Mathematik und Fehler – Irrtum – Widerspruch

Das Romseminar 2013

Es gibt triviale Wahrheiten und es gibt große Wahrheiten. Das Gegenteil einer trivialen Wahrheit ist einfach falsch. Das Gegenteil einer großen Wahrheit ist auch wahr.

NIELS BOHR (1885 – 1962)

Team Dresden

Team Siegen

Team Tübingen

Redaktion:

Romy Ebert romy_ebert@yahoo.de	Silvia Becher silviabecher@aol.com	Martin Adler maad@fa.uni-tuebingen.de

Organisatoren:

Britta Dorn britta.dorn@idbm.de	Markus Haase m.h.a.haase@tudelft.nl	Michael Korey Michael.Korey@skd.museum
Rainer Nagel rana@fa.uni-tuebingen.de	Gregor Nickel nickel@mathematik.uni-siegen.de	Markus Wacker wacker@informatik.htw-dresden.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Die Welt kann nur durch die Leute verbessert werden, die zu ihr im Widerspruch stehen.

Robert Musil (1880 – 1942)

Nach dem üblichen Verständnis sind Fehler in der Mathematik zwar ein häufiges, aber möglichst schnell auszumerzendes Ereignis; und „natürlich“ sind Widersprüche unbedingt zu vermeiden. Das Romseminar konnte jedoch zeigen, dass es sich durchaus lohnt, die Phänomene Fehler, Irrtum, Widerspruch in Mathematik und Informatik etwas länger und genauer zu betrachten. So wurden unter anderem die folgenden Fragen thematisiert:

- Welche (möglicherweise sogar produktive) Rolle spielen Fehler und Widersprüche in der Geschichte der Mathematik und der Naturwissenschaften? Welche großen Irrtümer gab es und was lässt sich daraus lernen?
- Welche wichtigen Kontroversen über Mathematik gab es und welche einander widersprechende Positionen wurden dabei vertreten?
- Welche Rolle spielen Fehler in der Informatik und inwiefern können Computer Fehler machen?
- Welche Rolle spielt eine genaue Analyse (typischer) Fehler für das Lehren und Lernen der Mathematik?

Der vorliegende Band enthält die schriftliche Ausarbeitung eines Teiles der im Romseminar 2013 gehaltenen studentischen Vorträge und repräsentiert so die Vielfalt der Themen.

Im Jahr 2013 wurde das Romseminar bereits zum siebten Mal in Kooperation der Hochschulen in Dresden, Siegen und Tübingen veranstaltet. Ein Nachtreffen im Elb-Florenz Dresden, das vom Hochwasser glücklicherweise weitgehend verschont blieb, mit einer Besichtigung des neueröffneten Mathematisch-Physikalischen Salons ergänzte die Woche in der Tiber-Stadt.

Ein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Max-Eugen Kemper für eine ebenso kunstsinnige wie geistvolle Führung in die Kirche Santo Stefano Rotondo, Herrn Dr. Joachim Blüher für seine wie stets eindrucksvolle Präsentation der Deutschen Akademie *Villa Massimo* und des in ihr wehenden künstlerischen Geistes, Herrn Prof. Dr. Bernd Eberhardt für filmreife Mathematik und schließlich Herrn Prof. Dr. Klaus Freyberger für eine faszinierende Führung auf das Forum Romanum, mit der das Romseminar einen würdigen Ausklang fand.

Das Romseminar durfte auch im Jahr 2013 die bewährte Gastfreundschaft Römischer Institutionen genießen und auch auf diese Weise verschiedene Facetten der Stadt erkunden. Im einzelnen gilt unser herzlicher Dank der *Deutschen Kunstakademie Villa Massimo*, dem *Istituto Italiano di Studi Germanici (Villa Sciarra)* und vor allem der traditionsreichen *Accademia Nazionale dei Lincei*.

Für die finanzielle Unterstützung danken wir schließlich dem DAAD, der Universität Siegen, dem Universitätsbund, dem Mathematischen Institut Tübingen sowie dem Akademischen Auslandsamt und der Fakultät Informatik der HTW Dresden.

Rainer Nagel	Gregor Nickel	Markus Wacker
Universität Tübingen	Universität Siegen	HTW Dresden

20 Jahre Romseminare

Romseminar 2013

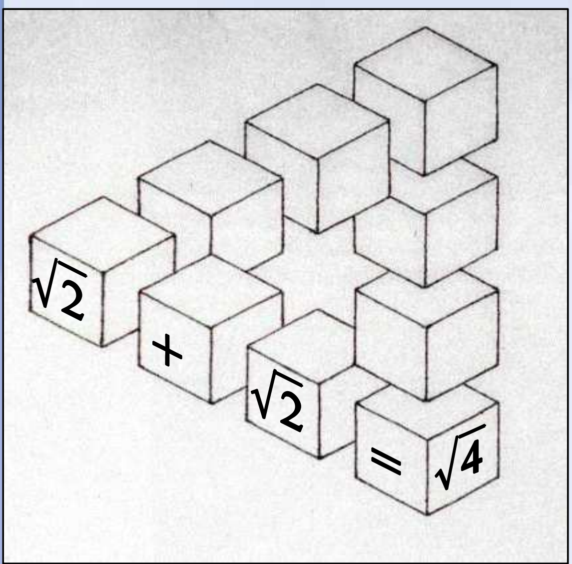
24. Februar – 3. März 2013

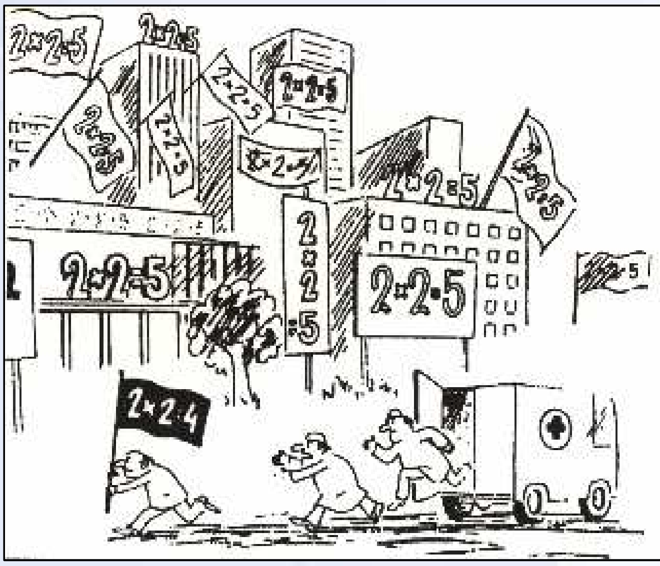
Mathematik und

Fehler – Irrtum – Widerspruch

Es gibt triviale Wahrheiten und es gibt große Wahrheiten.
Das Gegenteil einer trivialen Wahrheit ist einfach falsch.
Das Gegenteil einer großen Wahrheit ist auch wahr.

Niels Bohr (1885 - 1962)





Rainer Nagel (Tübingen)

Britta Dorn (Tübingen)

Markus Wacker (Dresden)

Markus Haase (Delft)

Michael Korey (Dresden)

Gregor Nickel (Siegen)

Rainer Nagel (Tübingen)	Markus Wacker (Dresden)	Gregor Nickel (Siegen)	Markus Haase (Delft)	Michael Korey (Dresden)	Britta Dorn (Tübingen)

Romseminar 2013

Mathematik und

Fehler – Irrtum – Widerspruch

24. Februar bis 3. März 2013

„Es gibt triviale Wahrheiten und es gibt große Wahrheiten. Das Gegenteil einer trivialen Wahrheit ist einfach falsch. Das Gegenteil einer großen Wahrheit ist auch wahr."

Niels Bohr (1885–1962)

„Die Welt kann nur durch die Leute verbessert werden, die zu ihr im Widerspruch stehen."

Robert Musil (1880–1942)

Programm

Sonntag, 24. Februar 2013

Ankunft in Rom, Bezug der Unterkunft, Kennenlernen beim Pizzaessen

Montag, 25. Februar 2013 – Accademia dei Lincei / Baffetto

9^{30} Begrüßung, Vorstellungsrunde

10^{30} **Jenna-Lin Djaja, Julia Fischer, Hanna Schramm:** *Niemand ist fehlerlos! – Wie die Jagd nach Fehlern Lehrer, Schüler und Studenten weiterbringt.*

12^{00} **Silvia Becher:** *Schwierigkeiten von Studierenden beim Beweisen – Eine Fehleranalyse einer Klausuraufgabe.*

13^{00} – Mittagspause –

14^{00} **Damian Hettmanczyk:** *Reiner Zufall – Fehler und Zufall bei wissenschaftlichen Entdeckungen.*

15^{00} **Patricia Jährig, Jenny Reinhardt:** *Ostia – Probleme bei der Rekonstruktion eines antiken Hafens.*

16^{30} **Caroline Albrecht:** *Römische Zahlen – trial and error.*

19^{00} Cena (Pizzeria Da Baffetto, Via del Governo Vecchio 114, Roma)

Dienstag, 26. Februar 2013 – Accademia dei Lincei / Santo Stefano Rotondo

9^{30} **Robert Fischer, Daniel Leyhr, Stephan Walentin:** *Fehler im Sport, Mathematik als Schiedsrichter.*

11^{00} **Jake Desmond, Sebastian Schneckenburger:** *Vier Farben genügen, falls der Computer sich nicht irrt.*

12^{30} **Michael Wegner:** *Irren ist menschlich, Computer können das nicht.*

13^{30} – Mittagspause –

15^{00} Kunstgeschichtliche Führung
Prälat Prof. Dr. Max-Eugen Kemper: *Santo Stefano Rotondo.*

Mittwoch, 27. Februar 2013 – Accademia dei Lincei / Scavi

9^{00} **Matthis Leicht:** *Wissenschaftliches Denken im Alltag – Das passt.*

10^{00} **Retha Heymann:** *Gibt es große Wahrheiten in der Mathematik?*

11^{00} **Kari Küster, Frederik Westermaier:** *Tertium non datur. Widerspruch!*

12^{30} – Mittagspause –

13^{00} Besuch des Petrusgrabes und der Nekropole unter der Vatikanischen Basilika
Treffpunkt am Petersdom bei der Schweizer Garde (links der Haupttreppe); Führungen ab 13:15.

Donnerstag, 28. Februar 2013 – Villa Massimo / Il Rosario

9^{30} Führung
Dr. Joachim Blüher: *Die Villa Massimo.*

10^{00} **Martin Adler, Miriam Bombieri, Johannes Winckler:** *Galileo Galilei: Eppur si muove, oder doch nicht?*

11^{30} **Barbara Ricken, Barbara Stüßer:** *Revolution oder Evolution? – Was prägt die Wissenschaft Mathematik?*

13^{00} – Mittagspause –

14^{00} **Claudia Bergmann:** *KUNSTfehler – Fehler oder Absicht in der Malerei.*

15^{00} Emotional Verirrte Klänge Im Widerspruch.
Eine Musikalische Matinée.
Julia Harle (moderierend)
Carolin Albrecht, Kari Küster, Julia Harle, Johannes Winckler (konzertierend)

20^{00} fehler hafte wider worte – irrtum!
Eine Literarische Soirée.
Markus Haase, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Markus Wacker (rezitierend)

Freitag, 1. März 2013 – Villa Sciarra / Trattoria Moderna

9^{30} Abschlussgespräch

11^{00} **Rainer Nagel, Markus Wacker:** *20 Jahre Romseminar.*

11^{30} **Prof. Dr. Bernd Eberhardt:** *Filmreife Mathematik.*

12^{00} – Mittagspause –

20^{00} Cena sociale (Trattoria Moderna, Vicolo dei Chiodaroli 16, Campo de' Fiori, Roma)

Samstag, 2. März 2013 – Forum Romanum

10^{00} Führung
Prof. Dr. Klaus Freyberger: *Das Forum Romanum.*

Sonntag, 3. März 2013

Abreise

Niemand ist fehlerlos

—

Wie die Jagd nach Fehlern Lehrer, Schüler und Studenten weiterbringt

Jenna-Lin Djaja
Hanna Schramm
Julia Fischer

Einleitung

Das Machen von Fehlern ist ebenso Bestandteil des Schulalltags, wie das Finden einer richtigen Lösung. Das ist der Grund, warum wir uns als Lehramtsstudenten näher mit Fehlern be-schäftigen wollten. Auf welche Weise sollten Lehrer mit Fehlern umgehen? Welche Schemata stecken hinter gemachten Fehlern? Wie können Schüler und Schülerinnen aus ihren Fehlern lernen? Was ist eigentlich ein Fehler?
Susanne Prediger und Gerald Wittmann definieren einen Fehler in der Vorversion Ihres Artikels „Aus Fehlern lernen – (wie) ist das möglich?“ folgendermaßen: „Als Fehler beschreibt man Äußerungen, Sachverhalte oder Prozesse, wenn sie von einer im Unterricht (. . .) bereits etablierten Norm abweichen.“ Darüber hinaus definieren sie andere Fachbegriffe der Fehleranalyse. Sie unterscheiden zwischen Fehlerphänomen, Fehlermuster, Fehlerursachen, syntaktischen oder semantischen Fehlern, sowie einem Flüchtigkeitsfehler oder systematischen Fehler. Wichtig ist dabei zu beachten, dass ihre Definitionen für den Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht bestimmt sind und somit auf diese Fachrichtung ausgerichtet. So definieren Sie ein Fehlerphänomen als sichtbares Produkt eines Wahrnehmungs- und Denkprozesses im alltäglichen Unterricht (z.B. in mündlicher Kommunikation oder schriftlichen Bearbeitungen). Von einem Fehlermuster sprechen Sie, wenn entweder bestimmte Fehlerphänomene bei mehreren Schülern gleich auftreten oder wenn hinter einem individuellen Fehlerphänomen eine gewisse innere Logik erkennbar ist. Während Fehlermuster ergründen WIE SchülerInnen häufig falsch vorgehen, ergründen Fehlerursachen WARUM sie dies tun. Fehlerursachen werden meist im direkten Gespräch erschließbar.

Flüchtigkeitsfehler entstehen durch mangelnde Konzentration oder Fehlleistungen des Arbeitsgedächtnisses, die z.B. durch Überlastung hervorgerufen werden. Sie können von den SchülerInnen sofort korrigiert werden, da sie den Fehler als solchen erkennen. Systematische Fehler hingegen liegen vor, wenn in Aufgaben desselben Typs wiederholt dasselbe Fehlermuster zu erkennen ist. Sie können nicht sofort korrigiert werden, da sich als Fehlerursache meist stabile falsche Konzepte ausmachen lassen und diese für den Schüler/die Schülerin im Sachzusammenhang als sinnvoll und richtig erscheinen.

Unterschieden wird dabei prinzipell noch zwischen syntaktischen und semantischen Fehlern. Syntaktische Fehler treten beim Rechnen mit festen Regeln auf, während semantische Fehler auf der Ebene der Bedeutungen mathematischer Inhalte verortet und oft durch Fehlvorstellungen bedingt sind.

Beispiele verschiedener Fehler

Die folgenden Beispiele von Fehlern im Mathematikunterricht verdeutlichen die Komplexität eines Fehlers.

Aufgabe:

Ein Kilogramm Mandarinen kostet 3,25 Euro.
Kerstin will sich 0,5 kg kaufen.

- Was muss sie zahlen?
- Berechne die gleiche Aufgabe auch für folgende Werte:

Preis in Euro	Menge in kg
1,50	1,5
3,30	2,5
3,20	0,6

Lösungen

Lilly	Jan
$3,25 \cdot 0,5 = 0,125$ $1,50 \cdot 1,5 = 1,250$ $3,30 \cdot 2,5 = 6,150$ $3,20 \cdot 0,6 = 0,120$	$3,25 \div 0,5 = 6,50$ $1,50 \cdot 1,5 = 2,25$ $3,30 \cdot 2,5 = 8,25$ $3,20 \div 0,6 = 5,33\ldots$

Fehlermuster

Lilly	Jan
Lilly multipliziert offenbar jeweils die Stellen vor dem Komma und die Stellen nach dem Komma getrennt voneinander. Es scheint als ob Lily ihre Ergebnisse nicht näher betrachtet hat, denn sonst wäre ihr sicherlich aufgefallen, dass ca. 12 Cent für ein halbes Kilo Mandarinen sehr unrealistisch wären.	Aus Sicht des Lehrers multipliziert Jan immer wenn der Proportionalitätsfaktor größer 1 ist, andernfalls dividiert er. Auf Nachfrage des Betrachters auf der Suche nach der Fehlerursache antwortet Jan: „Multiplizieren vergrößert und dividieren verkleinert!“ Dabei fällt auf, dass er seine Aussage nicht mit seinen Ergebnissen verglichen hat.

