher, worin das Problem besteht. Die Hoffnung ist jedoch, dass man dennoch positive Ergebnisse mit CLIS-Patienten erzielen kann, wenn die Maschine dem Menschen entgegen kommt und an seiner Stelle eine aktive, lernende Rolle übernimmt.

## 9.4 Maschinelles (Auswendig)lernen

In den letzten Jahren haben die durch die digitale Revolution exponentiell zunehmenden Rechenkapazitäten dafür gesorgt, dass das maschinelle Lernen eine stetig zunehmende Bedeutung in der Gesellschaft erlangt hat: Längst wird es verwendet für die Klassifikation von DNA-Sequenzen, für die Suche nach Exoplaneten, steuert Produktempfehlungen in Online Shops, die Musik, welche wir hören und vieles mehr. Dabei ist das Konzept keineswegs neu, sondern findet seine Anfänge spätestens in den 50er Jahren: Die Idee des maschinellen Lernens ist, dass wir bei manchen Systemen in der Welt vielleicht nicht in der Lage sind ein theoretisches Modell anzugeben, welches die uns vorliegenden Daten erklärt, jedoch mit Hilfe von Mathematik, Informatik und hinreichend großen Datenmengen trotzdem Gesetzmäßigkeiten erkennen und so das System „verstehen“ können.

Andererseits ist diese künstliche „Intelligenz“ auch noch etwas kindlich naiv, denn das maschinelle „Lernen“ besteht in vielen Anwendungen lediglich in dem Identifizieren bestimmter Gesetzmäßigkeiten in großen Datenmengen. Zudem erschweren die enormen Datenmengen, welche benötigt werden, es im Detail nachzuvollziehen, wie die Algorithmen zu ihren Ergebnissen kommen. Durch die Akzeptanz solcher „Black-boxen“ wird ein Stück mehr die traditionelle mathematisch-naturwissenschaftliche Arbeitsweise über Bord geworfen, die auf Verständnis via theoretischer Modelle setzt.

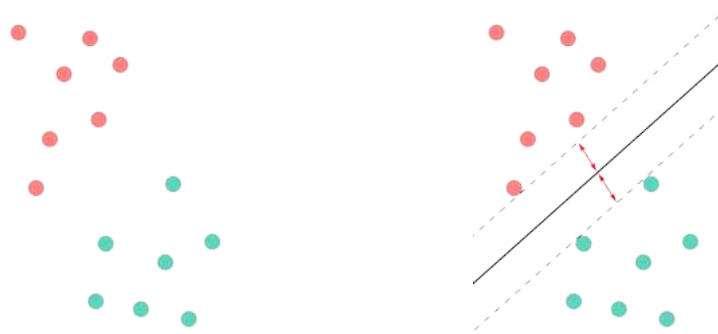
Auch wenn das maschinelle Lernen daher auch kritisch zu betrachten ist, erweist es sich, konfrontiert mit dem menschlichen Gehirn, als durchaus nützlich: Eine einzelne Nervenzelle ist zwar (verhältnismäßig) leicht zu verstehen, unser Gehirn besteht jedoch aus über 80 Milliarden Nervenzellen mit tausendmal mehr synaptischen Verbindungen als es Sterne in der Milchstraße gibt. Zu dieser schieren Größe kommt hinzu, dass das Ganze in diesem Fall deutlich mehr ist, als die Summe seiner Teile: Gefühle, Intelligenz, Bewusstsein etc. entstehen<sup>2</sup> erst durch das Zusammenspiel un-

---

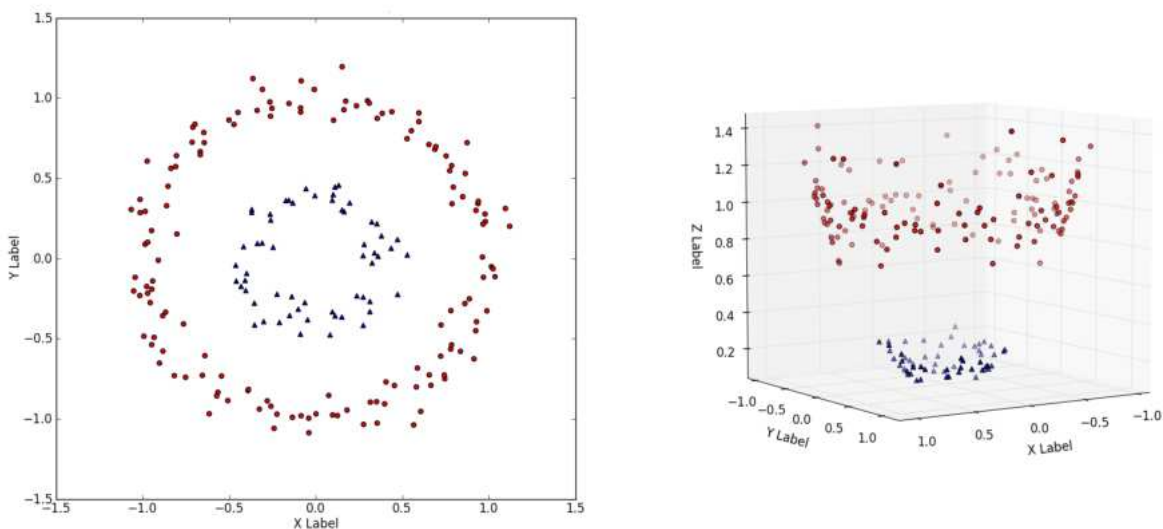
<sup>2</sup>modulo philosophischer Erwägungen

zähliger Neuronen. Man ist somit genau in der Situation, für die maschinelles Lernen gedacht ist: Man hat im Gehirn ein hochkomplexes System, dessen vollständiges Verständnis durch ein theoretisches Modell sich nach wie vor unseren Möglichkeiten entzieht.

Man kann also versuchen, das Gehirn als Blackbox aufzufassen und durch Datenanalyse basierend auf maschinellem Lernen wenigstens ein paar Muster dieser Blackbox, wenn schon nicht im Detail zu verstehen, doch zumindest zu identifizieren. Das einfachste derartige Szenario wäre, dass man erkennt, wann ein CLIS-Patient „Ja“ oder „Nein“ denkt, also lediglich binäre Information aus der Gehirnaktivität zu extrahieren. Hierzu bieten sich „Support Vector Machines“ an. Bei diesen handelt es sich um Algorithmen, die ausgehend von zwei Gruppen von Daten bestimmen sollen, zu welcher der beiden Gruppen ein neuer Datenpunkt gehört. Hierzu wird im einfachsten Fall eine Hyperebene bestimmt, die zu beiden Datengruppen den größtmöglichen Abstand hat. Ist die entsprechende Hyperebene bestimmt, so können neue Datenpunkte mit Hilfe dieser klassifiziert werden, je nachdem, auf welcher Seite sie liegen.



In Situationen, in denen die Trennung via einer Hyperebene nicht möglich ist, die Daten aber dennoch sehr strukturiert sind, kann nach einer Einbettung in einen höherdimensionalen Raum wieder eine (affine) Hyperebene verwendet werden:



Neben diesem „kernel trick“ gibt es noch weitere Verfeinerungen des Algorithmus für welche auf [MRT12] verwiesen sei.

## 9.5 Kommunikation mit CLIS-Patienten

2017 gelang es NIELS BIRBAUMER und seinen Kollegen in Tübingen dann tatsächlich, durch die Kombination von Support Vector Machines und Nahinfrarotspektroskopie komplett eingeschlossenen CLIS-Patienten die Kommunikation zu ermöglichen. Hierzu wurden zuerst in einer Kalibrierungsphase Daten für die Gehirn-Computer-Schnittstelle gesammelt, ausgehend von welchen sie die Gehirnaktivität der Patienten einordnen konnte: Den Patienten wurden viele Sätze wie „Paris ist die Hauptstadt von Frankreich“ oder „Elefanten haben Schnäbel“ vorgelesen, auf die sie reflexartig die richtige Antwort dachten. Die Schnittstelle maß jeweils via NIRS an vielen Stellen des Gehirnes gleichzeitig den Sauerstoffgehalt im Blut und sortierte die Messdaten nach positiven und negativen Antworten. Via eines Support-Vector Algorithmus sollten dann Antworten auf Fragen mit unbekanntem Antworten ebenfalls anhand des Sauerstoffgehaltes des Blutes im Gehirn klassifiziert werden.