Fehlerursachen

Lilly	Jan
Da der Lehrplan vor Proportionalität und Dreisatz oftmals Bruchrechnen als größeren Themenkomplex vorgibt, erscheint es möglich, dass Lily Regeln der Multiplikation von Brüchen verwendet („Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“ hier: „Stellen vor dem Komma mal Stellen vor dem Komma, Stellen nach dem Komma mal Stellen nach dem Komma“). Es liegt sowohl ein syntaktischer Fehler vor, nämlich das falsche Übertragen von Strategien, sowie ein semantischer Fehler, der sich durch fehlendes Stellenwertverständnis äußert.	Bei den Natürlichen Zahlen würde sich Jans Aussage „Multiplizieren vergrößert und dividieren verkleinert!“ immer bestätigen. Das ist der Grund, warum auch er, aufgrund seiner alten Vorstellungen von Division und Multiplikation, fehlgeleitet wurde (vgl. Fehlermuster). Es scheint ein semantischer Fehler vorzuliegen, da Jan keine stabil aufgebauten inhaltlichen Vorstellungen zur Multiplikation und Division hat.

Fehlerbearbeitung

Zur Bearbeitung der Fehler und zum Vermeiden eines erneuten Auftretens, sollte man bei Lily das Stellenwertverständnis (z.B. Anordnungen auf dem Zahlenstrahl) und bei Jan generelle Grundvorstellungen im Bereich der Multiplikation und Division stabilisieren. Des Weiteren wäre das Vergleichen der Ergebnisse mit ähnlichen Aufgaben denkbar, um auf diese Weise den Fehler zu Kontrastieren und in einen Kontext einzubetten. Möglich wäre zudem eine genauere Betrachtung der Fehler im Zusammenhang mit dem Sachkontext. Auf diese Weise erscheinen unrealistisch wirkende Ergebnisse häufig direkt als „falsch“.

Das diagnostische Gespräch

Das diagnostische Gespräch geht auf Jean Piaget (1896-1980) zurück. Seine Intention war es, etwas über Denkprozesse von Schülern zu erfahren, die sich hinter richtigen und falschen Lösungen der Kinder verbergen.
Grundsätzlich geht es im diagnostischen Gespräch nicht darum, dass Kinder durch geschickte Fragestellung direkt zur Lösung finden. Mehr soll man als Gesprächspartner etwas von den Schülern lernen.
Dabei soll man dem Schüler keine direkte Rückmeldung wie „Falsch!“ oder „Das hätte ich nicht so gemacht.“ geben. Zurückhaltung und Rücksicht auf die Sensibilität des Kindes sind erforderlich, sowie das Fragen nach Erklärungen von richtigen und falschen Ergebnissen. So wird der Schüler nicht direkt eingeschüchtert und es hat weniger Angst, seine Gedanken dem Gesprächspartner offenzulegen.

Um ein solches Gespräch durchzuführen ist es notwendig, eine angenehme Atmosphäre zu schaffen. Dies erreicht man, indem man nicht jeden Rechenschritt hinterfragt. Beim Abschluss eines längeren Rechenweges kann gefragt werden, wie der Schüler auf das Ergebnis gekommen ist, jedoch sollte diese Frage überlegt formuliert sein.

Die Frage „Wie hast du das gerechnet?“ ist zum Beispiel problematisch, da vorausgesetzt wird, dass der Schüler gerechnet hat, was nicht unbedingt der Fall sein muss. Viele Schüler haben dazu das Problem, dass sie sich nicht mehr daran erinnern, wie sie zu dem Ergebnis gekommen sind. Eine bessere Formulierung wäre „Kannst du sagen, wie du das herausgefunden hast?“ oder „Weißt du noch wie..?“. Diese Fragen stellen eine doppelte Anforderung an den Schüler. Er muss die Aufgabe bearbeiten und seine Gedanken verbalisieren.

Eine unangenehme Situation, welche auch viele Nachhilfelehrer kennen, ist das lange Schweigen. Eine Ursache dafür kann sein, dass das Kind über die Aufgabe nachgedacht hat, aber zu einem Ergebnis gekommen ist und es ihm unangenehm ist, dies zu offenbaren. Ebenfalls kann es unsicher über sein Ergebnis sein und äußert sich sicherheitshalber lieber nicht oder das Kind benutzt einen zeitaufwändigeren Lösungsweg als den, den man selbst wählen würde. Oft ist der letztgenannte Grund der Fall, weshalb der Gesprächspartner sehr viel Geduld aufbringen muss.

Dem Gesprächspartner stellt ich nun auch die Frage, was er tun soll, wenn dem Schüler ein Fehler unterläuft. Dabei wandert er auf einem schmalen Grat zwischen Eingreifen und nicht eingreifen. Um auf den individuellen Algorithmus des Schülers zu kommen, muss, wie schon erwähnt nachgefragt werden. Um den Schüler nun auf einen Fehler seinerseits aufmerksam zu machen kann man einen kognitiven Konflikt erzeugen. Würde man Jan aus dem Beispielen im vorherigen Kapitel nun darauf hinweisen, das sich seine Zahl durch dividieren doch nicht verkleinert, könnte er von alleine auf seinen Denkfehler kommen.

Der Schüler ordnet den Gesprächspartner immer einer bestimmten Rubrik zu, wie „Lehrer“ oder „Erwachsener“ und es ist gewohnt, dass diese Personen immer eine gewisse Antworterwartung haben. Speziell Lehrpersonen, so die Erfahrung vieler Kinder wollen selten wissen, wie Kinder denken, sondern stattdessen ihren Leistungsstand überprüfen. Die Orientierung der Kinder an den Erwartungen des Gesprächspartners muss in die Auswertung von dem Gspräch mit berücksichtigt werden.

Es gibt die Möglichkeit Einzel-, jedoch auch Gruppengespräche durchzu-führen. In einem Gruppeninterview fühlen sich Schüler wohler, da sie nicht alleine sind, jedoch kann ein Schüler die anderen ablenken. Es ist schwer, den Überblick über die Gedanken alle Schüler zu behalten, jedoch kommt ein Gruppengespräch einem wünschenswertem Unterricht sehr nahe, da von- und miteinander statt lehrerzentriert gelernt wird. Die Arbeit kann zwischen den Schülern aufgeteilt werden, sodass Schüler bei Lösungsstrategien und Erklärungen auf vorangegangene Äußerungen der Mitschüler zurückgreifen können. Jedoch kann es dabei auch vorkommen, das ein Schüler die Gruppe durch sein Verhalten oder seine Fachkenntnis dominiert und andere Schüler zurückfallen.

Der genaue Fortgang des Gesprächs wird durch das Kind bestimmt. Es entscheidet, wie schnell das Gespräch voranschreitet.
Dazu sollte man dem Kind auch das Gefühl geben, dass es nun in keiner Prüfungssituation ist. Der Gesprächspartner sollte dem Kind klarmachen, dass er von ihm lernen will.

Man muss immer damit rechnen, dass der Schüler die Aufgabe anders versteht, als sie gemeint war. Eine falsche Antwort könnte aus der Perspektive des Kindes richtig sein. „Fehlerhaftes“ Denken beruht nicht selten auf einer anderen und häufig unerwarteten Sicht des Sachverhaltes. Ebenso muss der Gesprächspartner es ertragen, wenn „fehlerhafte Äußerungen“ nicht unmittelbar berichtigt werden.

Bei der Reflexion des Gespräches muss dem Gesprächspartner bewusst sein, dass Schüler in bestimmten Situationen nicht die Leistung zeigen, die sie unter anderen Umständen durchaus zeigen können. Die Interviewbedingungen müssen kritisch reflektiert werden, bevor Schlüsse gezogen werden können.

Nutzen aus Fehlern – Fehlerwahrnehmung

Fehler spielen eine wichtige Rolle für jeden Lernenden und Lehrenden: Sie sind für den individuellen Lernprozess von großer Bedeutung und können ihn erheblich beeinflussen. Dieser Einfluss kann allerdings zwei gegensätzliche Auswirkungen haben, er ist somit *ambivalent:* Einerseits können Fehler als *Lernhindernisse* wirken, denn sie *hemmen* den weiteren Lernprozess. Andererseits können Fehler jedoch auch als *Lernchance* wahrgenommen werden. Ein Fehler wird von dem Lernenden erkannt und er versteht, warum es falsch ist (Einsicht). Doch wann können Fehlleistungen eine Lernchance darstellen, und wann hindern sie den Lernprozess? Diese zwei gegensätzlichen Wirkungen hängen davon ab, wie Fehler wahrgenommen und erlebt werden (*Fehlerwahrnehmung*). Sie
können nämlich positiv oder negativ empfunden werden: Entweder regen sie die Lernmotivation an (motivational stimulierend) oder hemmen sie (motivational frustrierend). Dies hängt besonders von dem Kontext der Lern- und Leistungssituation ab.

Beispiel
Ein ehrgeiziger Schüler, der unbedingt eine gute Note in seiner Mathematikklausur erreichen möchte, sieht einen großen Fehler als Anreiz und Motivationsschub, sich zu bessern und mehr zu leisten. Andererseits würde ein fauler Schüler, der nicht viel Freude an Mathematik hat und oft schlechte Noten bekommt, den gleichen Fehler als frustrierend und motivationshemmend wahrnehmen.

Diese verschiedenen Empfindungen hängen allerdings nicht nur von dem Lernenden selbst ab, sondern auch von der Reaktion des Umfeldes. Nur wenn alle Beteiligten akzeptieren, dass Fehler unabdingbare Begleiterscheinungen von Lernprozessen sind, können sie Lernchancen eröffnen und auch als solche wahrgenommen werden. Beispielsweise sollte der Lehrer und die umstehenden Schülerinnen und Schüler den Betroffenen nicht zur Schau stellen oder ihn demütigen.

Darüber hinaus gibt es entscheidende Rahmenbedingungen, die erfüllt sein müssen, damit ein Fehler zu einer fruchtbaren Lerngelegenheit werden kann. Es erfolgt ein Verstehensprozess, der mit folgender Voraussetzung beginnt: Der Schüler muss den Fehler erkennen. Er sieht ein, dass etwas falsch ist und was genau daran falsch ist. Zweitens muss er den Fehler erklären können. Man muss also verstehen, wie es zu dieser Fehlleistung gekommen ist. Drittens muss der Lernende die Möglichkeit haben, den Fehler zu korrigieren. Er erwirbt eine richtige Vorstellung und Vorgehensweise, um den Fehler zu beheben. Dies geschieht allerdings nicht automatisch.

Lernen durch Fehler

Ein wesentliches Element vieler Lerntheorien ist das „Lernen durch Fehler“. Hierbei spielt das negative Wissen eine große Rolle. Es ist durch drei verschiedene Aspekte definiert:

1. **Abgrenzungswissen:** Wissen, dass sich darauf bezieht, was nicht zu einer Sache gehört.

2. **Fehlerwissen:** Wissen, was nicht (in einer bestimmten Situation) getan werden darf.

3. **Schutzwissen:** Negativem Wissen wird einer Schutzfunktion für das positive Wissen zugeschrieben; das umfangreiche Wissen, was nicht getan werden darf, lässt das positive Wissen sehr viel klarer hervortreten.

Beispiele: Addition von Brüchen

Beispiele, bei denen das Fehlerwissen sehr hilfreich sein kann:

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{2+4} \qquad \textit{falsch!}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \qquad \textit{richtig!}$$

Bei der Addition von Brüchen darf man nicht nach dem Schema „Zähler plus Zähler, Nenner plus Nenner“ vorgehen, sondern man muss zunächst die Brüche gleichnamig machen, um die beiden Zähler addieren zu dürfen. Der Nenner bleibt gleich und wird nicht miteinander verrechnet. Dieses Wissen, was nicht in dieser Situation getan werden darf, kann vielen Schülern nützlich für die Multiplikation von Brüchen sein: Denn dort muss man nach dem Schema „Zähler + Zähler, Nenner + Nenner“ vorgehen. Das negative Wissen über die Addition von Brüchen lässt somit das positive Wissen über die Multiplikation klarer hervortreten.

Fehlerkulturen

Die Entstehung von Fehlerkulturen im Mathematikunterricht beruht auf den folgenden Thesen:
Erstens, es werden häufig systematische Fehler im Mathematikunterricht gemacht. Zweitens, das Lernen aus Fehlern erfolgt nicht automatisch, denn es ist ein aus mehreren Etappen bestehender Verstehensprozess notwendig. Drittens, Fehler spielen im Lernprozess eine ambivalente Rolle.
Eine Fehlerkultur beinhaltet einen *produktiven Umgang* mit Fehlern. Sie sollen als Lerngelegenheit verstanden und genutzt werden. Fehlerkulturen sind durch zwei wesentliche Aspekte definiert:

Aufgabenkultur: Sie erfordert offene Aufgaben und kreative Phasen im Unterricht. Auftretende Fehler sind nicht offensichtlich, sie regen jedoch eine authentische Kommunikation zwischen den Schülerinnen und Schülern an. Diese Kommunikation muss nicht zwingend über die Lehrkraft laufen. Lernende reden untereinander über Fehler und klären diese auf.

Vertrauenskultur: Es herrscht eine transparente Trennung von Lernen und Prüfen. Dies bedeutet, dass deutlich gemacht werden muss, wann ein Fehler als Lerngelegenheit gesehen werden kann und wann die Beurteilungsfunktion zum Tragen kommt. Das Erleben des Fehlers wird dadurch erheblich beeinflusst: Wenn ein Schüler einen großen Fehler bei den Hausaufgaben hat, empfindet er ihn anders, als wenn er ihn in einer Klassenarbeit macht. Die Hausaufgaben dienen zum Üben und Lernen, während die Klassenarbeit einen wichtigen Beitrag zur Zeugnisnote darstellt.
Die Lehrkraft muss generell als unterstützend im Lernprozess der Vertrauenskultur wahrgenommen werden.

Allgemein gibt es typische Handlungsmuster von Lehrkräften im Umgang mit Fehlern. Fehleranalysen sind somit eine wichtige Voraussetzung für die Entwicklung einer Fehlerkultur im Mathematikunterricht. Hierfür benötigt man das Wissen und Bewusstsein darüber, welche Fehlermuster in einem bestimmten Bereich auftreten und welche Fehlerursachen dahinter stehen können. Zudem ist es wichtig zu erkennen, welche verschiedenen Rollen Fehler im Lernprozess spielen und welche Voraussetzungen für einen produktiven Umgang mit Fehlern im Mathematikunterricht gelten. Diese Aspekte gelten für den individuellen Lernprozess einer jeden Lehrkraft und ermöglichen die Ausbildung einer Fehlerkultur.

Literatur

[Sel] Selter, C. und Spiegel, H. Wie Kinder rechnen. `http://www.epr.ch/bre/fsp/klinisches_interview.pdf`. [letzter Abruf: 15.05.2013].

[Wit] Wittmann, Gerald. Von Fehleranalysen zur Fehlerkultur. `http://www.`

mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Wittmann%202.pdf. [letzter Abruf: 15.05.2013].

[WP09] Gerald Wittmann and Susanne Prediger. Aus Fehlern lernen - (wie) ist das möglich? *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2009.

Von Zahlenmustern zur vollständigen Induktion

—

Analysen zur Argumentationsqualität von Studierenden im ersten Semester

Silvia Becher
Rolf Biehler
Reinhard Hochmuth
Juliane Püschl
Stephan Schreiber

Vorbemerkung

Der im Folgenden beschriebene Vortrag wurde eine Woche nach dem Romseminar auf der 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ebenfalls gehalten. Die Ausführungen entsprechen komplett der Veröffentlichung zum Vortrag in den "Beiträgen zum Mathematikunterricht". [BS13]

Einleitung

Das vom BMBF geförderte Projekt LIMA[1] (Lehrinnovationen in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation, www.lima-pb-ks.de) ist ein kürzlich zu Ende gegangenes Kooperationsprojekt von Fachmathematikern, Fachdidaktikern und Psychologen der Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg. Zugleich ist es ein assoziiertes Projekt des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik. Ziel des Projektes war es, Übergangsschwierigkeiten an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule im Studiengang Lehramt Mathematik für Haupt- und Realschule zu verringern. Dazu wurden eine Reihe von Lehrinnovationen innerhalb der zentralen Fachveranstaltung des ersten Semesters („Grundzüge der Mathematik I“) entwickelt, implementiert und teilweise auch evaluiert. Zu den Lehrinnovationen gehörte die Einführung einer Präsenzphase in den Übungen, überarbeitete Übungsaufgaben, die Einführung eines „Mathe-Treffs“ und eine intensive, semesterbegleitende Betreuung der Tutoren inklusive einer Tutorenschulung. Zur Evaluation der Lehrinnovationen wurde ein quasiexperimentelles Design ge- wählt. Dabei bildeten die Studienanfänger des WS 09/10 die Kontrollgruppe und die Studienanfänger des WS 10/11 die Experimentalgruppe. In beiden Kohorten wurden identische Klausuren geschrieben. Die „übliche“ Klausurbepunktung wurde als ein ökologisch valides Leistungsmaß angesehen. Unsere Erwartung, dass die Lehrinnovationen zu signifikant besseren Klausurergebnissen führen, bestätigte sich allerdings nicht. Da die Lehrinnovationen jedoch möglicherweise Dimensionen (u.a. Argumentations- und Darstellungsqualität) beeinflusst haben, die sich nicht oder nicht hinreichend in der Klausurbewertung abbildeten, wurden die Klausurbearbeitungen unter diesem Gesichtspunkt erneut analysiert.

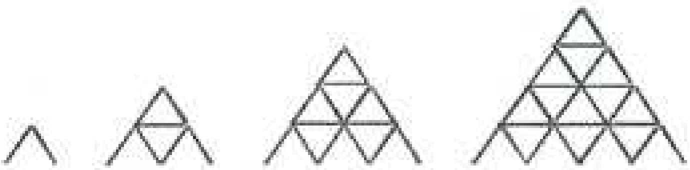
Design der Studie

Insgesamt wurden drei der sechs Klausuraufgaben erneut analysiert, ein Kategoriensystem erstellt und dessen Objektivität durch zwei Rater überprüft. Dieser Beitrag wird nur auf Ergebnisse zu einer Aufgabe eingehen. Für die Auswahl dieser Aufgabe sprach, dass hier neben der formalen Korrektheit der Lösung auch weitere Facetten wie beispielsweise die Darstellung- oder Argumentationsqualität bei anschaulichen (geome-trischen) Beweisen analysiert und Vergleiche zwischen den Beweisformen (anschaulich und formal) gezogen werden können [T10].

[1] Förderkennzeichen: 01PH08028B, 01PH08028A

Die Aufgabe bestand aus drei Teilaufgaben. Auf die Teilaufgabe a) wird im Folgenden nicht näher eingegangen. Sie lässt aufgrund der Kürze keine tiefere Analyse zu. In Teilaufgabe b) wird von den Studierenden ein Darstellungswechsel von einer algebraischen Formel zu einem geometrischen Muster und somit eine anschaulich (geometrische) Begründung gefordert. Im dritten Teil der Aufgabe soll eine explizite Folge zur Berechnung der Kartenanzahl mit Hilfe der in Aufgabenteil b) zuvor begründeten rekursiven Folge und dem bekannten Beweisschema der vollständigen Induktion bewiesen werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte) Als Kartenhauszahlen K_1, K_2, K_3, K_4 ... bezeichnet man die Anzahlen von Karten in den folgenden verschieden hohen Kartenhäusern.



(a) Wie viele Karten brauchen Sie für ein Kartenhaus mit 8 Stockwerken?

(b) Begründen Sie anschaulich (geometrisch) für $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion

$$K_{n+1} = K_n + 3n + 2, \quad K_1 = 2.$$

(c) Begründen Sie unter Verwendung von (b) mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$K_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Kategoriensystem

Für die Analyse des anschaulich (geometrischen) Beweises haben wir die folgenden Kategorien verwendet:
i) „Auffinden der geometrischen Entsprechung der drei Summanden“, ii) „Argumentationsqualität“, iii) „die Begründung des Terms 3n“, iv) „Sprachliche Qualität der schriftlichen Darstellung“ Im Folgenden gehen wir genauer auf die Kategorie ii) „Argumentationsqualität“ d.h. die Güte der Argumentationen ein. In dieser Kategorie werden Bearbeitungen, bei denen kein vollständiges Muster gefunden wurde, das heißt, man nicht alle drei Summanden wiederfinden kann, in Stufe 1 eingeordnet. Stufe 2 erhält alle Lösungen, bei denen ein Muster gefunden wurde, dieses aber nur anhand eines Beispiels aufgezeigt und nicht verallgemeinert wird. In Stufe 3 wurden Bearbeitungen eingeordnet, bei denen eine Verallgemeinerung stattfindet, beispielsweise durch eine allgemeine Beschriftung der Skizze, die Erläuterungen dazu jedoch unzureichend sind. Bearbeitungen bei denen eine Verallgemeinerung stattfindet und auch die Argumentation vollständig und gut ist, werden in Stufe 4 eingeordnet.
Für das Kategoriensystem von Aufgabenteil c) wurden die wesentlichen Teile eines Induktionsbeweises genauer betrachtet: i) „Gesamtbehauptung“, ii) „Induktionsanfang“, iii)

„Induktionsvoraussetzung“, iv) „Induktionsschritt“.
Die Kategorie iv) „Induktionsschritt“ ist in vier Stufen aufgeteilt. Dabei ist die unterste Stufe, dass der Induktionsschritt nicht oder falsch aufge-schrieben wurde. In Stufe 2 werden Bearbeitungen eingeordnet, welche große Mängel in der Darstellung aufweisen. Wenn es sich um kleine Mängel handelt, so werden die Bearbeitungen eine Stufe besser eingestuft, in Stufe 4 werden Bearbeitungen eingestuft, welche den Induktionsschritt gut darstellen. Bei dieser Einordnung wurde die „0=0“- Problematik mit erfasst [HR12], d.h. das Problem, dass von der zu zeigenden Identität ausgegangen und durch Äquivalenzumformungen die wahre Aussage 0=0 hergeleitet wird.

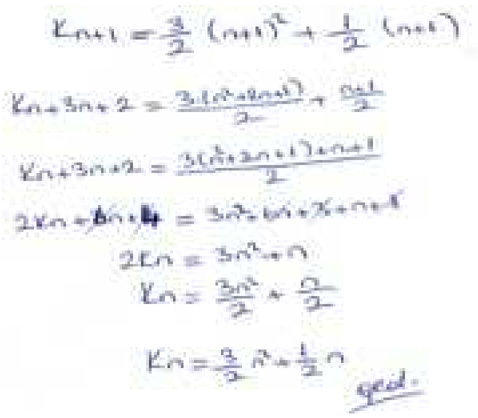


Abbildung 1: Beispiel einer Aufgabenbearbeitung, welche in der Kate-gorie „Induktionsschritt“ in Stufe 2 eingeordnet wurde, da hier von der zu zeigenden Gleichheit ausgegangen wird, Äquivalenzumformungen gemacht werden, aber die Äquivalenzzeichen fehlen.

Ergebnisse

In den Kategorien des geometrisch anschaulichen Beweises konnten keine signifikanten Unterschiede zwischen den Kohorten festgestellt werden. Bei der sprachlichen Darstellung sieht man jedoch eine deutliche Tendenz, dass die Experimentalgruppe ihre Ergebnisse eher in ganzen Sätzen formuliert. Man erkennt, dass es den Studierenden schwer fällt, ein Muster zu finden und dass sie Probleme mit der Verallgemeinerungsbegründung haben (in der Experimental- sowie in der Kontrollgruppe sind 17% in der obersten Stufe eingeordnet worden). Bei dem Induktionsbeweis zeigt sich, dass die Experimentalgruppe in der Kategorie „Gesamtbehauptung“ mit p=0,084 signifikant besser abschneidet. Ähnlich gilt dies für die Kategorie „Induktionsanfang“ (p=0,11) und den „Induktionsschritt“ (p=0,1). Bei der Induktionsbehauptung ergab sich ein hochsignifikanter Unterschied (p=0,0): Die Experimentalgruppe hat die Induktionsbehauptung zu 71% gut aufgeschrieben, bei der Kontrollgruppe kamen nur 2% in die beste Kategorie.

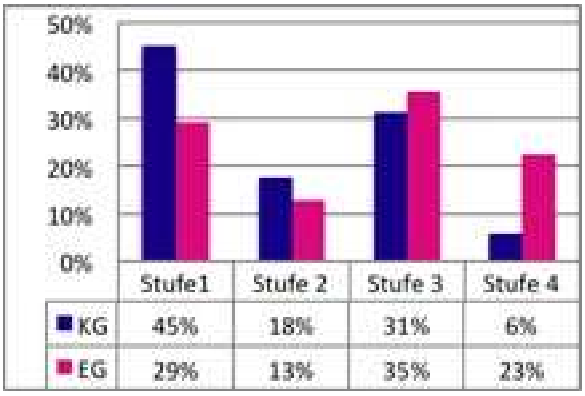


Abbildung 2: Kategorie „Induktionsschritt"– Ergebnis

Fazit

Insgesamt stellen das Erkennen, Beschreiben und Erläutern eines Musters und schließlich das Aufstellen und Begründen eines darauf bezogenen algebraischen Ausdrucks für die Studierenden eine große Hürde dar. Bei der Bearbeitung dieser Teilaufgabe zeigten sich zwischen den beiden Kohorten im Hinblick auf unsere Analysekategorien keine Unterschiede. Dies spricht dafür, dass die Lehrinnovation bei der Bewältigung der hier auftretenden Hürde keinen Effekt zeigt. Möglicherweise sind hier spezifischere Maßnahmen notwendig. Bei der vollstän- digen Induktionsaufgabe zeigen sich Unterschiede. Möglicher- weise fällt diese Aufgabe den Studierenden leichter, da es sich um eine vorstrukturierte Beweisführung handelt. Eine weitere Erklärung für diesen Unterschied könnte sein, dass dadurch, dass auf den Beweistyp der vollständigen Induktion in der Tutorenschulung (eine Lehrinnovation des Projekts) eingegangen [BH11] wurde, dies auch in den Übungen besser vermittelt wurde. Insgesamt kann man daher vielleicht sagen, dass man bei einer Aufgabe, bei der ein festes Beweisschema zu Grunde liegt, schneller Veränderungen feststellen kann, als bei Aufgaben, die mehr Kreativität erfordern. Um Veränderungen auch im Bereich der Mustererkennung feststellen zu können, wird man vermutlich spezifischer auf deren Anforderungen eingehen müssen.

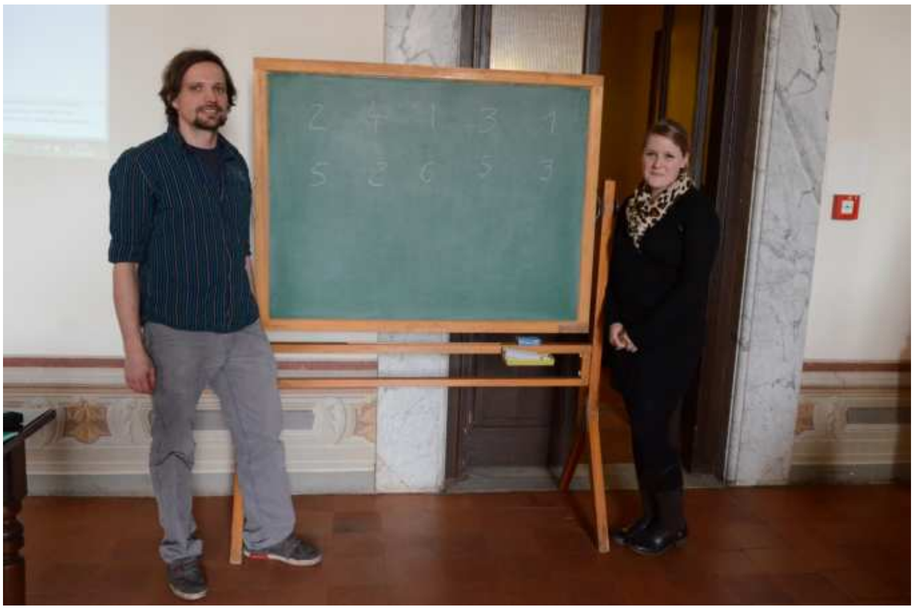
Literatur

[BH11] Hochmuth R. Klemm J. Schreiber S. Biehler, R. and M. Hänze. Fachbezogene Qualifizierung von Mathematiktutorinnen – Konzeption und erste Erfahrungen im LIMA-Projekt. *Hochschuldidaktik – Mathematik und Informatik. Symposiumsband zum Symposium „Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik“*, 2011.

[BS13] Biehler R. Hochmuth R. Püschl J. Becher, S. and S. Schreiber. Von Zahlenmustern zur Vollständigen Induktion – Analysen zur Argumentationsqualität von Studierenden im ersten Semester. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 2013.

[HR12] Schichl H. and Steinbauer R. *Einführung in das mathematische Arbeiten*. Springer Spektrum. Berlin, Heidelberg, 2012.

[T10] Leuders T. *Erlebnis Arithmetik zum aktiven Entdecken und selbstständigen Erarbeiten*. Spektrum Akademischer Verlag. Heidelberg, 2010.



Reiner Zufall

—

Fehler und Zufall bei wissenschaftlichen Entdeckungen

Damian Hettmanczyk

Zufall an sich

Der Zufall geht oft mit Fehlern und Irrtümern einher. Und nicht selten ruft er Widersprüche hervor. Doch was ist eigentlich Zufall? Zufall an sich wird von den meisten Menschen eher subjektiv wahrgenommen und steht daher in engem Zusammenhang zum Begriff des Schicksals. Um diese Begriffe zunächst einmal voneinander abzugrenzen schauen wir uns verschiedene Definitionen dazu an.
Wie der Begriff Zufall schon vermuten lässt, handelt es sich um etwas

- „äußerlich hinzukommendes", „das jemandem zufällt", „was man nicht vorausgesehen hat", „was unerwartet geschah" [Dud13]
- „von Zufall spricht [...], wenn für ein einzelnes Ereignis oder das Zusammentreffen von mehreren Ereignissen keine kausale Erklärung gegeben werden kann." [Wik13]

Bei den Ereignissen wird zwischen den folgenden vier verschiedenen Fällen unterschieden. [Wik13] Ein Ereignis geschieht:

- objektiv ohne Ursache
  So ist zum Beispiel der Zerfall des nächsten radioaktiven Atoms aus einer Stoffmenge nicht vorhersehbar. Er scheint zufällig zu sein.
- ohne das eine Ursache erkennbar wäre
  Warum hat beispielsweise jener Baum gerade dort einen Ast gebildet der benachbarte Baum jedoch nicht.
- bei bekannten, aber weder mess- noch steuerbaren Einflussfaktoren, so dass das Ergebnis unvorhersehbar ist
  Warum eine Roulette-Kugel auf eine Zahl fällt, ist erklärbar, jedoch nicht vorhersehbar
- ohne (bekannten) kausalen Zusammenhang zu einem Zweiten
  Zwei Menschen haben jeweils eine Telefonnummer, ob der ältere oder der jüngere die längere Nummer hat ist „Zufall".

Die Wahl dieser Definitionen sind bewusst breitmassigen und nicht wissenschaftlichen Ursprunges, da – wie schon oben erwähnt – die Bedeutung des Wortes Zufalls subjektiv von Mensch zu Mensch wahrgenommen wird. Was beide Definitionen gemein haben, ist das unbekannte Element, das Aufwerfen der Frage „Warum?". In diesem Sinne ist Zufall somit also gerade der Verzicht auf eine ebensolche Erklärung.
Unter diesem Aspekt lässt sich auch der Unterschied zum Schicksal feststellen. Beide Begriffe werden oft synonym zueinander verwendet.
Jedoch ist das Schicksal:

- „eine höhere Macht, die in einer nicht zu beeinflussenden Weise das Leben bestimmt und lenkt"[Dud13]
- „ein weiteres Begriffsfeld dessen, was einen Lebenslauf prägt oder beeinflusst."[Wik13]

Schon beim Wortstamm sind erste Unterschiede wahrnehmbar. Während einem beim Zufall noch etwas, ohne scheinbaren Grund „zufällt", wird es nun durch eine „höhere Macht"

„geschickt“. Schicksal ist also das Finden einer bedeutenden zweckgebundenen Bestimmung des Zufalls. Es ist somit gerade der Versuch einer Erklärung auf die Frage: „Warum?“. Und sei es die ebenso im Verborgenen liegende „höhere Macht“.

Zufallsgenerationator

Der Zufall hat sich über Generationen hinaus als Generator erwiesen. In dieser eigens erfundenen Wortschöpfung (Zufallsgenerationator) stecken die beiden Begriffe Generator und Generation. Den allgemeinsten Fall findet man in der Evolutionstheorie. Organismen entwickeln sich, über kurz oder lang, aufgrund von zufälligen Mutationen im Erbgut weiter. Es handelt sich also um zufällige Fehler in der Reproduktion der zugrunde liegenden DNA. Doch auch in der geistigen und sozialen Entwicklung spielen zufällig erscheinende Fehler und Irrtümer eine wichtige Rolle. Einige die unseren, nicht nur mentalen, Horizont maßgeblich erweitert haben, seien nun genannt:

Abbildung 1: Penicillium chrysogenum, syn. Penicillium notatum

Als Alexander Fleming am 28. September 1928 sein Labor im St. Mary’s Hospital in London betritt, stellt er fest, dass eine seiner Proben von einem Schimmelpilz befallen war. Diese eine befallene Platte hatte er vor den Sommerferien mit Staphylokoken beimpft, beiseite gestellt und vor Urlaubsantritt vergessen. Ihm fiel auf, dass in der Nachbarschaft des Pilzes das Wachstum der Bakterien gestoppt worden war, untersuchte diese Erkenntnis weiter und legte so den ersten Stein zum medizinischen Einsatz von Penicillin. [Wik13]
Überträgt man diese Geschehnisse auf die heutige Zeit (Arbeitsplatz nicht sauber hinterlassen, Staphylokoken offen in einem Krankenhaus stehen lassen) so hätte dieser grobe Fehler vermutlich eine Anzeige wegen Fahrlässigkeit nach sich gezogen. Doch für diesen Wendepunkt in der Medizin gab es rund 17 Jahre später den Nobelpreis. Nicht zuletzt hatte, neben

dem Zufall, natürlich Flemings Scharfsinn einen großen Teil dazu beigetragen. Er tat die verschimmelte Probe nicht als Fehler ab und entsorgte sie umgehend, sondern untersuchte die aus diesem Fehler resultierenden Ereignisse.