Zusätzlich wurde den Patienten auditives Feedback gegeben, d. h. sie hörten, wie ihre Gehirnaktivität von der Maschine interpretiert wurde, und ihr Gehirn versuchte automatisch gute Ergebnisse zu reproduzieren. Hier liegt auch der Grund der Verwendung von NIRS: Im Gegensatz zur elektrischen Gehirnaktivität können wir unsere Gehirndurchblutung zumindest ganz vage wahrnehmen. Es ist deswegen deutlich leichter, unsere Gehirndurchblutung auf semi-bewusster Ebene zu manipulieren, was bedeutet, dass die Effektivität von Neurofeedback bei NIRS deutlich höher ist.

Maschinelles Lernen und Neurofeedback wurden somit zusammen verwendet: Die Maschine lernt, den Menschen zu verstehen, und das Gehirn des Menschen registriert positive Ergebnisse und versucht diese (automatisch) zu reproduzieren. Durch diese Kombination war die Kommunikation dann tatsächlich zuverlässig möglich.

Was sagen diese Menschen, die man so aus der Isolation herausholt?

- Wollen sie sterben? Nein. Die befragten Patienten hängen alle am Leben.
- Freuen sie sich über die Möglichkeit zu kommunizieren? Selbstverständlich. Kommunikation ist wichtig, und sei es nur um grundlegende Wünsche und Bedürfnisse formulieren zu können.
- Empfinden sie ihre Lebensqualität als zufriedenstellend? Ja. Selbst dann, wenn sie seit längerer Zeit mit niemandem mehr kommunizieren konnten.

Dies erscheint auf den ersten Blick vielleicht überraschend. Es gibt hierfür zwei Erklärungen:

Einerseits wurde bereits die Theorie angesprochen, dass beim CLIS das Denken an externe Ziele mit der Zeit abnimmt – wenn das Gehirn nichts mehr erreichen kann, stellt es irgendwann den Versuch ein. Während dies für uns vielleicht eine unangenehme Vorstellung ist, empfinden die Betroffenen dies anscheinend nicht als Drama: Es scheint, dass sie hierdurch auch weniger Verlangen und Abhängigkeiten verspüren, wodurch sie die Welt objektiver wahrnehmen können. Und eigentlich prophezeien sowohl SCHOPENHAUER als auch der Buddhismus, dass das Versiegen des Willens Voraussetzung zur Erlösung vom Kreislauf des Leidens im Leben ist und dass dies zu einer „positiven Leere“ führen kann.

Andererseits gibt es bei den Antworten der Patienten auch einen starken Bias: So wählen z. B. viele ALS-Patienten den Tod bevor sie komplett eingeschlossen sind, zum Beispiel durch die Ablehnung von lebenserhaltenden Maßnahmen. Bei derartigen neuro-degenerativen Krankheiten ist der Weg zum CLIS mit Autonomieverlust, Muskelkrämpfen, Schluckbeschwerden und Atemschwierigkeiten bis hin zum Lungenversagen verbunden, so dass diejenigen, die trotzdem das Leben wählen, hierfür in der Regel äußere Gründe wie ein stabiles soziales Umfeld haben.

Dass ab jetzt die Kommunikation selbst bei CLIS möglich ist, wird aber wahrscheinlich dafür sorgen, dass mehr Menschen das Leben wählen. Wie STEPHEN HAWKING und andere zeigen: Solange Kommunikation möglich ist, kann man noch einiges ausrichten, und spätestens jetzt ist somit klar, dass selbst bei CLIS das Leben zumindest das Potential hat sinnerfüllt zu sein.

In jedem Fall bedeuten diese Forschungsergebnisse für CLIS-Patienten einen enormen Fortschritt, zu dem ganz wesentlich auch Mathematik und Informatik beigetragen haben. Der nächste Schritt besteht nun darin, die verwendete Methode zu optimieren, günstiger und dadurch alltagstauglicher zu machen, sowie geeignetes Personal zu schulen, so dass die Gehirn-Computer-Schnittstellen Einzug in den klinischen Alltag halten können. Dadurch könnte dann in Zukunft auch das anfangs beschriebene Szenario zuverlässiger verhindert werden, dass „locked-in“-Patienten nicht als solches erkannt werden. Zudem sollen weiterhin invasive Methoden getestet werden, da die stoffwechselbasierte NIRS nur eine begrenzte Auflösung und Geschwindigkeit erlaubt.

## 9.6 Und anderswo?

Während damit die Forschung in Tübingen in eine neue Phase übergeht, wird mit ähnlichen Methoden längst überall auf der Welt geforscht.

- Neurofeedback und BCIs helfen bereits heute massiv bei der Rehabilitation nach Schlaganfällen, der Prävention epileptischer Anfälle, . . .
- In einer japanischen Studie wurde Ende 2017 damit begonnen, via maschinellen Lernens ganze Bilder aus unserem geistigen Auge auf den Computer zu übertragen.
- Das Unternehmen OpenWater möchte innerhalb von 8 Jahren mit stylischen Mützen telepathische Kommunikation ermöglichen.
- Währenddessen lecken sich Verfechter des Transhumanismus bei Meldungen wie den folgenden die Lippen:
  - „Brain Implant Boosts Human Memory by Mimicking How We Learn“
  - „New Bionic Eye That Connects to The Brain Successfully Restores a Woman’s Sight“
  - „DARPA Is Planning to Hack the Human Brain to Let Us ‚Upload‘ Skills“

Transhumanisten, darunter ELON MUSK mit seinem Unternehmen Neuralink, träumen davon, dass in naher Zukunft Gehirnimplantate genauso wie Augen-Laseroperationen zum Alltag gehören. Manche meinen sogar, dass das der einzige Weg ist, wie wir verhindern können, langfristig durch KIs ersetzt zu werden.

Konfrontiert mit so viel Aufregung sollte man jedoch auf dem Boden der Tatsachen und Fakten bleiben: Nicht-invasive Methoden haben nur eine begrenzte Auflösung, da Haare, Kopfhaut und Schädelknochen im Weg sind, und zudem der Zugriff auf Regionen tief im Inneren des Gehirns durch nicht-invasive Methoden nur durch teure MRT-Scans gut möglich ist. Invasive Methoden haben dieses Problem nicht, gehen bisher aber stets mit einer Gehirnoperation einher, die Infektionsrisiken birgt. Außerdem ist das Gehirn ein miserables Medium und implantierte Mikrochips halten deswegen aktuell lediglich zwei bis drei Jahre.

Es wird also zwar rund um die Welt an Gehirn-Computer-Schnittstellen geforscht, gleichzeitig steht man heute aber auch noch vor beachtliche Hürden. Die „Entschlüsselung unserer Gedanken“ wird aber weitergehen: Einerseits in die Richtung, dass Menschen geholfen wird, wie den CLIS-Patienten. Andererseits in eine Richtung, bei der man sich fragen muss: Werden, wenn es nach Menschen wie MARK ZUCKERBERG geht, bald unsere Gedanken analysiert, um noch individuellere Werbung zu schalten? Muss man irgendwann auf seine Gedanken aufpassen, wenn man durch die Kontrolle am Flughafen geht? Was passiert, wenn die Technologie der Gehirn-Computer-Schnittstellen eines Tages den Weg findet hinein in den Alltag einer oft desillusionierenden Realität? Man weiß es nicht. Allerdings werden wohl noch einige Jahre vergehen, bevor wir ernsthaft darüber nachdenken müssen, ob wir, im Hinblick auf die Freiheit unserer Gedanken, ein altes deutsches Volkslied umdichten müssen.