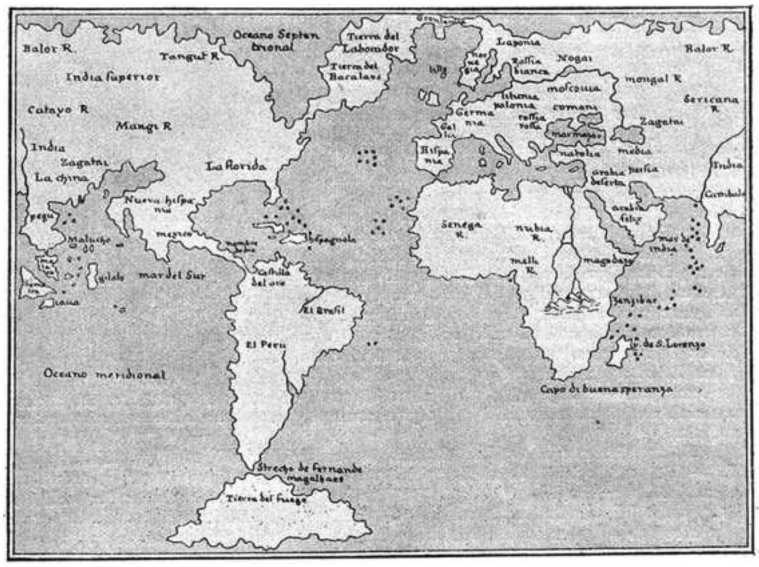


Abbildung 2: Weltkarte aus der Ptolemäus-Ausgabe von 1548 (Reproduktion)

Am 12. Oktober 1492 erreichte Christoph Kolumbus, nach knapp fünfwöchiger Reise zu See, Festland in Form einer Inselgruppe. Motivation dieses Unternehmens war das Finden einer direkten Seeroute von Europa nach Ostasien. Die vorgefundene Inseln identifizierte Kolumbus mit einer Inselgruppe südwestlich vom heutigen Japan. Diese Theorie wurde zum einen durch zuvor durchgeführte Berechnungen der Reisedauer, als auch von der Karte von Paolo dal Pozzo Toscanelli bestätigt, welche zahlreiche Inseln südwestlich von Japan aufwies. Bis zu seinem Tode im Jahre 1506 war Kolumbus überzeugt einen direkten Seeweg gefunden zu haben. [Wik13]
Ein Irrtum, wie wir heute wissen, welcher von Amerigo Vespucci aufgedeckt wurde. Er erkannte, dass es sich um einen neuen Kontinent handelte, welcher ihm zu Ehren nach ihm benannt wurde: Amerika. Dennoch ist verblüffend wie Irrtum, Fehler und Zufall überhaupt diese Entdeckung ermöglichten. Zu Beginn stand die irrtümliche Annahme einer direkten Route, welche diesem Vorhaben den Anstoß gab. Dem folgten Berechnungen über Reisedauer und Provianteindeckung, welche auf fehlerhaften Karten beruhten. Zu guter Letzt der Zufall, tatsächlich eine, zwar nicht japanische, aber karibische Inselgruppe vorzufinden.

Zufälliges Wissen

In der Philosphie beschäftigt man sich mit der grundlegenden Frage „Was ist Zufall?“. Die Fragestellung untersucht ob unsere Welt im innersten deterministisch oder aber zufälliger Natur ist ebenso wie der damit verbundenen Auswirkung auf den freien Willen des Men-

schen. Unter der Annahme des Determinismus ist jede von uns getroffene Entscheidung unter Bezugnahme der Einflussgrößen berechenbar. Somit kann es keinen freien Willen geben, da jede Entscheidung vorhergesagt werden kann. Wenn unsere Entscheidungen aber zufällig zustande kommen, so ist es erst recht nicht das, was wir uns unter einem freien Willen vorstellen.
Die Psychologie untersucht die menschliche Wahrnehmung des Zufalls. Der Mensch besitzt eine Grundfähigkeit zum Einschätzen von Wahrscheinlichkeiten, jedoch sind im Einzelnen verschiedene systematische Fehleinschätzungen identifiziert worden. Versuchspersonen neigen beispielsweise dazu, in zufälligen Mustern Regelmäßigkeiten wahrzunehmen. Diese Phänomen nennt man Apophänie. [Wik13]

Abbildung 3: Ausschnitt „Marsgesicht“-Aufnahme der NASA-Sonde Viking I 25. Juli 1976. Formation der Cydonia-Region, nördl. Hemisphäre des Planeten Mars

Befragt man eine Versuchsperson nach einer zufälligen Folge von Zahlen, so neigen die Personen dazu unbewusst gewisse Frequenzen und Folgen von Zahlen zu bevorzugen. Im Umkehrschluss funktioniert das ebenso, wie der bekannte Spielerfehlschluss bzw. das Gesetz der großen Zahl aufzeigt. Würfelt man vier mal hintereinander eine 6, so hält es nahezu jede Person für unmöglich, dass eine weitere 6 fällt, da man meint eine Regelmäßigkeit festzustellen, welche man dem Zufall nicht eingestehen mag. Jedoch hat die Wahrscheinlichkeit kein Gedächtnis. Ein Folge von fünf 6en ist genau so wahrscheinlich, wie jede andere beliebige Folge von Würfen.

Zufallsmaschine

Des Weiteren spielt der Zufall eine wichtige Rolle im Fachbereich der Informatik. Die Erzeugung von Zufallszahlen ist grundlegend in der Kryptologie, also der Verschlüsselung von Informationen. Doch auch in der Computerspielbranche ist man auf zufällige Ereignisse angewiesen. Man kann sich leicht vorstellen, dass ein Spiel schnell langweilig wird, wenn es immer gleich abläuft. Doch wie genau wird der Zufall im Computer erzeugt? Albert Einstein schrieb:

„Das, wobei unsere Berechnungen versagen, nennen wir Zufall.“

Das Zitat deutet bereits das Grundproblem an. Ein Computer ist so konzipiert, dass er exakte Ergebnisse liefert, ohne zu Versagen. Er ist ein Rechner. Ist die Erzeugung von Zufallszahlen mit dem Computer dann nicht schon ein Widerspruch in sich?
Um dieser Sache auf den Grund zu gehen, schreiben wir ein kleines Würfel-Programm. Glücklicherweise gibt es bereits in nahezu jeder Programmiersprache eine vordefinierte Random-Funktion. Unser Programmbeispiel ist in der Sprache *C* geschrieben. Die dort implementierte Zufallsfunktion heißt *rand()* und liefert üblicherweise Zufallszahlen zwischen *0* und *32767*. Doch schauen wir uns nun einfach den Quelltext an.

```
int main(){
    for (unsigned u = 0; u < 20; u++)
        cout « 1 + rand()%6 « ;
    cout « "\n;
    return 0;
}
```

```
for (unsigned u = 0; u < 20; u++)
```

Diese Zeile veranlasst das Programm dazu, die *for-Schleife* 20-mal durch zu gehen, so dass wir im Idealfall 20 verschiedene Zahlen bekommen.

```
cout « rand()%6 + 1 « ;
```

Hier steckt das Herzstück unseres kleinen Würfel-Programms. *cout* sorgt für die Ausgabe auf der Konsole. *rand()* liefert die gewünschte Zufallszahl, welche durch den Modulo-Operator in *%6* auf den Bereich von *0* bis *5* abgebildet wird. *+ 1* korrigiert den Bereich auf *1* bis *6*, so dass wir unsere gewünschten „Würfelzahlen“ erhalten.

Lassen wir nun unser Programm ablaufen, führt dies zum gewünschten Ergebnis. Wir bekommen Zufallszahlen zwischen 1 und 6. Doch wenn wir unser Programm erneut und wiederholt starten, wartet eine böse Überraschung.
Wir erhalten stets dieselbe Folge von Zahlen, nämlich 6 6 5 5 6... usw. Der Grund hierfür liegt im Algorithmus, welcher die Zahlen berechnet. Schauen wir doch mal, wie *rand()* implementiert ist. In der Bibliothek von *C* findet man folgenden Eintrag:

```
static long holdrand = 1L;
int rand(void){
    return (((holdrand = holdrand * 214013L + 2531011L) » 16) & 0x7fff);
}
```

Auf den ersten Blick scheint die Formel ziemlich kompliziert. Doch wenn man sie ganz nüchtern betrachtet erkennt man, dass sie von der Form:
$X = X * a + b$ ist.
Unser X wird mit dem Startwert 1 initialisiert, im Anschluss mit a multipliziert und b addiert. Das Ergebnis wird in X gespeichert und der Vorgang rekursiv wiederholt. Nun wird auch deutlich, warum wir immer die gleiche Folge erhalten haben. Mit jedem Aufruf unseres Programms wurde X erneut mit 1 initialisiert.
Der Computer gaukelt uns also den Zufall nur vor, intern rechnet er immer nach dem selben Schema. Es ist ein Pseudozufall. Die generierten Zahlen Pseudozufallszahlen. Im Grunde haben wir alle das Prinzip schon im Kindesalter kennengelernt, als Abzählreim. Ene mene miste...
Wenn ich weiß wo der Start ist, dann kann ich abzählen wo das Ende sein wird. Und genau hier greifen wir ein, um unser Programm zu modifizieren. Wir verlagern unseren Startwert ins Ungewisse.

```
int main(){
    srand(time(NULL)); //neu
    for (unsigned u = 0; u < 20; u++)
        cout « 1 + rand()%6 « ;
    cout « "\n;
    return 0;
}
```

srand() setzt den Startwert der *rand()* Funktion.
time(NULL) gibt sekundengenau die Rechnerinterne Systemzeit zurück.
Nun wird also bei jedem Aufruf von *rand()* nicht mehr mit dem Wert 1 initialisiert und unser Programm macht letztlich das was es soll. Es würfelt. Doch auch hier ist nicht alles fehlerfrei. Sollte unser Programm schnell hintereinander aufgerufen werden, so erhalten wir erneut die gleiche Folge von Zahlen, bis zum nächsten Sekundenwechsel. Für einfache Zwecke mag das genügen. Für komplexere kann man den Startwert beispielsweise über die Bewegung der Maus oder Umgebungsgeräusche initialisieren.

zu Fall

Wie man den vorigen Kapiteln entnehmen kann ist Zufall stets relativ. Er ist abhängig von dem, was ich erkenne, was ich weiß und zu guter Letzt was ich verstehe. Aus heutiger Sicht weiß ich, dass im Westen Amerika liegt. Es ist nicht plötzlich aus dem nichts entstanden, als Kolumbus nach seiner langen Reise endlich Land erblickte. Es ist kein Zufall. Es war schon immer da. Nur war es bis dahin unbekannt.

Insofern ist der Zufall zu Fall gebracht. Der Zufall ist eine Momentaufnahme des Unwissens. Ein temporärer Zustand, bis sich mir die Ursachen für ein Ereignis offenbaren. Er ist eine Perspektive, ein Blickwinkel der sich mir nicht erschließt.
So ist letztlich die Annahme des titelgebenden und oft gefloskelten reinen Zufalls, nichts weiter als ein Reinfall.

Literatur

[Dud13] Duden - Online, Internetpräsenz, `http://www.duden.de`, 20.02.2013.

[Wik13] Wikipedia, Internetpräsenz, `http://www.wikipedia.de`, 20.02.2013.

Ostia Antica

—

Probleme bei der Rekonstrukion eines antiken Hafens

Patricia Jährig
Jenny Reinhardt

Einführung

Ostia Antica ist vielseits bekannt als Hafenstadt und eine der bedeutendsten Ausgrabungsstätten der römischen Welt. Umso erstaunlicher ist es, dass die Hafenanlage erst im Jahre 2000 bei Ausgrabungen entdeckt wurde, obwohl bereits seit Anfang des 19. Jahrhunderts in Ostia gegraben wird.
In Zusammenarbeit mit dem Archäologen Prof. Dr. Michael Heinzelmann entwickelten wir in unserem Praktikumssemester, am Archäologischen Institut der Universität zu Köln, ein 3D-Modell der antiken Hafenanlage in Ostia.

Zur Geschichte

Ostia wurde im 4. Jahrhundert vor Christus geründet und lag ca. 23km südwestlich von Rom. Der Name leitet sich vom lateinischen Wort „ostium“ ab, was übersetzt „Flussmündung“ bedeutet, denn die Stadt lag direkt an der Tibermündung.

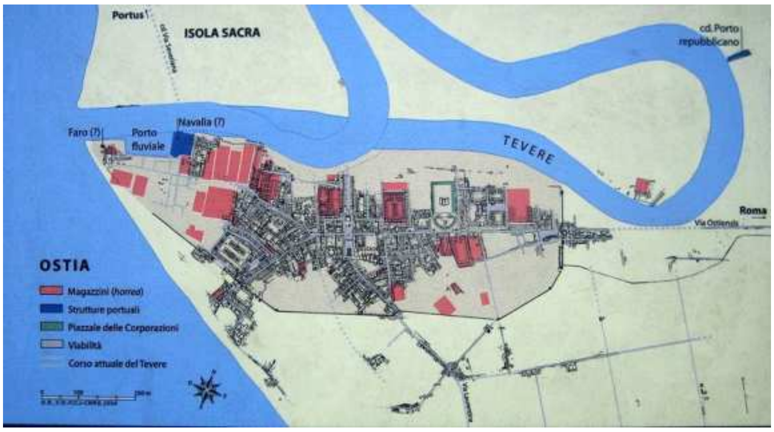


Abbildung 1: Alte Karte von Ostia Antica

Zunächst war Ostia als Militärkolonie gedacht, um die Tibermündung vor Angreifern zu verteidigen und den Seehandel unter Roms Kontrolle zu bringen. Die Stadt entwickelte sich jedoch rasch zu einer Hafenstadt und wurde zum Haupthandels- und Versorgungshafen Roms. Die Waren wurden im Hafen von größeren Handelsschiffen auf kleinere Flussboote umgeschlagen und flussaufwärts nach Rom verschifft. Zu ihrer Blütezeit im 1. Jhd. vor Christus lebten ca. 75.000 Einwohner in Ostia. Es existierten zahlreiche Lager- und Geschäftshäuser, sowie Wohnviertel für die Arbeiter. Im 3. Jahrhundert nach Christus begann das Hafenbecken zunehmend zu versanden. Dies führte zu einem schleichenden Handelsrückgang und einer daraus resultierenden Verarmung. Durch die Versandung entstanden zudem auch Sümpfe, wodurch sich häufig Malariaepidemien in Ostia ausbreiteten. Der Niedergang Ostia Anticas war besiegelt.
Durch die Verlandung des Tibers liegt Ostia Antica heute ca. 4km vom Meer entfernt. Zudem änderte der Tiber im 16. Jahrhundert aufgrund einer gewaltigen Überschwemmung

sein Flussbett.
Die Ruinen von Ostia sind überdurchschnittlich gut erhalten und können heute noch besucht werden. Bis heute sind 2/3 der Stadt ausgegraben. Darunter ein gut erhaltenes Theater für rund 4000 Besucher, in dem heute noch kulturelle Veranstaltungen stattfinden. Des Weiteren kann man Tempel, Thermenanlagen, Wohnräume und ein Forum besichtigen. Allerdings ist die von uns zu rekonstruierende Hafenanlage zu großen Teilen nicht mehr erhalten und teilweise neu bebaut.

Die Hafenanlage

Die Hafenanlage umfasste eine Fläche von ca. 6300m^2. In der Mitte befand sich ein Tempel, dessen Basis 19,5 x 9,5m groß war und dessen Höhe 16m betrug. Im unteren Teil der Anlage befanden sich Gewölbe, wobei die Gewölbe an der Westseite als Umschlageplatz für Handelsschiffe dienten. Um in das Gewölbe zu gelangen, mussten die Schiffe ihre Segel umklappen. Vom Wasser aus konnten sie dann über eine Rampe hineingezogen werden. Die Gewölbe an den anderen Seiten dienten als Lagerhallen. Die Anlage umrahmten zwei große Apsiden an Nord- und Südseite, die wahrscheinlich auch als Lagerstätten genutzt wurden. Darüberhinaus wurden die Überreste eines Leuchtturms gefunden. Insgesamt sollte die Anlage außergewöhnlichen Eindruck auf die einlaufenden Schiffe machen. Aus diesem Grund war sie zum Meer hin offen, sodass der Tempel vom Wasser aus gut sichtbar war.

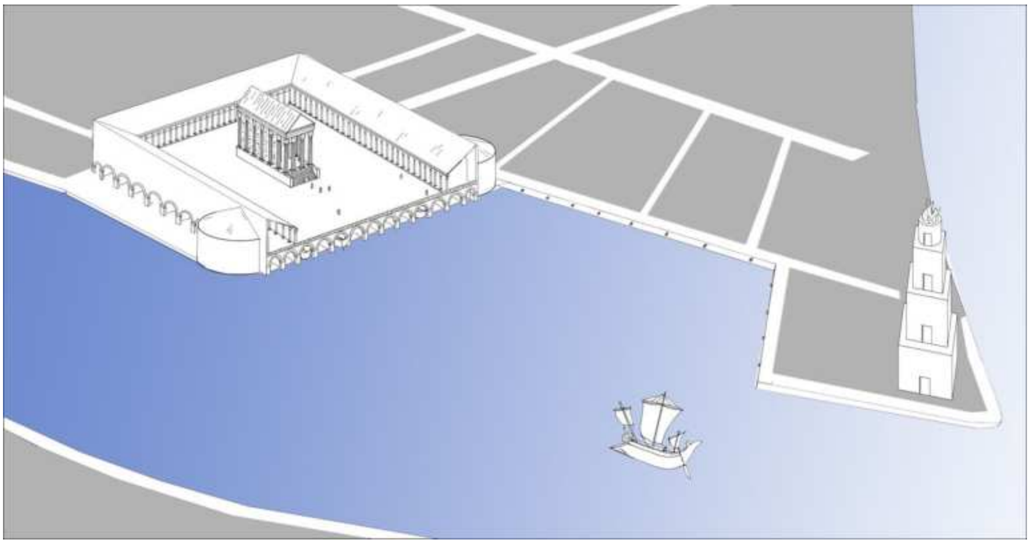


Abbildung 2: Skizze der Hafenanlage

Welches Material steht zur Verfügung?

Für unsere Arbeit wurden wir mit umfangreichen Materialien versorgt. Zum einen standen uns verschiedenste Grundrisse zu Verfügung. Lediglich die dunkelblauen Abschnitte aus Abb. 3 sind bisher ausgegraben worden, der Rest sind nur Vermutungen, basierend auf den Erfahrungen der Archäologen.

Abbildung 3: Grundriss der Hafenanlage von Ostia

Diese Grundrisse können sich durch neue Erkenntnisse jedoch schnell wieder ändern, was auch eine Änderung in unserem Projekt zur Folge hätte. Zudem bekamen wir Skizzen, die uns einen ersten visuellen Eindruck vermittelt haben, wie der Hafen ausgesehen haben könnte. Obendrein haben wir Fotos von verschiedenen erhalten gebliebene Elementen übergeben bekommen (siehe Abb. 4). Sie dienten uns dazu, Proportionen besser einzu-schätzen und gaben uns Aufschluss über die verwendeten Materialien und deren Beschaffenheit.

Abbildung 4: Foto einer erhalten gebliebenen Säulenbasis und eines Pfeilers

Interdisziplinäre Zusammenarbeit

Zu Beginn unserer Arbeit stand die Einarbeitung in die römische Architektur im Vordergrund. Wir mussten uns mit typischen Bauweisen sowie mit den darin in Verbindung stehenden Fachbegriffen vertraut machen. So klärten zum Beispiel wir Begriffe wie Navalia (Schiffswerft), Pilaster(ein in die Mauer eingearbeiteter Pfeiler) oder auch Interkolumniation (Abstand zwischen den Säulen). Zugleich mussten wir uns über den Detailgrad des Modells einig werden, wie viel überhaupt gewollt und wie viel möglich ist. Die Zusammenarbeit und Absprache beider Fachbereiche (Informatik und Archäologie) war das Wichtigste am ganzen Modellierprozess.

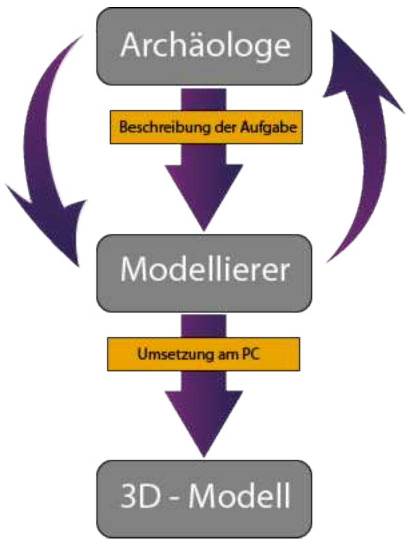


Abbildung 5: Diagramm der Zusammenarbeit

So konnten Missverständnisse auf beiden Seiten schnell ausgeräumt werden. Unsererseits falsch eingeschätzte Proportionen, wie zum Beispiel die Höhe der Basis der Säule, wurden durch Prof. Heinzelmann aufgeklärt. Wir haben ihm wiederrum erklären können, was mithilfe eines 3D-Modellierprogramms überhaupt möglich ist. Diese Zusammenarbeit führte stetig zu besseren Ergebnissen. Durch die visuelle Veranschaulichung konnten schnell neue Erkenntnisse gewonnen und Fehler besser sichtbar gemacht werden.

Gewonnene Fehlererkenntnisse

Nachdem wir den ersten Prototypen des Modells fertiggestellt hatten, wurde ein gravierender Fehler im bereits veröffentlichten Grundriss entdeckt. Die Abbildung zeigt einen zu spitzen Winkel an der nördlichen Apsis (vergleiche Abb. 6). Laut Prof. Heinzelmann haben die Römer niemals so gebaut.

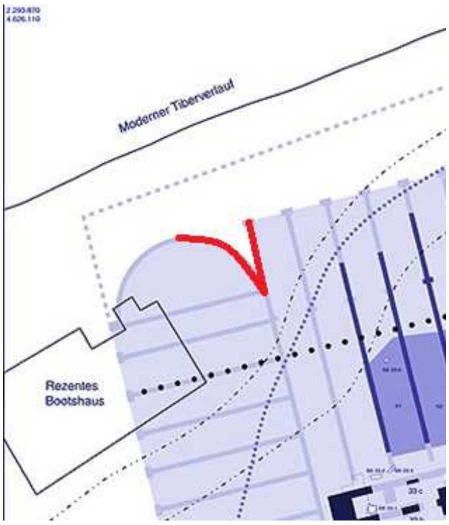


Abbildung 6: Fehlerhafter spitzer Winkel

Dieser Fehler wurde erst durch unsere Modellierung sichtbar. Leider ist eine genauere Überprüfung an dieser Stelle nicht möglich, da darüber heute ein Bootshaus steht. Wie lässt man diese Erkenntnis nun in das Modell einfließen? Modelliert man diesen Winkel mit oder nicht? Und wenn ja, was macht man daraus? Eine Terrasse? Die Konsequenzen hätten einen immensen Einfluss auf das Erscheinungsbild der Hafenanlage. Während des Modellierprozesses wurde zudem schnell Ungereimtheiten an der Tempelanlage festgestellt. Die erste Skizze (Abb 3) verfügte beispielsweise über keine Seitenwangen am Aufgang, was aber in der Antike üblich war. Außerdem wurde der Aufgang um einen Altar in der Treppenmitte erweitert.

Das Arbeiten mit Vergleichen

Da die Hafenanlage zu großen Teilen nicht mehr erhalten ist, können wir keine hundertprozentig genaue Aussage über das damalige Aussehen vornehmen. Daher ist das Arbeiten mit Vergleichen bei einer Rekonstruktion dieser Art sehr wichtig. Dafür werden ähnliche

Objekte aus der jeweiligen Epoche zur Hilfe genommen. Die römische Architektur hatte zu bestimmten Zeitaltern immer einen ähnlichen Aufbau in ihrer Architektur. Bestimmte Dinge wie Proportionen, Materialien oder Symmetrien tauchen immer wieder auf. Daraus können die Archäologen eine relativ genaue Vorstellung darüber entwickeln, wie der Hafen einst ausgesehen haben könnte. Jedoch kann sich dies bei weiteren Ausgrabungen auch wiederum als völlig falsch erweisen.
So wurde beispielsweise für den Tempel der Hafenanlage die Maison Carrée aus Nîmes als Vergleich herangezogen, da sie in Alter und Größe etwa vergleichbar ist. Viele Dinge, wie zum Beispiel die Pseudoquaderung an den Außenmauern, geben Hinweise darauf, dass die beiden Tempel artverwandt sind.

Abbildung 7: Maison Carrée in Nîmes und Überreste der Pseudoquaderung in Ostia

Das legt die Vermutung nahe, dass auch andere Baugegebenheiten sehr ähnlich zudenen in Ostia seien könnten, wie zum Beispiel die Wangen am Treppenaufgang, die Form des Giebels oder das Relief, welches sich um die ganze untere Mauer zeiht. Für die Dachform des Säulenganges der Hafenanlage wurde zum Vergleich ein antikes Theater zu Rate gezogen. Aufgrund der Proportionen bot es sich hier an, aus dem geplanten Pultdach ein Satteldach zu machen.

Wie gehen wir mit Unsicherheiten um?

Viele Dinge blieben trotz vielen Besprechungen und Vergleiche im Ungewissen oder scheinen sich zu wiedersprechen. Soll man aus dem Fehler im Grundriss eine Terrasse machen oder nicht? Nimmt man für den Säulengang ein Pultdach oder doch lieber ein Satteldach? Wie groß ist die Treppe zum Eingang der Anlage und stand sie überhaupt an dieser Stelle? Für all diese Ungewissheiten mussten wir eine Möglichkeit finden, um damit zurechtzukommen. Zeigt man diese Dinge überhaupt auf, und wenn ja für welche Variante entscheidet man sich dann? Im Hauptmodell war eine relativ hohe Detailgenauigkeit gewünscht, daher haben wir Vermutungen sehr detailliert ausgearbeitet, auch wenn diese sehr ungewiss waren. Im Gegensatz dazu war der Detailgrad beim Umland der Anlage nicht so wichtig, da es nur zur besseren Visualisierung und Orientierung gedacht war. Daher sind die Modelle hier nur sehr einfach gehaltenen, sie bestehen zumeist nur aus einen Quader mit Dach. Wir wollten dem Betrachter nicht zu viel vortäuschen, was vielleicht gar nicht so gewesen ist. Diese Idee haben wir von Colonia3D übernommen.

Colonia3D

Colonia3D ist eine 3D-Rekonstruktion des römischen Kölns um das zweite Jahrhundert nach Christus. Es ist ein gemeinsames Forschungsprojekt des Archäologischen Instituts der Universität zu Köln, der International School of Design der Fachhochschule Köln, des Hasso-Plattner Instituts der Universität Potsdam und des Römisch Germanischen Museums. Das Projekt wurde als Museumsanwendung entwickelt und kann von Zeit zu Zeit im Römisch Germanischen Museum betrachtet werden. Durch Interaktion mit einem Touch-Table und einer 3D-Mouse kann man einen virtuellen Rundgang durch das antike Köln starten.

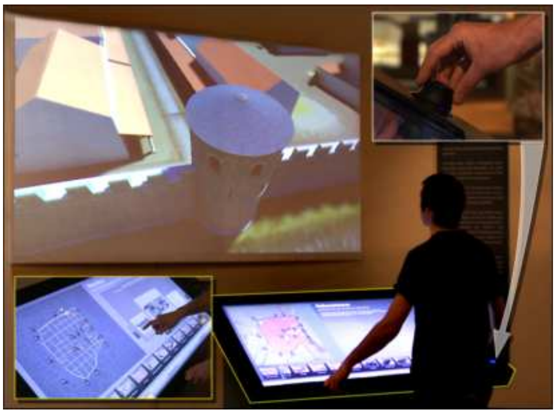


Abbildung 8: Anwendung im Museum

An verschiedenen Ortspunkten von Interesse kann man sich anzeigen lassen, wie der jeweilige Teil heute ausschaut. Die Besonderheit an diesem Projekt ist, dass ähnlich wie bei unserem, interdisziplinär daran gearbeitet wurde. So haben neben Archäologen auch Bauforscher, Designer und Informatiker daran mitgewirkt. Eine weitere Besonderheit an diesem Projekt ist, dass die Altertumsexperten freimütig zugeben, dass sich durch neue Funde altes Wissen als falsch erweisen kann. Wir haben uns das Projekt an der Fachhochschule Köln persönlich ansehen dürfen und einige Hintergründe erfahren. Bei Gebäuden, über deren genaues Aussehen viel bekannt war, wurde aufwändiger und detaillierter modelliert als bei anderen. Hier wurden beispielsweise Kapitelle aufwändig ausgearbeitet. Gebäude, über die nur sehr vages Wissen bestand, wurden nur als einfache Kubenmodelle realisiert. Dies sind häufig Nebenhäuser, die weder Türen noch Fenster erhalten haben, sondern nur als Rechteck mit Dach modelliert wurden. Somit wird dem Betrachter nur belegbares Wissen vermittelt und es werden keine Unwahrheiten verbreitet. Diese Idee haben wir so teilweise auch auf unser Projekt angewendet.

Das vorläufige Modell

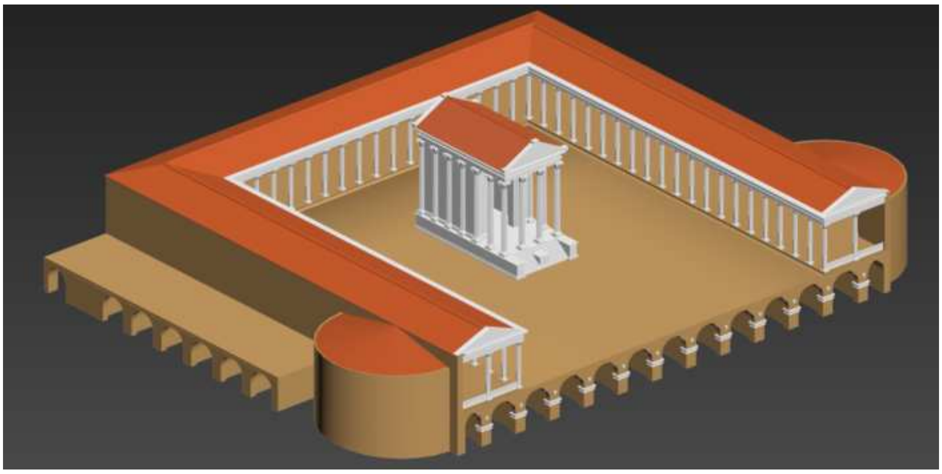


Abbildung 9: Gesamtansicht der Hafenanlage

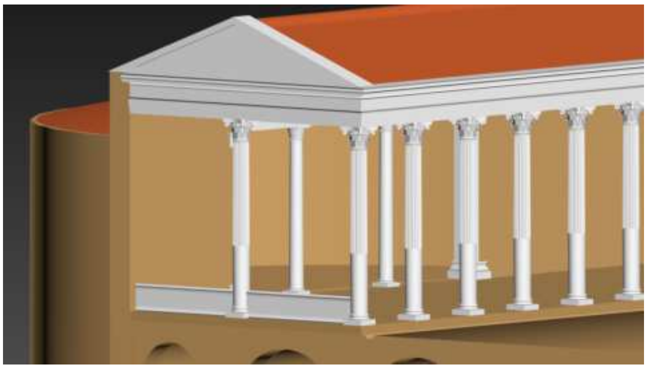


Abbildung 10: Detailansicht Säulengang

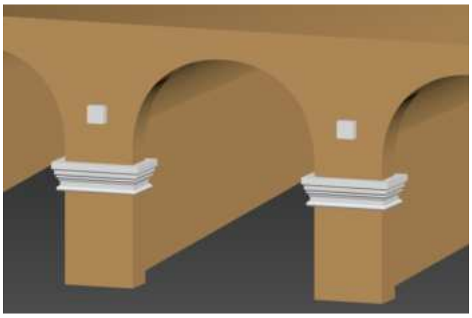


Abbildung 11: Detailansicht Gewölbe

Abbildung 12: Gesamtansicht Tempel

Abbildung 13: Detailansicht Giebel

Zukunftsaussichten

Der Modellierprozess ist bei der Hauptanlage bereits abgeschlossen. Zurzeit wird das Umland fertiggestellt und mit der Texturierung angefangen. Desweiteren war geplant einen Höhenplan in das Modell einzubinden. Jedoch zeigt der uns zur Verfügung stehende Plan die Höhenlinien von heute, was ihn für unsere Zwecke unbrauchbar macht. Im Sommer 2013 sind weiter Ausgrabungen durch Prof. Heinzelmann und seine Archäologiestudenten geplant. Dies könnte völlig neue Erkenntnisse mit sich bringen, und unser Modell müsste dann noch einmal überholt werden. Wir hatten im März 2013 die Gelegenheit, selbst nach Ostia Antica zu fahren und uns einen Eindruck von der Umgebung zu machen. Leider haben wir von der Hafenanlage nicht viel gesehen, da nur kleine Teile bis jetzt ausgegraben wurden. Vielleicht haben wir zu einem späteren Zeitpunkt noch einmal die Möglichkeit, die Ausgrabungen zu besuchen.