## Literaturverzeichnis

- [Ais17] AISSLINGER, MORITZ: *Kann er Gedanken lesen?* Zeit Nr. 47/2017, 2017.
- [Bau07] BAUBY, JEAN-DOMINIQUE: *Le Scaphandre et le Papillon*. Robert Laffont, 2007.
- [BCRM16] BIRBAUMER, N., U. CHAUDHARY und A. RAMOS-MURGUIALDAY: *Brain-computer interfaces for communication and rehabilitation*. *Neurology*, **12**(9):513–525, 2016.
- [BCX17] BIRBAUMER, N., U. CHAUDHARY und B. XIA: *Brain-Computer Interface-Based Communication in the Completely Locked-In State*. *PLoS Biology*, **15**(1), 2017.
- [BHK<sup>+</sup>99] BIRBAUMER, N., T. HINTERBERGER, B. KOTCHOUBEY, A. KÜBLER, J. PERELMOUTER, N. GHANAYIM, E. TAUB und H. FLOR: *A spelling device for the paralysed*. *Nature*, **398**:297–298, 1999.
- [Bir11] BIRBAUMER, NIELS: *SWR1-Interview mit Niels Birbaumer*, 2011.
- [BZ14] BIRBAUMER, NIELS und JÖRG ZITTLAU: *Dein Gehirn weiß mehr, als du denkst: Neueste Erkenntnisse aus der Hirnforschung*. Ullstein Hardcover, 2014.

- [BZ16] BIRBAUMER, NIELS und JÖRG ZITTLAU: *Denken wird überschätzt: Warum unser Gehirn die Leere liebt*. Ullstein Hardcover, 2016.
- [Eco] *The next frontier*. The Economist, January 6th–12th 2018.
- [Gri14] GRIMM, MICHAEL ALBAN: *Das ist das Leben? Ich will sterben!* Review of Ecumenical Studies Sibiu, **6**(2):259–287, 2014.
- [J. 02] J. T. GIACINO ET AL.: *The minimally conscious state: definition and diagnostic criteria*. Neurology, **58**(3):349–353, 2002.
- [KL13] KOTCHOUBEY, BORIS und MARTIN LOTZE: *Instrumental methods in the diagnostics of locked-in syndrome*. Restorative neurology and neuroscience, **31**(1):25–40, 2013.
- [LS16] LIEW, SOOK-LEI und SURJO SOEKADAR: *SAGE Podcast mit Sook-Lei Liew und Surjo R. Soekadar*, 2016.
- [MRT12] MOHRI, MEHRYAR, AFSHIN ROSTAMIZADEH und AMEET TALWALKAR: *Foundations of Machine Learning*. MIT University Press Group, 2012.
- [Sch17] SCHÖLKOPF, BERNHARD: *Maschinelles Lernen oder maschinelles Auswendiglernen?* Vortrag beim Technologieforum 2017, TU Berlin, 2017.
- [Sur17] SURJO, SOEKADAR: *SWR1-Interview mit Surjo Soekadar*, 2017.



# Ökonomie und Bildung

LOVIS WAGNER

*Bildung zielt somit auf Selbstständigkeit im Erkennen und Verstehen, auf einen kritischen Vernunftgebrauch, auf Mitdenken und Mitfühlen bei den großen und kleinen Fragen des Lebens sowie das dazu notwendige Wissen und Können, das mir ermöglicht, als Individuum in der menschlichen Gemeinschaft ein Leben zu führen, das das eigene Glück mit dem Wohl der Allgemeinheit verbindet.*

JOCHEN KRAUTZ, 2012

Die heutige Bildungslandschaft ist geprägt von Begriffen wie „Qualitätsmanagement“, „Evaluation“, „Humankapital“ und „Wettbewerb“. Dies sind prinzipiell Begriffe der Wirtschaftswissenschaften und sind schleichend in der Schul- und Universitätslandschaft gebräuchlich geworden, so gibt es in NRW z.B. QUA-LiS, die Qualitäts- und Unterstützungsagentur-Landesinstitut für Schule, welches ihre Aufgabe unter anderem so beschreibt: „Wir unterstützen Verfahren zum Bildungsmonitoring und konzipieren, realisieren und pflegen Unterstützungs- und Begleitsysteme zum Umgang mit deren Ergebnissen.“ [QUA16, S. 4] Dies lässt sich verstehen als Umsetzung von Maßnahmen zur Verbesserung der PISA-Ergebnisse. Dass den Begriffen auch eine wirtschaftliche Praxis gefolgt ist, zeigt nicht nur dieser Punkt, zeigt beispielsweise die zeitliche Vermessung der Geistestätigkeiten durch ECTS-Punkte, Modulhandbücher, die einer Produktbeschreibung ähnlich beschreiben wollen, was genau der Unterschied zwischen einem Wirtschaftsinformatiker, einem Betriebswirt und einem Informatiker ist, so wie ein Produktplan eine Rohrschelle von einer Gelenkrohrschele unterscheidet.

Als maßgebliche Akteure dieser Veränderungen werden von Autoren wie JOCHEN KRAUTZ, Professor der Kunstdidaktik, und KONRAD PAUL LIESSMANN, Professor der



Philosophie, die OECD, Thinktanks wie die Bertelsmannstiftung und ökonomische Schulen wie der Chicago school of economics genannt. Diese hätten und würden immer noch versuchen die ökonomische Rationalität zum obersten Wertegesichtspunkt zu machen, also die Optimierung der Kosten-Nutzen-Rechnung als Intention über etwaige Sekundäraufgaben wie die Anregung zur Mitgestaltung einer Demokratie zu stellen (vgl. [Ulr10]).

Dem entgegen stehen humanistische Theorien und Wertevorstellungen, wie die Selbstermächtigung im Sinne einer Aufklärung und die damit einhergehende Selbstständigkeit als vornehmstes Ziel anzusehen, nicht nur die Verwertbarkeit gewisser Kompetenzen und Lerninhalte. Dass in diesem Weltbild der Anspruch einer freien und auch kritischen Wissenschaft untergeht, lässt dieses Zitat der OECD vermuten, welches vor über 50 Jahren formuliert wurde und gut verstehen lässt, unter welchem Licht Bildung hier betrachtet wird.

Das Erziehungswesen steht nun gleichwertig neben Autobahnen, Stahlwerken und Kunstdüngerfabriken. Wir können nun, ohne zu erröten, und mit gutem ökonomischen Gewissen versichern, dass die Akkumulation von intellektuellem Kapital der Akkumulation von Realkapital an Bedeutung vergleichbar – auf lange Dauer vielleicht sogar überlegen – ist. [Geh66]

Wissenschaft muss frei bleiben um auch Ergebnisse liefern zu dürfen, welche zwar Teilen der Wirtschaft unangenehm, aber einer Allgemeinheit dienlich sind, wie z. B. die Gefahren der Wasserverschmutzung und den Risiken diverser Energieformen. Von Interessengruppen finanzierte, abhängige Forschung kann das nicht immer leisten. Fähiges Personal auszubilden, ist sicherlich eine Aufgabe der Schulen, Fachhochschulen und Universitäten, dies kann und will niemand abstreiten. Allerdings sollte die Entwicklung der dem oben genannten Bildungsanspruch genügenden Personen nicht darunter leiden, dass es ineffizient oder nicht zukunftsfähig wäre. Bildung sollte vom Fundament her gedacht werden und möglichst allgemein ausbilden und Unterrichtsziele sollten nicht auf der Hoffnung formuliert sein, man könne den Arbeitsplatz von morgen approximieren, da das Auswählen von Lernmaterial nach dem Kriterium der Verwertungswahrscheinlichkeit zu einem zu spezialisierten Wissensfundus führt, welche die Fähigkeit, an demokratischen Prozessen zu partizipieren hemmt, da nur wenig Bereiche der Argumentationen überhaupt verstanden werden bzw. manche Bereiche nicht in die Diskussion eingebracht werden können. Mündigkeit als Ziel von Bildungsprozessen zu betrachten und nicht nur als Folgeerscheinung irgendwie gearteter Lernprozesse, verlangt nicht nur ein Rest humanitären Anspruches, sondern auch unter anderem die Landesverfassung NRWs, welche dies in §7 erklärt und somit das Menschenbild eines in einer Gemeinschaft lebenden und denkend Wesens vertritt und als Grundlage der Erziehung sieht.

## Literaturverzeichnis

- [Bun13] BUNDESZENTRALE FÜR POLITISCHE BILDUNG: *PISA-Studie: Deutsche Schüler über dem Durchschnitt*, 3. Dezember 2013.  
<http://www.bpb.de/politik/hintergrund-aktuell/174546/pisa-studie>.

- [Geh66] GEHMACHER, ERNST: *Wirtschaftswachstum und Bildungsaufwand: Bericht über die OECD-Konferenz*. Europa Verlag, Wien, 1966.
- [Kra13] KRAUTZ, JOCHEN: *Ökonomismus in der Bildung: Menschenbilder, Reformstrategien, Akteure*. Gesellschaft für Bildung und Wissen e. V., 25. Januar 2013. <https://bildung-wissen.eu/fachbeitraege/bildungspolitik/okonomismus-in-der-bildung-menschenbilder-reformstrategien-akteure.html>.
- [Lie09] LIESSMANN, KONRAD PAUL: *Theorie der Unbildung*. Piper, 2009.
- [Lie17] LIESSMANN, KONRAD PAUL: *Geisterstunde: Die Praxis der Unbildung*. Piper, 2017.
- [QUA16] QUA-LiS NRW: *Leitbild der Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule (QUA-LiS NRW)*. Technischer Bericht, Qualitäts- und UnterstützungsAgentur – Landesinstitut für Schule des Landes Nordrhein-Westfalen (QUA-LiS NRW), Paradieser Weg 64, 59494 Soest, Juli 2016. [https://www.qua-lis.nrw.de/cms/upload/download/QUA-LiS\\_Leitbild.pdf](https://www.qua-lis.nrw.de/cms/upload/download/QUA-LiS_Leitbild.pdf).
- [Sch76] SCHULTZ, THEODORE W.: *Economic Research: Retrospect and Prospect, Volume 6: Human Resources*. National Bureau of Economic Research, 1976.
- [Ulr10] ULRICH, PETER: *Zivilisierte Marktwirtschaft: Eine wirtschaftsethische Orientierung*. Haupt, Bern, 2010.



# Primzahlen – zwischen Fakt und Fiktion

FABIAN HAGEN, PATRICK HERMLE



Scheinbar aus heiterem Himmel wird der Mittlere Westen der USA alle 13 bzw. 17 Jahre von Heerscharen von Insekten bevölkert. Die Zikaden der Gattung *Magicicada septendecim* werden im Jahre 2025 das nächste Mal erwartet, dabei schlüpfen die Tiere beinahe zeitgleich und verlassen ihr Versteck nur für einige Wochen um zu fressen und sich zu paaren. In den folgenden Jahren wird von diesen Tieren nichts mehr zu sehen sein.

Deswegen und auch wegen der unbegreiflichen Masse an Tieren lockt dieses Schauspiel Touristen und Wissenschaftler aus aller Welt in die Wälder Illinois und des Mississippi. Doch auch der interessierte Mathematiker wird hellhörig. Handelt

es sich um einen Zufall, dass diese Art ihren Zyklus entsprechend von Primzahlen gestaltet, oder sogar um ein ausgeklügeltes mathematisches Kalkül?

Zwar möchte man diesen Insekten keine tieferen mathematischen Kenntnisse zuschreiben, jedoch spricht vieles dafür, dass sich die Natur hier eine Eigenschaft der Primzahlen zunutze macht, für eine Überlebensstrategie, die durchdachter nicht sein könnte. Betrachten wir die Lebenszyklen der Fressfeinde in diesen Gebieten (es handelt sich in der Regel um 2, 4, oder 6 Jahre), so fällt auf, dass eine Konfrontation der verschiedenen Arten nur äußerst selten auftritt. Der Zyklus eines alle 6 Jahre auftretenden Fressfeindes und der Zikaden mit Rhythmus von 17 Jahren überschneidet sich lediglich alle 102 Jahre.<sup>1</sup>

Dieser Artikel soll nur einen kleinen Einblick bieten in die schier unbegreifliche Welt der Primzahlen, man könnte sagen, in die elegante, königlich anmutende Welt der *Arithmetik*. Er soll aufzeigen, warum es sich lohnt, sich mit diesem Gebiet der Mathematik, der Lehre von Zahlen und des Rechnens, zu beschäftigen.<sup>2</sup>

*Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften  
und die Arithmetik die Königin der Mathematik*

CARL FRIEDRICH GAUSS

## 11.1 Perlen der Mathematik

Im diesem Abschnitt betrachten wir einige *Perlen der Mathematik*, bei denen es sich unserer Ansicht nach um einige der schönsten, um nicht zu sagen anmutigsten Beweise der Mathematik handelt. Sie zeigen uns, dass auch komplexe Probleme einfach und beinahe intuitiv gelöst werden können. Es handelt sich um sehr alte Probleme<sup>3</sup>, die mithilfe elementarer Mathematik<sup>4</sup> gelöst wurden.

Ein sehr bedeutender Vertreter der frühen Mathematik ist EUKLID VON ALEXANDRIA<sup>5</sup>. Wir werden nun seine drei berühmtesten Aussagen genauer betrachten. Dazu benötigen wir folgende

**Definition.** Wir nennen  $p \in \mathbb{N}$  **Primzahl**, wenn  $p$  von genau zwei Zahlen geteilt wird.

**Lemma von Euklid.** Sind  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $p \in \mathbb{P}$ , dann gilt, dass

$$p|ab \rightarrow p|a \vee p|b.$$

*Beweis.* Seien  $a, b \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$  mit  $p|ab$  und  $p \nmid a$ .

Zu zeigen ist also, dass  $p|b$ .

Nach Annahme sind  $a$  und  $p$  teilerfremd. Das Lemma von Bézout<sup>6</sup> liefert uns die

<sup>1</sup>Dies ist das *kleinste gemeinsame Vielfache* von 6 und 17, eben:  $\text{kgV}(6, 17) = 102$ .

<sup>2</sup>Griechisch: arithmeîn = rechnen, arithmós = Zahl

<sup>3</sup>Was ist mit einem *alten Problem* gemeint? Sind nicht alle Probleme der Mathematik, da sie bereits vor ihrer Formulierung existieren sehr alt? Wir meinen hier jedoch *alt* in Bezug auf die Entdeckung bzw. Formulierung des Problem

<sup>4</sup>elementar meint im weitesten Sinne ohne analytische Methoden

<sup>5</sup>ca. 300 v. Chr. in Griechenland

<sup>6</sup>Aussage:  $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad \exists s, t \in \mathbb{Z} : \text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$

Existenz von  $s, t \in \mathbb{N}$  mit  $sp + ta = 1$ .

Damit erhalten wir

$$p(sb) + (ab)t = b.$$

Da  $p|ab$ , existiert ein  $c \in \mathbb{N}$  mit  $ab = cp$ . Es folgt

$$p(sb + ct) = b \quad \rightarrow \quad p|b.$$

□

**Fundamentalsatz der Arithmetik.** Jede positive natürliche Zahl größer 1 lässt sich bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

**Bemerkung.** Diese fundamentale Erkenntnis Euklids lässt uns eine grundlegende Struktur der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  erkennen. Die Primzahlen bilden, verknüpft durch Multiplikation die Grundbausteine unseren Zahlensystems. Man könnte sie als die *Atome der Zahlen* bezeichnen.

*Beweis. Existenz:*

Angenommen es gibt natürliche Zahlen  $\{n_1, \dots, n_k\} \subset \mathbb{N}$ ,  $n_i > 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , die wir nicht als Produkt von Primzahlen schreiben können. Wähle das kleinste dieser  $n_i$ . Nun ist  $n_i$  nicht prim und nach Voraussetzung größer 1, daher existieren  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $n_i = ab$ . Insbesondere gilt  $a, b < n_i$ , also gibt es nach der Wahl von  $n_i$  Primzahlen

$$\{p_1, \dots, p_l\} \subset \mathbb{P} \quad \{q_1, \dots, q_m\} \subset \mathbb{P} \quad (l, m \in \mathbb{N})$$

mit

$$a = \prod_{j=1}^l p_j \quad b = \prod_{s=1}^m q_s.$$

Damit erhalten wir

$$n_i = \prod_{j=1}^l p_j \cdot \prod_{s=1}^m q_s.$$

Diese Aussage steht im Widerspruch zur Voraussetzung.