Römische Zahlen

—

trial and error

Caroline Albrecht

Zählen, Ziffern, Zahlen, Rechnen. Wenn heutzutage Zahlen verwendet werden, ob in der Mathematik oder im Alltag, werden diese von den meisten Personen als eine selbstverständliche Grundlage angesehen, die 'einfach da' ist und als kleines Kind gelernt wird. Warum jedoch verwenden wir arabische anstelle von römischen Zahlen, wenn doch unsere Gesellschaft in einem nicht ganz unbeträchtlichen Maße von der der Griechen und Römer geprägt ist? Tatsächlich verbirgt sich hinter den arabischen Zahlen, welche ursprünglich aus Indien stammen, eine jahrhundertlange Geschichte der Erfindung, Überlieferung und Entwicklung, an welcher viele verschiedene Kulturen, wie zum Beispiel die Sumerer, Babylonier, Ägypter, Griechen, Römer, Maya, Chinesen, Inder und Araber[1], beteiligt waren.

> „Die Geschichte der Ziffern verlief alles andere als geradlinig, und wir kennen sie nur in Bruchstücken. ... [Sie ist] chaotisch und turbulent, voller brillanter Durchbrüche, aber auch Rückschläge und Fehler. Sie verlief nach dem Prinzip von *trial and error*, und so mancher Lösungsversuch endete in einer Sackgasse, wurde vergessen oder aufgegeben."
> [[Ifr92] 11-2]

Es handelt sich hierbei um eine Entwicklungsgeschichte, die von unterschiedlichen Bedürfnissen sozialer Gruppen abhängt, denn Erfindungen können sich nur dann weiterentwickeln, wenn sie auf gesellschaftliche Bedürfnisse einer Zivilisation Antwort geben. Hirten, Buchhalter und Priester, Astronomen und Astrologen sowie Mathematiker spielen die entscheidenden Rollen in diesem Prozess und bei der damit verbundenen Entwicklung der Zahlensysteme. Die römische Zivilisation war eine, die sowohl ihre Mitglieder, ihre Vorräte, ihre Verluste und ihre Gefangenen zählen als auch die Gründung ihrer Städte und ihre Siege datieren und schriftlich festhalten wollte.

Zahlen, Ziffern, Zählen

Die Erfindung der Zahlen und des Zählens beruht auf empirischen Grundlagen, da sie mit den praktischen Bedürfnissen der jeweiligen Kultur zusammenhängt. Bauern zählen ihr Kleinvieh, indem sie, immer wenn ein Tier an ihnen vorbei läuft, eine Kerbe in ein Holz oder einen Knochen ritzen, wodurch die sogenannten Kerbhölzer entstanden. Soldaten legen einen Kiesel auf einen Haufen und nehmen ihn nach der Rückkehr wieder weg. Die Anzahl der auf dem Haufen zurückbleibenden Kiesel entspricht der Anzahl der zurückgebliebenen Soldaten. So wurde 'gezählt' ohne zu zählen wie wir es heute tun, da das Zählen an sich noch nicht auf einer abstrakten Ebene ablief, sondern im Grunde jedem Element einer Menge, z. B. den Soldaten, ein Element einer anderen Menge, z. B. die Kiesel, paarweise zugeordnet wurde.

Diese paarweise Zuordnung spielt auch in der Religion eine große Rolle. Mithilfe des Rosenkranzes kann die Litanei der römisch-katholischen Kir-che in der richtigen Abfolge gebetet werden, da eine kleine Perle für ein *Ave Maria* steht, eine größere Perle für ein *Vaterunser* und ein *Ehre sei dem Vater* etc. Wenn man nun die Perlen nacheinander durch die Finger beim Beten gleiten lässt, ist die Litanei durchzuführen, ohne 'aktiv zählen' zu müssen.

[1] Sämtliche Information sind soweit nicht anders gekennzeichnet aus [[Ifr92]].

Eins, Zwei, Viele

Die ersten numerischen Begriffe, die dem Menschen verständlich waren, waren *eins* und *zwei.* Die eigene Person als einzelner Mensch und dessen Bezug zum Gegenüber; wie zum Beispiel das Paar von Mann und Frau, welches sich in einer Gruppe und damit in einer Vielzahl von anderen Individuen befindet. Anstelle von *eins, zwei, viele* könnte man auch *ich, du, wir* sagen. In der deutschen Sprache drückt der Begriff *beide* noch eine solche Dualität aus. Als weiteres Beispiel dienen die Demonstrativpronomen *dies* – Objekt in der Nähe des Sprechzentrums – und *jenes* – Objekt vom Sprechzentrum entfernt[2].

Die Römer betonten die besondere Bedeutung der ersten numerischen Begriffe beispielsweise dadurch, dass sie nicht nur den Begriff *beide* im Lateinischen deklinieren, *ambo*, *ambae*, *ambo*, sondern auch die ersten drei Cardinalia: *unus*, *-a*, *-um*, *duo*, *-ae*, *-o* und *tres*, *tres*, *tria* [vgl. [Rub95] 62].

Zahlenwahrnehmung, Bündelung

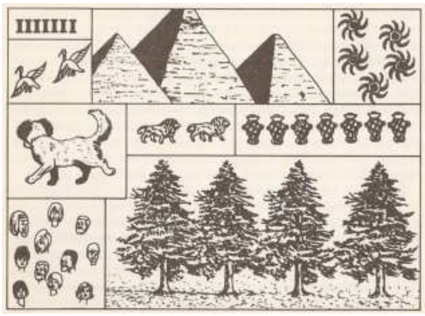


Abbildung 1: [[Ifr86] 26]

Was kann noch auf einen Blick wahrgenommen werden? Menschen besitzen die natürliche Fähigkeit der unmittelbaren Zahlenwahrnehmung. Die drei Pyramiden in Abb. 1 sind gut auf einen Blick zu erkennen, sogar die vier Tannen können von dem menschlichen Auge noch aufgenommen werden. Danach wird es schwer, zumindest für ein unge-schultes Auge und ohne eine bestimmte Anordnung der Objekte. „*Die Fähigkeit des Menschen zur unmittelbaren Wahrnehmung der Zahlen geht nicht über die Zahl Vier hinaus.*“[[Ifr92] 25]

[2]Andere Sprachen, wie zum Beispiel das Japanische, zeigen weitere Differenzierungen auf: *kore* als Demonstrativpronomen für ein Objekt in der Nähe des Sprechzentrums, *sore* als Demonstrativpronomen für ein Objekt in der Nähe des Adressaten und *are* als Demonstrativpronomen für ein Objekt, welches sowohl von Sprecher als auch Adressaten entfernt ist [Yu 10]. Für letzteres gibt es in der deutschen Sprache kein eigenes Pronomen.

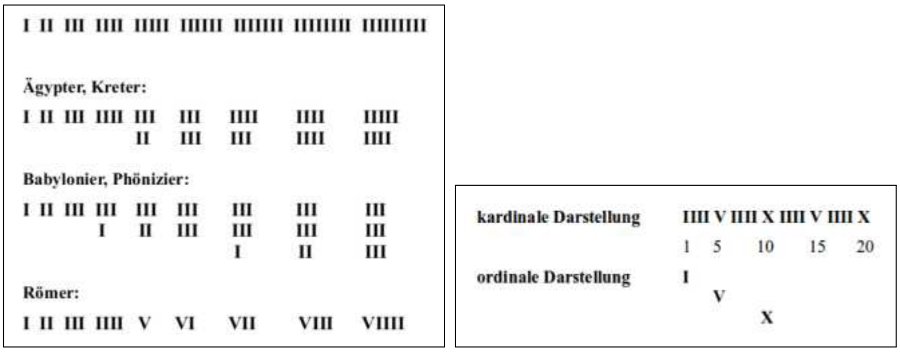


Abbildung 2: [vgl. [Ifr92] 24-5]

Aus diesem Grund führen verschiedene Kulturen Zerlegungs- bzw. Bündelungsprinzipien ein, um die Zahl schneller erfassen zu können. Vertikale Striche werden nun nicht mehr einfach hintereinander gestellt, sondern wie in Abb. 2 (oben) gebündelt. Die Addition der vertikalen Striche bleibt dabei unverändert.

Die Römer gehen bei der Bündelung einen Schritt weiter und führen ein zusätzliches zweites Zeichen V ein, um die Anzahl der Ziffern[3] zu reduzieren. Anstelle einer langwierigen, kardinalen Wiedergabe wird eine (teilweise) ordinale Darstellung eingeführt, in der bei der V die vier vorausgehenden Striche wegfallen (s. Abb. 2 (unten)).

Abfolge, Kardinal- und Ordinalzahlen

Die Entwicklung erfolgt von einer paarweisen Zuordnung zu einem Zahlenbewusstsein und zu der Unterscheidung zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen. Weiter entstanden verschiedene Zahlensysteme und schließlich ein abstraktes Zahlenverständnis, wodurch ‘Rechnen’, wie wir es heute kennen, erst möglich wird.

Zu der Vorstellung eines Ordnungsbegriffs braucht es ein Bewusstsein einer bestimmten Abfolge von Ziffern, welche festgelegt und unveränderlich ist. „[J]ede Folge von Wörtern oder Symbolen wird zu einer Art ’Zählmaschine’, sobald sie in der Reihenfolge ihrer Glieder exakt festgelegt ist.“[[Ifr92] 37] Als solche Zählmaschine können Abzählreime, Litaneien, das Alphabet oder auch die Folge der Monatsnamen zu Hilfe genommen werden. Im Falle des Alphabets stünde heutzutage also *A* für *eins*, *B* für *zwei*, *C* für *drei* etc.

[3]Der Begriff *Ziffer* im GWD hat die ursprüngliche Bedeutung ‘Zahlzeichen’, ‘Leerstelle’ und stammt vom Arabischen *sifr* ‘Leere’ bzw. *safira* ‘leer sein’ ab.

Rechenmaschinen

Die Hand

Vor allem – aber nicht nur – kleine Kinder nehmen die Hände als Hilfsmittel zum (Ab-)Zählen und benutzen Finger, um eine Zahl darzustellen (‘Wie alt bist du denn?’ - *Kind hebt seine Hand mit drei ausgestreckten Fingern hoch und sagt:* ‘So viel.’). Als „natürliches Werkzeug“ [[Ifr92] 62] dienten die Hände bald als erste Rechenmaschine, weshalb wohl auch das Dezimalsystem das gängigste Zahlensystem ist. Je nach Kulturkreis hatten die einzelnen Finger, Fingerglieder, Fingerkombinationen oder Fingerkrümmungen verschiedene Zahlen zur Bedeutung.

Bis ins 18. Jahrhundert hinein feilschten Händler mit den Händen bzw. Fingern. Sie reichen sich die Hände unter einem Tuch, damit die Umstehenden nichts sehen und somit den Preis nicht erkennen konnten, und berührten einander die Finger, wodurch sie um den Preis feilschten. Der Größenordnung sind sich beide Beteiligte von Anfang an bewusst. Der sichere und selbstbewusste Umgang mit Zahlen ist die selbstverständliche Voraussetzung für einen guten Handel. Folgend wird eine mögliche Zuordnung aufgezeigt:

- 1 - Zeigefinger,
- 2 - Zeige- und Mittelfinger,
- 3 - Zeige-, Mittel- und Ringfinger,
- 4 - Hand ohne Daumen,
- 5 - ganze Hand,
- 6 - zweimal Zeige-, Mittel- und Ringfinger drücken $(3 + 3)$,
- 7 - erst Hand ohne Daumen, dann Zeige-, Mittel- und Ringfinger $(4 + 3)$,
- 8 - zweimal die Hand ohne Daumen $(4 + 4)$ und
- 9 - erst ganze Hand, dann Hand ohne Daumen $(5 + 4)$.

Zu beachten ist hier bei den Zahlen über fünf, dass ein bestimmtes Bündelungsprinzip angewandt wird: Die sieben beispielsweise wird in eine vier und eine drei zerlegt anstelle von einer fünf und einer zwei.

Mit beiden Händen besteht die Möglichkeit, Zahlen bis zu 9999 auszudrücken. Dies ist in Abb. 3 abgebildet, wobei jeweils die Einer und die Zehner, und die Hunderter und die Tausender mit einer Hand dargestellt werden.

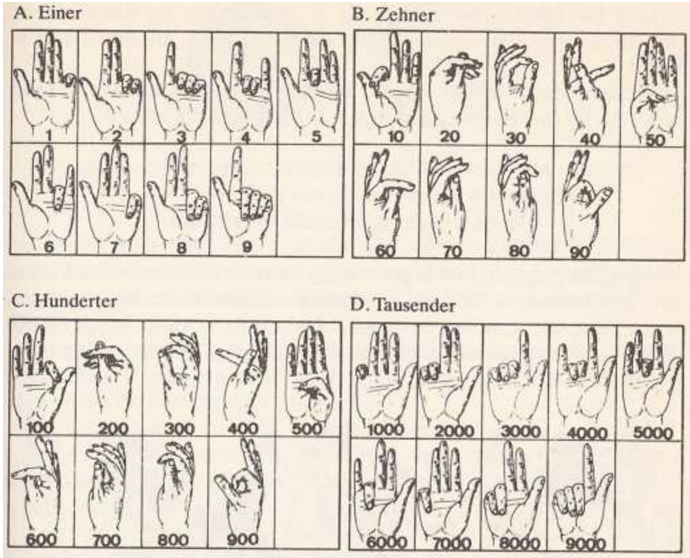


Abbildung 3

Wird nach diesem System die Zahl 93 dargestellt, ähnelt die Hand einer Klaue oder Kralle, sodass diese Zahl bzw. Geste zum Symbol für Geiz wurde. Es ist sogar möglich, Multiplikationen mit den Händen durchzufüh-ren (vgl. [[Ifr86] 97]). Dies beschränkt sich allerdings auf das kleine Einmaleins im Bereich von fünf bis zehn.[4]

Vom Calculus zum Kalkulieren oder: Das Rechenbrett

Dass kleine Kieselsteinchen zum Zählen benutzt werden, haben wir schon gesehen. Im Verlauf der Geschichte werden diese als Hilfsmittel weiter entwickelt, sodass mit Steinchen nicht nur gezählt, sondern sogar gerechnet werden konnte. Der Abakus[5] wurde erfunden.

‘Der kleine Stein’ oder ‘Steinchen’ heißt im Lateinischen *calculus*. Hinzu kommt die Bedeutung ‘Rechenstein’ und metonymisch dazu die ‘(Be-)Rechnung’. Die Römer häuften also beim Rechnen calculī an[6] Ein Calculator war demnach ein Rechner bzw. Buchhalter.

Für das Rechnen nahmen die Römer den Abakus zu Hilfe, da sich die nach langer Zeit entwickelten römischen Ziffen dafür nicht eigneten und das dezimale Positionssystem erst

[4]Die gebeugten Finger werden addiert und dann mir 10 multipliziert. Dann werden die gestreckten Finger miteinander multipliziert und zu dem Ergebnis der gebeugten Finger addiert. 6×8 kann wie folgend berechnet werden: 1. Hand: 1 Finger eingeknickt $(6 - 5)$. 2. Hand: 3 Finger eingeknickt $(8 - 5)$. Demnach sind insgesamt 4 Finger eingeknickt. Ausgestreckt sind 4 Finger an der einen und 2 Finger an der anderen Hand. Also: $6 \times 8 = 4 \times 10 + 4 \times 2 = 48$.

[5]‘Rechenbrett’, ‘Spielbrett’

[6]Calculī kamen in der römischen Kultur nicht nur beim Zählen und Rechnen vor. Auch in der Politik wurden calculī bei Abstimmungen als Votiersteine benutzt. Ein schwarzes Steinchen bedeutete eine Nein-, ein weißes Steinchen eine Ja-Stimme. In der Literatur steht ein *calculus albus* – ein weißes Steinchen – metonymisch für eine Zustimmung, wie zum Beispiel Plinius d. J. im 2. Brief seines 1. Buches der *Epistulae* um die Befürwortung eines Freundes bittet: „... confitebor et ipsum me et contubernales ab editione non abhorrere, si modo tu fortasse errori nostro album calculum adieceris ...“[[Sch92]].

nach der Einführung der Null entstand. Bei der Erfindung und Weiterentwicklung der römischen Zahlen hatten die Römer und vor ihnen die Etrusker nicht die Absicht, mit diesen Ziffern größere Rechnungen durchzuführen – für architektonische Konstruktionen genügte die Geometrie. Welche Absicht steckte dann hinter der Erfindung? „Die römischen Ziffern waren ebenso wie die akrophonen Ziffern der Griechen keine Rechenzeichen, sondern *Abkürzungen, um Zahlen aufzuschreiben und festzuhalten.* Aus diesem Grund haben römische Buchhalter und später die Rechenmeister im europäischen Mittelalter zum Rechnen immer einen Abakus mit Rechenmarken zu Hilfe genommen." [[Ifr92] 133] Ursprünglich konnte mit der griechischen und römischen Zahlschrift auch schriftlich gerechnet werden, allerdings führten die beiden Kulturen im Laufe der Zeit zusätzliche Zeichen ein, um die Anzahl der Ziffern, aus der eine Zahl besteht, zu reduzieren (vgl. Abb. 4 und 5). Diese Entwicklung bedeutete einen Rückschritt für das Rechnen.