*Eindeutigkeit:*

Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n = p_1 \cdot \dots \cdot p_n = q_1 \cdot \dots \cdot q_m$ .

Angenommen es gibt  $1 \leq i \leq n$ , so dass für alle  $1 \leq j \leq m$ ,  $p_i \neq q_j$  gilt.

Nach dem Lemma von Euklid gilt, dass

$$p_i | q_1 \cdot \dots \cdot q_m \quad \rightarrow \quad \exists j \text{ mit } 1 \leq j \leq m \quad \text{so dass } p_i | q_j.$$

Da  $p_i$  und  $q_j$  prim sind, gilt damit schon  $p_i = q_j$ . Diese Aussage steht im Widerspruch zur Annahme. Somit sind die Primfaktorzerlegungen  $\{p_i\}_{1 \leq i \leq n}$  bzw.  $\{q_j\}_{1 \leq j \leq m}$  gleich bis auf Reihenfolge. □

**Satz von Euklid.** Es gibt unendlich viele Primzahlen.

*Beweis.* Sei  $p$  eine beliebige Primzahl. Finden wir nun zu  $p$  eine größere Primzahl, dann ist die die Behauptung bewiesen. Es seien außerdem  $\{2 = p_1, 3 = p_2, \dots, p_n = p\} \subset \mathbb{P}$ , die ersten  $n$  Primzahlen, die kleiner gleich  $p$  sind.

Definiere nun

$$r := 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p + 1.$$

Mit dem *Fundamentalsatz der Arithmetik* existieren Primzahlen  $\{q_i\}_{1 \leq i \leq m}$  mit  $r = \prod_{i=1}^m q_i$ . Somit gilt  $r = 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot p_n \cdot p + 1 = \prod_{i=1}^m q_i$ . Demnach teilt  $q_1$  also  $r$ . Da  $p_i \nmid r$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gilt, ist  $q_1 \notin \{2, 3, \dots, p_{n-1}, p\}$ . Demnach ist  $q_1 > p_i$  für  $i = 1, \dots, n$ , also ist  $q_1 > p$ . □

## 11.2 Primzahlsieb des Eratosthenes

Nun kennen wir einige grundlegende Eigenschaften von Primzahlen und wissen, dass es unendlich viele von ihnen gibt. Die größte heute bekannte Primzahl ist  $2^{77232917} - 1$ . [Rev18] Wie können wir weitere Primzahlen finden?

Ein besonders vielseitiger und begabter griechischer Mathematiker, der sich mit dieser Frage auseinandersetzte, war ERATOSTHENES VON KYRENE (\*ca. 273 v. Chr. in Kyrene; †ca. 194 v. Chr. in Alexandria). Als Leiter der Bibliothek von Alexandria konnte er, im Auftrag der ägyptischen Könige aus der Dynastie der Ptolemäer, unter optimalen Bedingungen forschen und arbeiten. Er machte sich nicht nur mit der Ermittlung des ungefähren Erdumfangs einen Namen. Auch der erste Algorithmus zur Ermittlung von Primzahlen, das *Primzahlsieb des Eratosthenes*, lässt sich auf ihn zurückführen.

Im Folgenden wollen wir die Funktionsweise dieses Algorithmus verstehen. Wir wählen dazu eine obere Schranke  $S = 100$  bis zu der wir alle Primzahlen ermitteln wollen und betrachten alle natürlichen Zahlen kleiner  $S$ . Dann gehen wir diese Liste von unten nach oben durch. Dabei streichen wir jeweils alle Vielfachen der aktuellen Zahl und gehen dann weiter zur nächsten noch nicht gestrichenen Zahl.

Die 1 ist nach Definition keine Primzahl, daher beginnen wir mit der 2 und streichen, wie in Abb. 1.1 veranschaulicht, alle Vielfachen aus der Liste.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	15	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	20
21	<del>22</del>	23	<del>24</del>	25	<del>26</del>	27	<del>28</del>	29	30
31	<del>32</del>	33	<del>34</del>	35	<del>36</del>	37	<del>38</del>	39	40
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	45	<del>46</del>	47	<del>48</del>	49	50
51	<del>52</del>	53	<del>54</del>	55	<del>56</del>	57	<del>58</del>	59	60
61	<del>62</del>	63	<del>64</del>	65	<del>66</del>	67	<del>68</del>	69	70
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	75	<del>76</del>	77	<del>78</del>	79	80
81	<del>82</del>	83	<del>84</del>	85	<del>86</del>	87	<del>88</del>	89	90
91	<del>92</del>	93	<del>94</del>	95	<del>96</del>	97	<del>98</del>	99	100

Vielfache der 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	15	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	20
21	<del>22</del>	<del>23</del>	<del>24</del>	25	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	<del>29</del>	30
31	<del>32</del>	33	<del>34</del>	35	<del>36</del>	37	<del>38</del>	39	40
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	45	<del>46</del>	47	<del>48</del>	49	50
51	<del>52</del>	53	<del>54</del>	55	<del>56</del>	57	<del>58</del>	59	60
61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	65	<del>66</del>	<del>67</del>	<del>68</del>	<del>69</del>	70
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	75	<del>76</del>	77	<del>78</del>	79	80
81	<del>82</del>	83	<del>84</del>	85	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	90
91	<del>92</del>	93	<del>94</del>	95	<del>96</del>	97	<del>98</del>	99	100

Vielfache der 3

Nun betrachten wir die nächste noch nicht gestrichene Zahl und streichen alle Vielfachen der Zahl 3.



So fahren wir fort bis zur Wurzel unserer Schranke  $\sqrt{100} = 10$  und erhalten damit alle Primzahlen bis  $S$ , nämlich:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,

43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Alle Vielfachen gestrichen

Um zu verstehen, weshalb es genügt, lediglich die Vielfachen aller Zahlen kleiner  $\sqrt{S}$  zu streichen, betrachte folgenden

**Satz.** Jede natürliche Zahl  $x$  mit  $0 < x \leq 100$  hat mindestens einen Primfaktor  $q$  mit  $q \leq 10$ .

*Beweis.* Sei  $x \leq 100$ . Mit dem Fundamentalsatz der Arithmetik ist  $x = p_1 \dots p_n$ . Angenommen für die Primzahlen gelte, dass  $p_i > 10$  für alle  $1 \leq i \leq n$ . Dann ist

$$x = p_1 \dots p_n > 10^n > 10^2 = 100$$

im Widerspruch zu  $x \leq 100$ . □

### 11.3 Lucas-Lehmer-Test

Wie uns der *Satz von Euklid* zeigt, können wir niemals alle Primzahlen angeben. Dennoch sind Horden von Profi- und Hobbymathematikern damit beschäftigt, immer größere Primzahlen zu bestimmen. Das *Sieb des Eratosthenes* stellt sich sehr schnell als ineffizient heraus, da zu viele Operationen benötigt werden. Ein Algorithmus, der geeigneter für die Suche nach bisher unbekanntem Primzahlen erwiesen hat, ist der *Lucas-Lehmer-Test*. Mit ihm lassen sich sogenannte *Mersenne-Zahlen* auf die Primzahleigenschaft untersuchen und wird unter anderem im *Great Internet Mersenne Prime Search Project*<sup>7</sup> verwendet.

**Definition.** Eine **Mersenne-Zahl** ist eine Zahl der Form  $2^n - 1$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Wir bezeichnen die  $n$ -te *Mersenne-Zahl* mit  $M_n$ . Eine **Mersenne-Primzahl** ist eine *Mersenne-Zahl*, die eine Primzahl ist.

**Bemerkung.** Die ersten Mersenne-Zahlen sind

$$1, 3, 7, 15, 31, 63, 127.$$

Interessant ist, dass Mersenne-Zahlen sich im Dualsystem (d.h. zur Basis 2) ausschließlich aus Einsen zusammensetzen, z. B.  $M_3 = 7 = 111_2$ .

Um nun für eine *Mersenne-Zahl* festlegen zu können, ob es sich um eine Primzahl handelt, betrachte den

<sup>7</sup> <https://www.mersenne.org>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150
151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300
301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330
331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360
361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390
391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510
511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540
541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570
571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600

Abbildung 11.1: Primzahlen bis 600

**Satz von Lucas.** Sei die Folge  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definiert durch

$$r_1 = 4 \quad \text{und} \quad r_{k+1} = (r_k^2 - 2) \pmod{M_p} \quad (p \in \mathbb{P}).$$

Dann gilt für  $p \geq 3$ , dass

$$M_p \text{ ist Primzahl} \iff r_{p-1} = 0.$$

**Bemerkung.** Betrachte beispielsweise  $M(5) = 31$ . Dies ist eine Mersenne-Primzahl, denn der Satz von Lucas liefert,

$$r_1 = 4, \quad r_2 = 14, \quad r_3 = 8, \quad r_4 = 0.$$

## 11.4 Primzahlsatz

Wir wissen nun, dass unendlich viele Primzahlen existieren und dass wir jede natürliche Zahl als Produkt endlich vieler, eindeutiger Primzahlen schreiben können. Wir wissen jedoch nicht, wie viele Primzahlen es bis zu einer gegebenen Schranke  $S \in \mathbb{N}$  gibt. Man könnte sagen, wie *dicht* die Primzahlen in den natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  liegen.

Betrachten wir die Primzahlen bis  $S=600$ , so lässt sich auf den ersten Blick kein Muster erkennen.

Ein bedeutender Charakter für die mathematische Welt war JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (\*1777 in Braunschweig; †1855 in Göttingen). Er beschäftigte sich mit vielen Problemen und machte es sich zum Ziel, eine Gesetzmäßigkeit für die Verteilung der Primzahlen zu finden. Um dieses Problem mathematisch zu formulieren, brauchen wir folgende

**Definition.** Die Funktion

$$\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto \sum_{p \leq x} 1 \quad (p \in \mathbb{P})$$

heißt **Primzahlfunktion**.

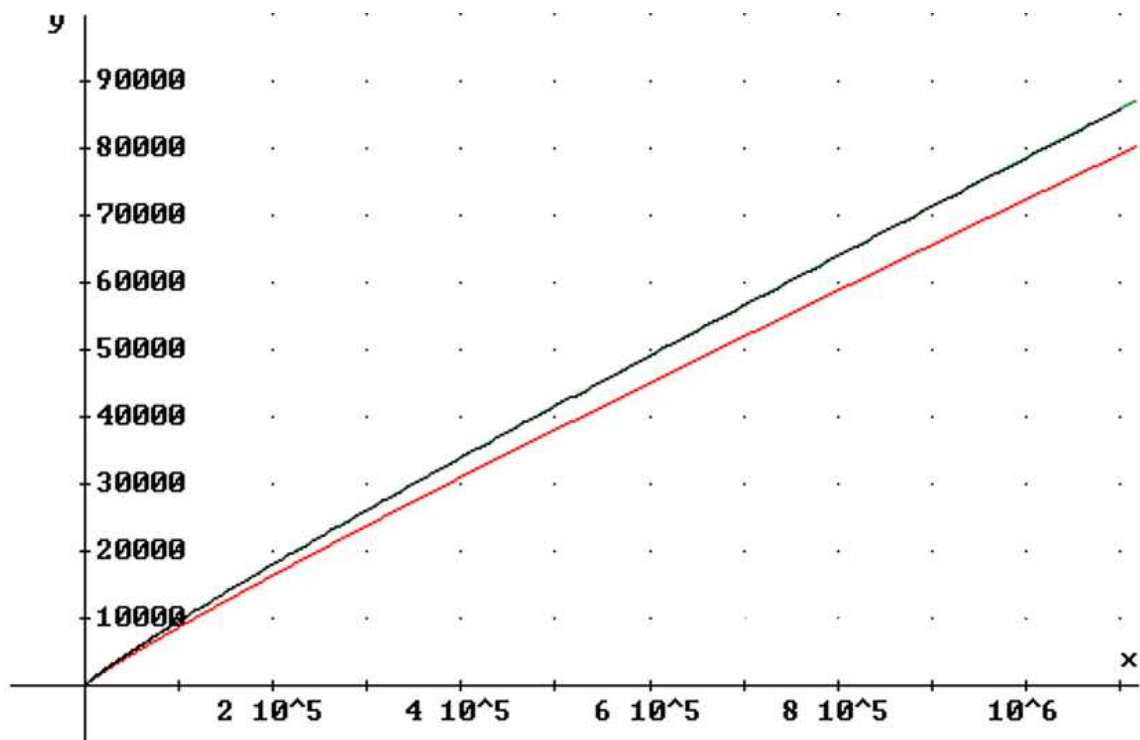


Abbildung 11.2: Um diese kompliziert anmutende Funktion zu verstehen, und um zu sehen, wie sie sich verhält, skizzieren wir die Primzahlfunktion  $\pi(x)$  und  $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

Die Frage, die GAUSS sich stellte, ist: Gibt es eine Funktion  $g$  mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{g(x)} = 1?$$

Das heißt, gibt es eine Funktion  $g(x)$ , die für  $x$  groß genug  $\pi(x)$  approximiert?

**Primzahlsatz**<sup>8</sup>. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = 1.$$

Eine bessere Approximation als  $\frac{x}{\ln x}$  liefert jedoch der sogenannte **Integrallogarithmus**

$$\text{Li}(x) := \int_2^x \frac{dt}{\ln t}.$$

Wir können diesen Satz hier nicht beweisen, wollen uns jedoch mit der Beweisidee und einer sehr groben Beweisskizze beschäftigen.

### 11.4.1 Die Riemannsche Vermutung

Einen engen Zusammenhang zum Primzahlsatz liefert die **riemannsche Zeta-Funktion**

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \forall s \in \mathbb{C}, \text{Re}(s) > 1.$$

<sup>8</sup>1793 bzw. 1798 von GAUSS und LEGENDRE vermutet. 1896 von HADAMARD und unabhängig davon von DE LA VALÉE POUSSIN bewiesen.

Hierbei handelt es sich um eine sogenannte *Dirichletreihe*<sup>9</sup>.

Diese Funktion scheint auf den ersten Blick keinen erkennbaren Zusammenhang zum Primzahlsatz zu besitzen. BERNHARD RIEMANN (\*1826 in Breselenz (Elbe); †1866 in Selasca, Verbania), ein Schüler von GAUSS, war der Erste, der diesen Zusammenhang formulierte. In seiner Arbeit *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe* [Rie59] setzte er die Verteilung der Primzahlen in Beziehung zum bereits bekannten **Euler Produkt** und zeigt die Gleichheit

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \forall s \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Interessant zu bemerken ist, dass BERNHARD RIEMANN sich nur in dieser 8-seitigen Arbeit mit Zahlentheorie beschäftigt. Diesem Gebiet der Mathematik war nicht sein Hauptaugenmerk gewidmet, dennoch gab er den Mathematikern bis heute mit seiner Arbeit eines der größten Probleme mit auf den Weg. Dies lässt sein großes Talent und seine mathematischen Fähigkeiten erahnen.

Wie wir oben gesehen haben, lässt sich die Zeta-Funktion nur für Werte  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 1$  als Dirichlet-Reihe auffassen, da die Reihe für alle anderen Werte divergiert. Um die Funktion auf ganz  $\mathbb{C}$  zu definieren, setzen wir die Funktion holomorph fort. Wir erhalten dann

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s) + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} s(s+1) \dots (s+k-2),$$

wobei  $B_n$  die  $n$ -te Bernoulli Zahl darstellt.<sup>10</sup> Stellen wir uns die komplexen Zahlen als Ebene vor, auf der wir stehen, so bildet der Graph der Zeta-Funktion ein Gebirge. Mit Bergen, deren Höhe gegen  $\infty$  geht, und Tälern, die teilweise so niedrig sind, dass wir hineinsehen können und teilweise nicht einmal annähernd Höhe Null erreichen.