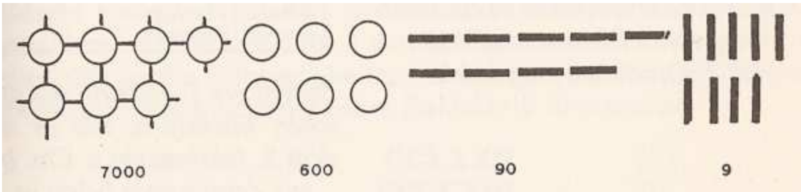


Abbildung 4: Darstellung der Zahl 7699 in archaischen griechischen Ziffern

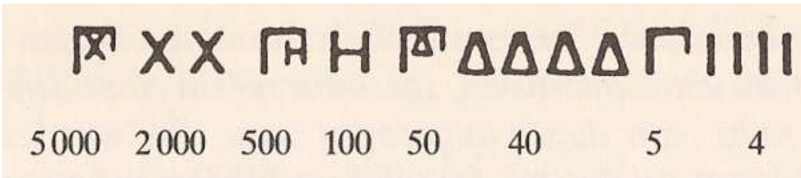


Abbildung 5: Reduktion der Ziffern von 31 auf 15

Die römischen Zahlen

An der Erfindung der römischen Zahlen waren die etruskischen Hirten, welche ihre Herden zählten (Kerbholz), maßgeblich beteiligt. Die Etrusker bevölkerten in der Zeit vor den Römern den nördlichen Teil der Apenninhalbinsel. Die römischen Zahlzeichen sehen wie folgend aus:

I	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
1	5	10	50	100	500	1000

Nachahmungen der Buchstaben des lateinischen Alphabets? Heute Ja, aber sie wurden ursprünglich nicht daraus abgeleitet. Die Einer waren ursprünglich ein senkrechter Strich, die Zahl Fünf ein spitzer Winkel, die Zehn ein Kreuz, die Hundert ein duch einen senkrechten Strich geteiltes Kreuz, die 1000 ein Kreis, der von einem Kreuz geteilt wird, und die 500 die Hälfte des Zeichens für 1000 (vgl. Abb. 6).

Abbildung 6

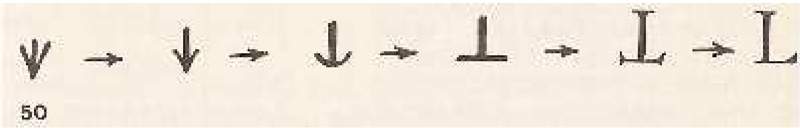


Abbildung 7

Abb. 7 zeigt die Entwicklung der Zahl 50 bevor sie im 1. Jh. v. Chr. mit dem Buchstaben L verschmolz. Entsprechend wurde vermutlich nach dem Ende der Republik das Zeichen Φ, die Ziffer für 1000, durch den Buchstaben M, *mille* 'tausend', ersetzt. Die Ziffern werden nach dem additiven Prinzip aneinandergereiht, wie die meisten Systeme der Antike. Die Römer führten jedoch mit der Zeit zusätzlich die Subtraktion ein, indem eine Ziffer links einer Ziffer mit höherem Wert von dieser abgezogen wird. Dadurch wurde einerseits das System etwas komplizierter, andererseits konnten weitere Ziffern eingespart werden, wie gut an der Zahl Neun zu erkennen ist: IX anstelle von VIIII. Auch die Darstellung der Zahl 7699 (s. Abb. 4 und 5) wird durch die römischen Ziffern kürzer: Die römischen Zahlen eignen sich vor allem für Zahlen unter 1000. Für die Darstellung größerer Zahlen gibt es eine Methode im Zeitraum der römischen Kaiserzeit bis zum ausgehenden europäischen Mittelalter, bei der die Ziffern mit 1000 multipliziert werden, indem ein horizontaler Strich darüber gezogen wird. Indem der Wert der Zahl umrahmt wird, wird die Zahl mit 100000 multipliziert. Bei der Abbildung größerer Zahlen leidet die Übersichtlichkeit oder es können Schwierigkeiten und Ungenauigkeiten[7] vorkommen. Jedoch war es für die Römer möglich, alle Zahlen von 1 bis 500 000 000 darzustellen.

[7] Sueton beschreibt in seinen Kaiserviten im Kapitel über Galba eine solche Ungenauigkeit. Anscheinend kürzte Kaiser Tiberius die Summe einer Erbschaft seiner Mutter Livia an Galba aufgrund einer unsauberen Notation von 50 000 000 auf 500 000. „Observavit ante omnes Liviam Augustam, cuius et vivae gratia plurimum valuit et mortuae testamento paene ditatus est; sestertium namque quingenties praecipuum inter legatarios habuit, sed quia notata, non perscripta erat summa, herede Tiberio legatum ad quingenta revocante, ne haec quidem accepit." [[Ihm93]]

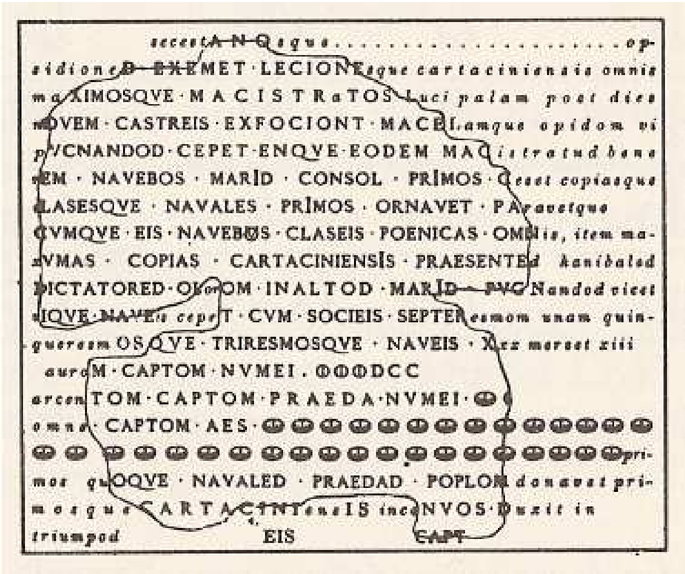


Abbildung 8: Eloge auf Dulius , den Sieger über die Karthager in der Seeschlacht bei Mylae 260 v. Chr. Die Inschrift wurde in der Kaiserzeit unter Claudius (41-54 n. Chr.) im Stil des 3. Jahrhunderts v. Chr. erneuert. Sie wurde auf dem Forum Romanum an den Rostra gefunden. In der 15. und 16. Zeile wird die Ziffer für 100000 mindestens 23mal wiederholt,

War die Erfindung der römischen Zahlen eine Sackgasse in der Geschichte der Ziffern? – Ja, da sie ungeeignet zum Rechnen sind, wofür die graphischen Zeichen der arabischen Ziffern (vgl. Abb. 9) sehr viel praktischer sind.

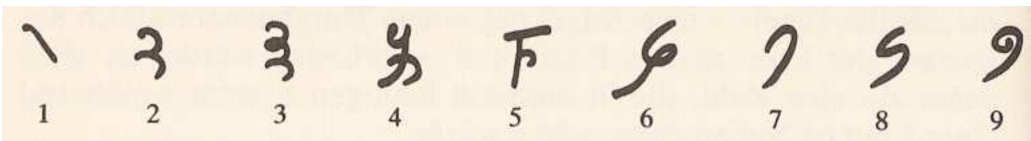


Abbildung 9: Vorformen der modernen neuen Grundziffern

Bei dieser Aussage sollte man allerdings bedenken, dass die römischen Zahlen nicht in erster Linie für das Rechnen erfunden wurden. Es ging vielmehr um die schriftliche Darstellung zur kurz- oder langfristigen Überlieferung. Römische Ziffern sind keine Rechenzeichen, sondern Abkürzungen, um Zahlen aufschreiben und festhalten zu können.

Abbildung 10: Holzschnitt, Freiburg 1503, die Arithmetik entscheidet sich im Streit zwischen Abakisten und Algoristen in Europa für letzteren.

Literatur

[Ifr86] Georges Ifrah. *Universalgeschichte der Zahlen.* Frankfurt/Main: Campus, 1986.

[Ifr92] Georges Ifrah. *Die Zahlen Die Geschichte einer grossen Erfindung.* Campus-Verl., 1992.

[Ihm93] M. Ihm. *C. Suetonii Tranquilli opera. Vol. 1. De vita Caesarum libri VIII. Rec.* Teubner, Stuttgart, 1993.

[Rub95] Hans Rubenbauer. *Lateinische Grammatik.* Oldenburg, München, 1995.

[Sch92] M. Schuster. *C. Plini Caecili Secundi Epistularum libri novem. Rec.* Teubner, Leipzig, 1992.

Fehler im Sport, Mathematik als Schiedsrichter

—

Sondersendung des Eberhard - Karls - Sportstudios

Stephan Walentin
Daniel Leyhr
Robert Fischer

Einleitung

Der Einsatz mathematischer und technischer Methoden und Instrumente im Sport hat in den vergangenen Jahren stark zugenommen. Sei es um den Wettkampf fairer zu gestalten, beispielsweise das Skispringen unabhängiger von äußeren Einflüssen zu machen, oder um den Zuschauer laufend mit Informationen zu füttern. So wird der Zuschauer über gelaufene Kilometer eines Spielers, über die Windstär-kenverteilung an der Skisprung-schanze, über Trefferquoten bei Freiwürfen oder über Zwischenzeiten von Abfahrtsläufern informiert. Ziel der Sondersendung des Eberhard-Karls-Sportstudios war deshalb, einige heiß diskutierte Themen aus dem Sport unter diesem Blickwinkel zu betrachten und der „Mathematisierung“ und dem zunehmenden Technikeinsatz im Sport eine Plattform zu geben.

Dazu wurden drei Gäste geladen, und im Folgenden sind Interviewausschnitte mit FIFA-Schiedsrichter Dr. Daniel Leyhr, Mathematiker Dr. Robert Bob und Ex-Radprofi Danny Hamilton und dem Moderator Stephan Müller-Hohenstein abgedruckt.

Abseits: ja oder nein? – Interview mit FIFA-Schiedsrichter Dr. Daniel Leyhr

Wer den Fernseher anschaltet und den Sportkanal wählt, wird Fehler beobachten können. Denn ein Aspekt eines jeden Wettkampfes ist, dass Fehler gemacht werden. Nur durch Fehler des Sportlers ist der Reiz des Wettkampfes gewährleistet. Gibt es keine Fehler, so sind die Sieger meist schon vorher klar.
Damit der Wettkampf ergebnisoffen und fair bzw. gerecht verlaufen kann, muss es Regeln geben, für deren Einhaltung Schiedsrichter sorgen. Werden Regeln verletzt, so greift er ein. Ein Schiedsrichter ist aber keine Maschine, die Regelverstöße zu 100% aufdeckt, und es kommt unvermeidlich zu Fehlentscheidungen. Entdeckt oder unentdeckt. Gravierend oder akzeptabel.
Woche für Woche werden Entscheidungen von Schiedsrichtern höchst kritisch hinterfragt. Prominente Beispiele hierzu sind das Wembley-Tor bei der WM 1966 oder der Schuss von Frank Lampard bei der WM 2010 im Spiel Deutschland gegen England. Rote Karten, gelbe Karten, nicht gegebene oder gegebene Freistöße oder kritische Abseitsentscheidungen sind mitunter spielentscheidend. Die Frage, die sich hier stellt: Kann man durch Einsatz technisch-mathematischer Hilfsmittel Fehler vermeiden? Über deren Sinn und Zweck haben wir mit FIFA-Schiedsrichter Dr. Daniel Leyhr diskutiert.

Stephan Müller-Hohenstein: Guten Abend, Herr Dr. Leyhr. Es freut mich sehr, dass sie den Weg zu uns gefunden haben, um uns ein paar Dinge aus ihrem Sport näher zu bringen. Ich habe in meinen Eingangsworten schon darauf hingewiesen, dass sie uns in Sachen „Fehler beim Abseits “und auch zur Torlinientechnik einiges erzählen werden.
Dr. Daniel Leyhr: Vielen Dank für die Einladung. Ja, es ist richtig, ich habe interessantes Material mitgebracht.
M: Dann widmen wir uns dem Thema, das Woche für Woche weltweit alle Topligen immer aufs neue beschäftigt: das Abseits. Ist es wirklich so wichtig?
L: Klar, es ist ein zentraler Aspekt des Spiels und natürlich werden wir Schiedsrichter oft für unsere Fehler angeprangert. Deswegen stelle ich ihnen heute einmal vor, was es mit dem Abseits so auf sich hat und zeige ihnen, dass es nicht einfach ist, eine Abseitsentscheidung zu treffen. Dann möchte ich auch erklären, woher die Fehler kommen, und wie wir versuchen, weniger Fehler zu machen.
M: Das hört sich interessant an. Doch darf ich Sie vielleicht bitten, noch einmal die Abseitsregel zu erklären?
L: Selbstverständlich. Zeigen wir das Ganze hier an der Tafel.
Ein Spieler befindet sich in einer Abseitsposition, wenn er zum Zeitpunkt der Ballabgabe der gegnerischen Torlinie näher ist als der vorletzte gegnerische Spieler und der Ball.
Der Spieler ist aber erst dann in einer Abseitsposition, wenn er aktiv ins Spielgeschehen eingreift, also etwa den Ball spielt, einen Gegner behindert oder irritiert.
M: Vielen Dank. Ich denke, die Beurteilung von Abseits ist eine schwierige Angelegenheit. Besonders wenn zwei Spieler sich aufeinander zu bewegen, kann ich mir vorstellen, dass es Probleme gibt, da man den Moment erwischen muss, den es zu beurteilen gilt.
L: Genau, Herr Müller-Hohenstein, diese gegenläufigen Bewegungen machen uns Schieds-

richtern die größten Schwierigkeiten und führen häufig zu Fehlern.
M: Können Sie uns vielleicht erklären, wo genau die Ursachen für diese Fehler liegen?
L: Sehr gerne. Wir Schiedsrichter (SR) haben uns dafür der Wissenschaft bedient.
Eine Studie von Raoul R. D. Oudejans [Bee00] von der Universität Amsterdam hat gezeigt, dass die Schiedsrichterassisstenten (SRA) oftmals der eigentlichen Abseitslinie voraus laufen und somit eine problematische Seiteneinsicht gewinnen. Dieser geometrische Effekt führt dann zu Fehlern der Schiedsrichter.
Angenommen, der SRA stehe einen Meter näher an der Torlinie als die eigentliche Abseitslinie. Dann haben wir eine verschobene „scheinbare“ Abseitslinie, die der SRA wahrnimmt. Und was passiert dann?
M: Die Linie, die der SRA als Abseitslinie wahrnimmt, ist nicht mehr orthogonal zur Seitenauslinie.
L: Was dann zu Fehlern führt.
M: Das klingt logisch. Diese Erkenntnisse wurde gewonnen, indem professionelle SRA der höchsten Klassen 200 Abseitsentscheidungen treffen sollten. 40 mal lagen die SRA hierbei falsch.
L: Richtig, eine Fehlerquote von 20% ist für mich zu hoch. Entscheidend hierbei ist aber, dass in 179 Situationen die SRA -wie bereits erwähnt- zu weit vorne positioniert, also näher an der Torlinie als die eigentliche Abseitslinie waren.
M: Und Sie unterscheiden die so gemachten Fehler?
L: Ganz genau. Es werden zwei Fehler unterschieden. Die Flag Errors, kurz FE, und die Non-Flag Errors, kurz NFE.
M: Erklären Sie diese doch!
L: Bei den FE entscheidet der SRA auf Abseits, obwohl in Wirklichkeit kein Abseits vorlag. Diese sind vor allem dann wahrscheinlich, wenn der betreffende Angreifer den Laufweg links vom vorletzten Verteidiger wählt. Steht der SRA zu weit vorne, so erscheint ihm hier das Bild des Angreifers auf der Netzhaut rechts vom Bild des Verteidigers und er zieht deshalb die Fahne.
M: Das wäre dann also in diesem FE-Bereich.