**Bemerkung.** Betrachten wir die Zeta-Funktion nun für konkrete Werte, zum Beispiel für  $s = -2$ . Dann ist

$$\zeta(-2) = \frac{1}{-3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0.$$

Diese Nullstelle gehört zu den sog. *trivialen Nullstellen*. Allgemein gilt

$$\zeta(-2n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Riemann vermutete für die restlichen, nichttrivialen Nullstellen der Zeta-Funktion, folgende Eigenschaft:

$$\zeta(s) = 0 \quad \iff \quad \operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2} \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Die  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) = \frac{1}{2}$  nennen wir die **kritische Gerade**. Wenn wir in unserer Landschaftsmetapher uns an den Punkt  $(\frac{1}{2}, 0)$  in der Ebene  $\mathbb{C}$  stellen, könnten wir in  $i$ -Richtung sehr viele Täler sehen, von denen einige bis auf Höhe Null absinken.

<sup>9</sup>JOHANN PETER DIRICHLET (\*1805 in Düren; †1859 in Göttingen)

<sup>10</sup> Siehe zum Beispiel die Seite des Fachbereichs Mathematik der RWTH Aachen:  
<http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ws07/sft/v12mh.pdf>

Seit Jahrzehnten suchen Hobby- und Berufsmathematiker gleichermaßen immer größere<sup>11</sup> Nullstellen der riemannschen Zeta-Funktion. Waren im Jahr 1950 gerade einmal die ersten 1104 nichttrivialen Nullstellen bekannt, kennt man heute bereits über  $10^{13}$  Nullstellen der Funktion, die alle auf der kritischen Gerade liegen. Dies spricht stark für die Hypothese RIEMANN'S, als Beweis genügt diese Tatsache jedoch nicht.

### 11.4.2 Beweis des Primzahlsatzes

Im Jahre 1895 bewies HANS VON MANGOLDT (\*1854 in Weimar; †1925 in Danzig-Langfuhr), dass der Primzahlsatz äquivalent ist zu der Aussage:

*Die Zeta-Funktion hat für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) = 1$  keine Nullstellen.*

Es gilt also folgender Zusammenhang zwischen den verschiedenen Aussagen:

Primzahlsatz  $\iff$  Keine Nullstellen von  $\zeta$  mit Realteil 1.  
 Riemann-Hypothese  $\iff$  Alle nichttrivialen Nullstellen von  $\zeta$  haben Realteil  $\frac{1}{2}$ .

SOWOHL JACQUES HADAMARD (\*1865 in Versailles; †1963 in Paris) als auch CHARLES-JEAN BARON DE LA VALLÉE POUSSIN (\*1866 in Löwen; †1962 in Brüssel) konnten 1896 beweisen, dass die riemannsche Zeta-Funktion keine Nullstellen mit Realteil 1 besitzt. Damit bewiesen sie über VON MANGOLDT'S Erkenntnisse auch den Primzahlsatz.

Unabhängig von diesem Beweis des Primzahlsatzes blieb die Riemann-Hypothese als eigenständiges Problem zurück und ein Beweis wurde bis heute nicht gefunden.

## 11.5 Der Beweis des Primzahlsatzes – Eine Perle?

Der Beweis VON HADAMARD UND DE LA VALLÉE POUSSIN benutzt viele analytische Methoden. Damit ist er sehr weit entfernt von einem Beweis, der sich auf elementare Schlussfolgerungen zurückführen ließe, die schon einem Schulkind zugänglich wären. So waren zumindest PAUL ERDŐS (\*1913 in Budapest; †1996 in Warschau) und ATLE SELBERG (\*1917 in Langesund; †2007 in Princeton) der Meinung, es müsse einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes geben und beschäftigten sich intensiv mit der Suche nach diesem.

### Prolog im Himmel

Kleingewachsen, mit krausem, grauem Haar, steht er da, mit Hornbrille und nachdenklichem Blick. Viel geht vor in diesem Kopf, er denkt, unablässig, sodass sogar die Einführung seiner Person in dieses Stück, von ihm erdacht wird. Es ist PAUL ERDŐS, der da steht und denkt. Seine Familie stellt er uns im Geiste vor, die zwei Schwestern, vor seiner Geburt verstorben und seine Eltern, beide Lehrer der Mathematik und jüdisch religiös, doch frei denkend wie auch er jetzt. Sein Lebenslauf, mit einem metaphorischen Projektor abgespielt, zieht an ihm vorüber. **Another roof,**

<sup>11</sup>das heißt mit immer größerem Imaginärteil

**another proof** stünde über dem biographischen Film seines Lebens. Nun will er diese Daten schnell vorüber denken: „Geboren am 26.3.1913 in Budapest, angestellt als Mathematiker in Princeton, dort für zu unkonventionell gehalten... Mein Leben lang gereist, von Mathematiker zu Mathematiker, mit 2 Koffern und reichlich Koffein im Blut. Wirklich gut arbeiten konnte ich nur in Gruppen, Eigenbrötler bin ich nun wirklich nicht, aber auch solche Menschen soll es geben.“

Davon fühlt sich nun ein anderer unter dem Firmament ganz besonders angesprochen. Es ist ATLE SELBERG, kein Mann der großen Worte. Er wurde in Langesund, Norwegen geboren, kam nach dem Krieg nach Princeton und beschäftigte sich viel mit dem Gebiet der Zahlentheorie. Im Gegensatz zu Herrn ERDŐS arbeitete er immer gern alleine, auf der Suche nach elementaren Beweisen konnte er keine Störung durch irgendwelche Nervensägen gebrauchen. Hier will er einhaken: „Mann, du hast meine Fieldsmedaille gar nicht erwähnt! Ich bin Fieldspreisträger, dass habe ich wohlgemerkt alleine geschafft!“

Offensichtliches Missfallen ob dieser Bemerkung von Seiten ERDŐS. Bevor die Situation im Streit eskaliert, wollen wir mit dem ersten Akt unserer kurzen Geschichte beginnen.

### AKT 1: Flashback

Starren Blickes, konzentriert, grübelt der junge ERDŐS über den Primzahlsatz. Begeistert von der Genialität GAUSS' und dessen einfachem Gesetz, das die Verteilung der Primzahlen beschreibt, fällt ihm auf, dass man die höhere Mathematik nicht beherrschen muss, um die Schlussfolgerungen zu verstehen.

„Mathematisches Handwerkszeug, das ein Gymnasiast verstehen könnte, Eigenschaften ganzer Zahlen wie Bruchrechnen, der Logarithmus, Grenzwerte.“ Doch ein Beweis dazu, der ebenfalls im Lehrplan einer Oberschule aufgenommen werden könnte, fehlt. HADAMARD hat einen Beweis liefern können, ja, doch über den steinigem, unangenehmen Umweg über die Funktionentheorie mit Cauchyintegral, Satz von Weierstraß, um nur zwei Beispiele zu nennen. „Manche behaupten, nur so sei ein Beweis überhaupt möglich. Doch ich werde sie eines Besseren belehren.“

„My mind is open“

### AKT 2: Starpitcher

*Nach dem Krieg. SELBERG arbeitet alleine in seinem Büro in Norwegen. HERMANN WEYL, ein Kollege, betritt den Raum.*

SELBERG: Wer sind sie?!

WEYL: Mein Name ist HERMANN WEYL, ich bin Mathematikprofessor in Princeton und habe ihren schönen und geistreichen Artikel über Zahlentheorie gelesen. Äußerst originell, ich bin gekommen, um sie mit nach Princeton zu nehmen, dort forschen sie mit den angesehensten Mathematikern der Welt.

SELBERG: Ich will aber nicht mitkommen nach Princeton.

WEYL: Sie haben keine Wahl, der Mathematik wegen.

**AKT 3: Reden ist Silber – Schweigen ist Gold**

*Mathematik wurde im Laufe der Geschichte bis auf wenige Ausnahmen selten alleine entdeckt und betrieben. Trotz seiner distanzierten Art wurde so auch SELBERG das Opfer, aus seiner Sicht, der gemeinsamen Arbeit.*

SELBERG: Herr TURÁN (Mathematiker, \*1910; †1976), haben sie ein Problem? Was tun sie in meinem Büro? Was erlauben Sie sich, ihren verständnislosen Blick auf meine Aufschriebe zu richten! Sie werden nie erkennen können, was Sie hier vor sich sehen, also hüten Sie sich mich um eine Teamarbeit zu bitten! Mit elementaren Maßnahmen konnte ich eine Formel finden, Fundamentalformel habe ich sie genannt. Sie soll mir helfen, den Primzahlsatz endlich elementar zu beweisen!

Stellen Sie nun ihre Frage, dass wir dieser unnötige Zusammenkunft ein Ende setzen können!

*Man findet sich zusammen im Institute for Advanced Studies in Princeton, um TURAN in seinem Seminar zu lauschen. Hätte er die Fundamentalformel dort nicht erwähnt, das hätte SELBERG, der in Kanada weilte, sicher besser gefallen. Doch nicht ERDŐS, der die Bemerkung direkt aufgriff und für sich zu verwenden wusste.*

**AKT 4: Intrigen**

SELBERG ist wieder in Princeton und nicht sehr glücklich darüber, dass ERDŐS nun mit seiner Fundamentalformel arbeitet. Das mathematische Äquivalent eines Spielverderbers ist das Gegenbeispiel, eben ein solches möchte er Erdős präsentieren, um ihn aus der Bahn zu werfen.

SELBERG: Herr ERDŐS! Sehen Sie, ich habe neue Erkenntnisse...

*Doch dieser Einfall bringt nicht die gewünschte Wirkung. Anders als erwartet versteift sich ERDŐS in dieses Problem und macht wider SELBERGS Erwartung große Fortschritte. Er stellt eine allgemeinere Form der Fundamentalformel auf und SELBERG kommt mit Hilfe dieser auf einen elementaren Beweis des Primzahlsatzes.*

An dieser Stelle muss ich als Erzähler kurz einhaken. Namen, Rang und Anzahl der Publikationen sind dem Durchschnittsmathematiker selten wichtig. Strebt er doch nach Höherem als Ruhm und Ehre, so kommt es auch selten zu Streitigkeiten zwischen gemeinsam forschenden Mathematikern. Hier dürfen wir einen Streit erleben, der sich im Laufe der Geschichte festgefressen hat und durch seinen Seltenheitswert eine gewisse Berühmtheit erlangt hat.

**AKT 5: Erfolge**

*Der Beweis wurde notiert, jedoch noch nicht veröffentlicht. Wie üblich versendet ERDŐS einige Postkarten, um von seinem Erfolg, zumindest ansatzweise zu berichten. Während SELBERG lediglich mit seinem Bruder über die kürzliche Errungenschaft spricht.*

*Treffen sich zwei Mathematiker.*

EINER: Schon gehört, was ERDŐS Grandioses hinbekommen hat?

ANDERER: Ohja, er hat es tatsächlich geschafft. Zu SELBERG, *der etwas abseits steht*: Hey SELBERG, hast es mitbekommen? Der elementare Beweis des Primzahlsatzes wurde von ERDŐS und irgendeinem skandinavischen Mathematiker gefunden.

### Epilog im Himmel

SELBERG: Was dachte er sich denn? Dass ich das einfach auf mir sitzen lasse? Sollte er den ganzen Ruhm etwa alleine einstreichen? Natürlich habe ich den Hauptteil der Arbeit geleistet, aber er konnte sich ja nicht zusammenreißen und musste allen von *seiner* tollen Leistung erzählen. Ist doch verständlich, dass ich etwas dagegen tun musste, letzten Endes ist er selbst Schuld, dass sein Name nicht unter meiner Veröffentlichung des Beweises steht.

ERDŐS: ...schließlich war es meiner Meinung nach dein Dickschädel, der uns zurückgehalten hat. Hättest du von Anfang an mit mir zusammengearbeitet, wäre ich viel früher auf den elementaren Beweis gekommen.

SELBERG: Du kantiger, alter Mann, bist du fertig? Können wir das Thema endlich ruhen lassen? Ich hab die Fieldsmedaille, du nicht. Daran werden wir hier oben auch nichts mehr ändern. Lass uns lieber sehen, was TERENCE TAO treibt. Ich habe gehört, er arbeitet am Beweis der Riemann-Hypothese.

ERDŐS: Ja schnell! Vielleicht kannst du ihn ja auch um seinen Ruhm bringen.

Wir sehen, das Problem mit dem Beweis des Primzahlsatzes und insbesondere der Riemann-Hypothese erhitzt die Gemüter auch nach vielen Jahren noch. Doch ist diese Vermutung nicht die einzige offene Fragestellung der modernen Arithmetik. Einer der klügsten Köpfe, der sich zur Zeit mit der Verteilung von Primzahlen und der Arbeit von Riemann beschäftigt, ist der bereits erwähnte TERENCE TAO (\*1975 in Adelaide). Er untersucht unter anderem das Vorkommen von Primzahlzwillingen, also Paaren von Primzahlen  $p, q \in \mathbb{P}$  mit  $p - q = 2$ , z. B. (3, 5), (5, 7), (11, 13). Weitere Informationen zu aktueller Forschung und Forschungsergebnissen finden Sie zum Beispiel unter <https://terrytao.wordpress.com>.

## Literaturverzeichnis

- [dS06] SAUTOY, MARCUS DU: *Die Musik der Primzahlen*. Deutscher Taschenbuch Verlag, 2006.
- [MS16] MAZUR, BARRY und WILLIAM STEIN: *Prime Numbers and the Riemann Hypothesis*. Cambridge University Press, 2016.
- [Rev18] REVELL, TIMOTHY: *Largest prime number ever found has over 23 million digits*. New Scientist, 4. Januar 2018.



- [Rie59] RIEMANN, BERNHARD: *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859.
- [Sil04] SILBERMANN, NICOLE: *Warum Zikaden Primzahlen lieben*. Die Welt, 13. Juli 2004.
- [Sp16] *Neue Rekord-Primzahl entdeckt*. Spiegel, 20. Januar 2016.
- [Wik18] WIKIPEDIA: *Magicicada, Bernhard Riemann, André Weil, Carl Friedrich Gauß, Johann Peter Dirichlet, Paul Erdős, Atle Selberg*, Januar 2018.



d-fine ist ein führendes europäisches Beratungsunternehmen mit Standorten in Berlin, Düsseldorf, Frankfurt, London, München, Wien und Zürich. Mit über 700 hochqualifizierten Beratern der Fachrichtungen Physik, Mathematik, Informatik, Wirtschaftsingenieurwesen sowie weiterer Natur- und Wirtschaftswissenschaften unterstützen wir unsere Kunden – Banken, Versicherungen und Industrieunternehmen – bei anspruchsvollen quantitativen, prozessualen und technologischen Herausforderungen. Strategieberatung, Fachberatung, Technologieberatung: d-fine ist alles in einem. Als wachstumsstarkes Unternehmen suchen wir zur Verstärkung unseres Consulting-Teams

# ABSOLVENTEN (M/W)

# PROFESSIONALS (M/W)

# PRAKTIKANTEN (M/W)

Wenn Sie gerade studieren, die Universität abgeschlossen oder bereits Berufserfahrung gesammelt haben, dann freuen wir uns auf Ihre Bewerbung über unser d-fine Stellenportal oder alternativ per E-Mail an: [careers@d-fine.de](mailto:careers@d-fine.de)

**d-fine. analytisch. technologisch. quantitativ.**

[www.d-fine.com/karriere](http://www.d-fine.com/karriere)

Berlin, Düsseldorf, Frankfurt, London, München, Wien, Zürich

d-fine



Casa per ferie "Il Rosario"



Deutsche Botschaft beim Heiligen Stuhl