L: Stimmt. Und der andere Bereich bestimmt den Bereich der NFE, wo der SRA kein Abseits signalisiert, obwohl in Wirklichkeit Abseits vorliegt. Dies ist wahrscheinlich, wenn der Stürmer rechts am vorletzten Verteidiger vorbeiläuft.
M: Sehr interessant. Also ist das Stellungsspiel des SRA ein entscheidender Faktor, der zu Fehlern beiträgt. Es sollte daher verbessert werden.
L: Ja, aber es ist sehr schwierig, bei einem Spiel mit vielen Richtungswechseln und hohem Tempo immer genau auf der wirklichen Abseitslinie zu sein. Weil sie das wissen, positionieren sich viele SRA einfach eher ein bisschen weiter vorne, um nicht von einem schnellen Angriff überrascht zu werden.
M: Wie kann man diesem Problem entgegensteuern?
L: Naja, wir haben die eben angesprochenen Fehler durch den geometrischen Effekt noch genauer untersucht, um den SRA ein Handlungsmuster mit auf den Weg zu geben.
M: Sie sprechen die Studie von Baldo, Ranvaud und Morya [BMVC02] an?
L: Ja. Diese Untersuchung betrachtet noch den Flash-Lag-Effekt.
M: Ich habe schon einmal nachgeschaut, was damit gemeint ist: ein sich bewegendes Objekt

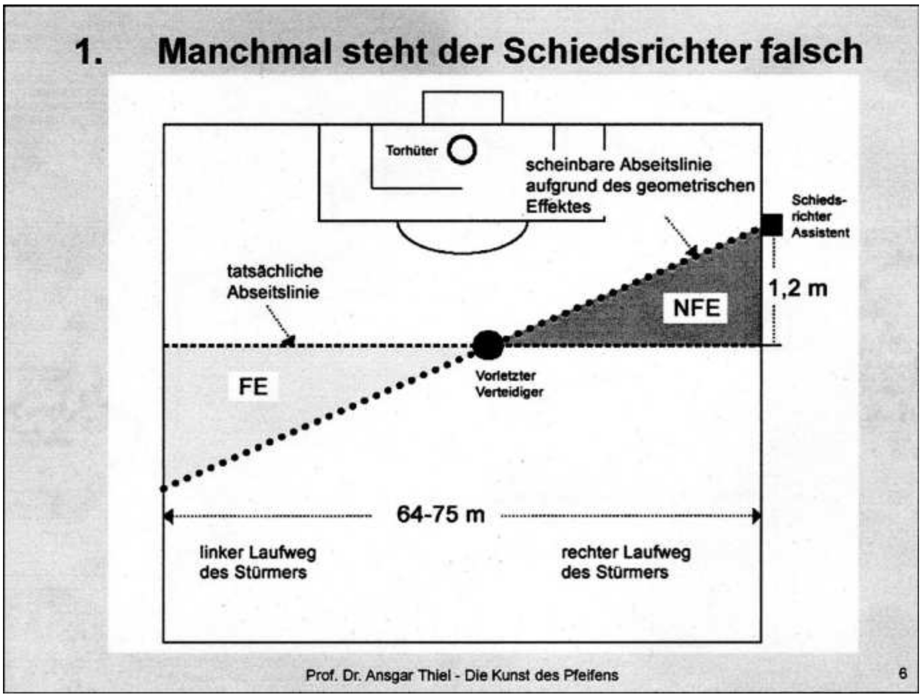


Abbildung 1: Abseitslinie

in der Außenwelt unterliegt durch neuronale Laufzeiten von der Retina bis zur bewussten Wahrnehmung ebenso einer Latenzzeit wie ein geblitztes. Wenn man jedoch an räumlich korrespondierender Stelle zu einem bewegten Stimulus einen zweiten blitzt, so wird der geblitzte als zurückliegend wahrgenommen. Dieser Effekt wurde als Flash-Lag-Effekt bekannt.

L: Genau so ist es.

M: Naja, für mich hört sich das jetzt ein bisschen zu wissenschaftlich an. Können Sie uns das vielleicht auf unsere Abseitssituation übertragen?

L: Klar. Der passempfangende Angreifer ist in unserem Fall der bewegte Reiz. Der Moment der Ballabgabe funktioniert als Zeitmarkierung. Der SRA muss nun entscheiden, ob der passempfangende Angreifer im Abseits steht oder nicht. Die Ballabgabe entspricht hier dem geblitzten Reiz. Dieser wird aber als zurückliegend wahrgenommen.

M: Können Sie uns das vielleicht noch am vorliegenden Schaubild erläutern?

L: Selbstverständlich. Wir haben hier die scheinbare Abseitslinie wegen des geometrischen Effektes. Nun wird diese noch nach hinten verschoben, weil der geblitzte Reiz als zurückliegend wahrgenommen wird.

M: Dies wäre dann etwa die Abseitslinie, die der SRA aufgrund des geometrischen und des Flash-Lag-Effekts wahrnimmt?

L: Richtig.

M: Und was heißt das nun?

L: Naja, wie Sie hier schon sehen, vergrößert sich die Zone des FE zusätzlich wegen des FLE.

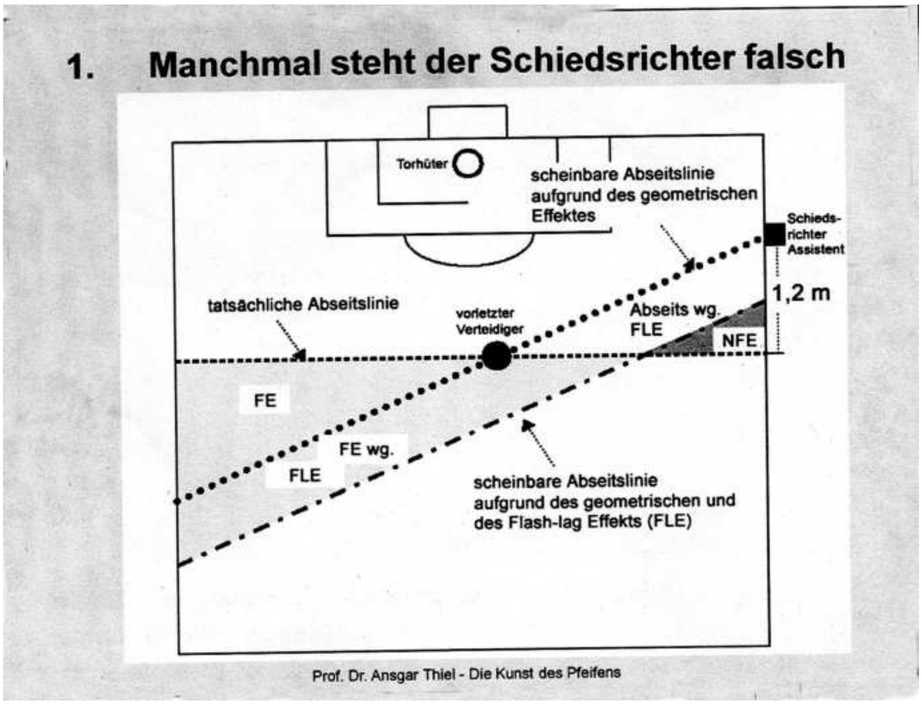


Abbildung 2: Abseitslinie mit dem Flash-Lag-Effekt

Im Bereich des NFE signalisiert der SRA auch Abseits wegen des FLE, und eine kleine Zone für den NFE bleibt übrig. Dies zeigte sich auch bei den Ergebnissen der Untersuchungen: es gibt eine allgemeine Tendenz in Richtung Flag Errors. Der SRA zieht also zu oft die Fahne, wenn eigentlich kein Abseits vorliegt. Um ein paar Zahlen zu nennen: in der Studie von Baldo [BMVC02] wurden 564 Fehler festgestellt. 324 davon waren FE, 240 waren NFE. Es ist aber auch noch erwähnenswert, dass der Flash-Lag-Effekt auch eintritt, wenn sich der SRA auf der richtigen Abseitslinie befindet, weswegen auch hier eine Tendenz zu FE-Fehlern erwartet wird.
M: Das ist interessant. Was machen Sie nun aus diesen Erkenntnissen?
L: Wir als SR müssen uns vergegenwärtigen, dass zu oft Abseits signalisiert wird, obwohl keines vorliegt. Deswegen sagen wir unseren SRA, in kritischen und engen Situationen eher die Fahne unten zu lassen, da man hiermit dann meistens richtig liegt. Dies kann nur durch unzählige Spielsituationen trainiert werden. Wir sprechen von einem Bauchgefühl, das der SRA entwickeln muss. Die Mathematik allein genügt also nicht.
M: Dies hört sich für mich aber doch sehr vage an. Ich denke, der Videobeweis wäre eine Möglichkeit, eine genauere Entscheidung herbei-zuführen. Im Eishockey beispielsweise findet er schon lange Anwendung, aber auch beim American Football. Könnte man ihn hier nicht auch einsetzen, um schwierige Abseitsentscheidungen zu lösen?
L: Können sicherlich irgendwie schon. Die Frage ist doch nur: wollen wir das wirklich? Wollen wir, dass ein Fußballspiel dermaßen auseinandergebrochen wird in einzelne kleine Teile, wenn man bei jeder schwierigen Entscheidung einen Videobeweis einfordert? Ich will das nicht. Durch eine solche Maßnahme verliert für mich das Spiel seinen Reiz. Und ich

denke auch für die Zuschauer wäre das nicht gut. Wenn ich einmal im Jahr den Super-Bowl anschaue, frage ich mich jedes Mal, warum denn die Unterbrechungen viel länger sind als das eigentliche Spiel. Es kommt noch hinzu, dass wir beim Abseits von sehr vielen Entscheidungen sprechen, die es dann zu überprüfen gälte und oft nicht durch „Schwarz oder Weiß“ entschieden werden können.
M: Wie meinen Sie das?
L: Naja, beim Abseits ist es ja nicht nur entscheidend, ob sich ein Spieler in einer Abseitsposition befindet, sondern auch, ob dieser ins Spiel eingreift. Dies bedarf wieder eines kompetenten Gremiums, welches in kürzester Zeit entscheiden müsste, was wiederum menschliche Fehler provozieren würde.
M: Sind sie dann also gegen jegliche technische Hilfsmittel, um einen faireren und eben auch fehlerfreieren Wettkampf zu gewährleisten?
L: Das habe ich nicht gesagt. Ich denke in der modernen Gesellschaft wäre es geradezu blauäugig, sich gegen eine Technisierung im Sport zu wehren. Wir sehen es ja beispielsweise beim Tennis, wo das Hawk-Eye in schwierigen Situationen entscheidet, ob der Ball im Aus war oder nicht. Oder auch beim Skispringen wird nun zu jedem Zeitpunkt des Flugs der Wind gemessen und mittels einer mathematischen Formel in Punkte umgerechnet. Natürlich muss man sich hier in gewissem Maße solcher Techniken bedienen.
M: Sie sprechen die Hawk-Eye Technik an. Beim Fußball könnte man eine ähnliche Technik ja auch anwenden, wenn es um die Frage geht, ob der Ball im Tor war oder nicht. Sind sie dafür?
L: Natürlich bin ich dafür. Solche Situationen, die -wenn sie eintreten- spielentscheidend sind, kommen nicht so oft vor und würden den Spielfluss nicht wesentlich beeinflussen. Außerdem kann durch die Technik sofort die richtige Entscheidung herbeigeführt werden, ohne einen Ermessensspielraum offen zu lassen.
M: Ich sehe dies ähnlich. Im übrigen hat die FIFA die Torlinientechnik für die Weltmeisterschaft 2014 in Brasilien schon beschlossen. Herr Dr. Leyhr, ich danke Ihnen für dieses Gespräch.

Als nächsten Gast haben wir einen Mathematiker von der Eberhard-Karls-Universität Tübingen eingeladen, der uns die Mathematik im Sport näher bringen soll.

Sport und Mathe? – Interview mit Dr. Robert Bob

Stephan Müller-Hohenstein: Herr Dr. Bob, es freut uns sehr, Sie bei uns begrüßen zu dürfen. Wie man immer wieder hört, sind Sie einer der führenden Mathematiker, die in den Sportwissenschaften tätig sind. Wir sind sehr gespannt auf Ihre neusten Ergebnisse.
Dr. Robert Bob: Ich hoffe Ihnen zeigen zu können, dass die Mathematik nicht nur brotlose Kunst ist, denn sie kann auch im Sport einiges bewirken.
M: Darauf sind wir sehr gespannt.
B: In den letzten zwei Jahren habe ich mich damit beschäftigt, auszurechnen, welche Spitzenleistungen im Sport (ohne Doping) überhaupt möglich sind. Dazu habe ich den 100-Meter Lauf der Frauen und Männer näher betrachtet. Ich wollte herausfinden, mit welchen sportlichen Höchstleistungen man in den nächsten Jahren rechnen darf.

Um dies berechnen zu können, bedurfte es an Ergebnissen von Sportlern aus den letzten Jahren. Um dabei keine Werte zu berücksichtigen, die durch Doping erzielt wurden sind, habe ich nur Werte ab dem Jahr 1991 herangezogen, da erst ab 1990 die modernen Dopingkontrollen eingeführt wurden.
Wenn wir uns die Verteilung der sportlichen Leistungen anschauen, die zwischen 1991 und 2008 erzielt wurden, so erhalten wir folgendes Diagramm:

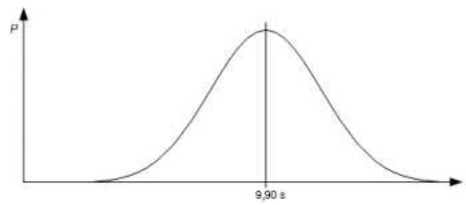


Abbildung 3: Verteilung der sportlichen Leistungen

B: Mit Hilfe mathematischer Methoden konnte ich berechnen, dass der bestmögliche Wert, der in naher Zukunft erzielt werden kann, für Männer bei 9,51s und für Frauen bei 10,33s [uSGWRS11] liegt. Diese Aussage wurde mit einem 95%-igem Vertrauensintervall bestimmt. Das heißt, zu 95% trifft diese Aussage auch tatsächlich zu und nur zu 5% liegt eine falsche Aussage vor. Dieses Ergebnis ist beeindruckend, da ich diesen Wert schon 2008 ermittelte und Usain Bolt bereits 2009 einen neuen Rekord von 9,58s aufgestellt hat.
M: Sie denken also, dass man nicht annehmen sollte, dass bessere Ergebnisse nur noch durch leistungssteigernde Mittel erzielt werden können?
B: Ganz genau, Herr Hohenstein. Zudem gibt es noch andere Gründe für Rekordsteigerungen außer den vielleicht besseren körperlichen Leistungen der Sportler. Einer davon ist die Verbesserung der Messtechnik: Messungen in Bereichen wie etwa dem Tausendstel-Sekunden Bereich waren früher nicht möglich. Zum anderen gibt es eine zunehmende Zahl an sportlichen Wettkämpfern, wodurch auch der „statistische Zufall"immer wahrscheinlicher wird. Man könnte hier noch viele weitere Faktoren anfügen.
M: Es gibt aber auch andere Möglichkeiten, um besonders markante Rekordsteigerungen zu erzielen, die statistisch nicht zu erwarten sind: nämlich durch Doping.

Abbildung 4: Lance Armstron

Doping: geht es auch ohne? – Interview mit Fahrradprofi Danny Hamilton und Dr. Bob [Thi12]

Lange Zeit war Doping ein Tabuthema im Sport. Heute vergeht kaum eine Woche, in der nicht neue „Dopingsünder“ entlarvt werden und der „gute“ Ruf des (Spitzen-)Sports auf die Probe gestellt wird. Die jüngste Geständniskette von prominenten Sportlern bis hin zum gefallenen König des Radsports Lance Armstrong [Enc13a] bestätigt dies. Mit dem Finger auf die Sportler zu zeigen und deren Moral anzuprangern, ist nicht ausreichend, um das Phänomen Doping zu durchleuchten und wird den Sportlern nicht gerecht. Unser dritter Gast, Ex-Radprofi Danny Hamilton, gab uns einen Einblick in das System Hochleistungssport und machte deutlich, dass Doping kein zufälliger Fehltritt einzelner Sportler ist, sondern im Zusammenhang mit der Eigenlogik des Spitzensports steht.

Stephan Müller-Hohenstein: Herr Hamilton, schön, dass Sie sich Zeit für uns genommen haben. Sie waren mehrfacher Tour de France-Teilnehmer und Etappensieger und haben bei Olympischen Spielen sowie Weltmeisterschaften teilgenommen. Im vergangenen Herbst haben Sie nach Beendigung Ihrer Karriere Ihre Biographie [Coy12] veröffentlicht, in der Sie einen sehr detaillierten Einblick in das System Hochleistungssport und Doping geben. So schreiben Sie in Ihrem Buch: „Es ist nicht der Fehler der Sportler, sondern ein Fehler im System Spitzensport!“ Wie ist diese Aussage zu verstehen?
Danny Hamilton: Als Spitzensportler läuft man Gefahr, in einer „biographischen Falle“ zu landen. Dies führt letztlich den Sportler in eine Situation, in der Handlungen möglich werden, die am Anfang einer Karriere undenkbar gewesen wären. So war für mich auch zu Beginn meiner Karriere Doping undenkbar. Gefangen im System Spitzensport wird Doping mit der Zeit eine Alternative.
M: Was genau meinen Sie mit biographischer Falle? Erleuchten Sie uns bitte.
H: Heute muss ein Leistungssportler sehr früh mit der Ausbildung beginnen, teilweise schon vor dem fünften Lebensjahr. Sein soziales Umfeld konzentriert sich im Sport, der Kontakt zu Mitschülern nimmt immer mehr ab. Der Verein bietet dem Sportler eine neue, eigene Welt. Viele wichtige Ereignisse geschehen ab jetzt im Sport: dort werden die Meilensteine des Lebens gelegt, dort bekommt der junge Sportler auch die Bestätigung, die von da an sein Leben regiert. Im Spitzensport gilt die Logik: „Der Sieg ist alles – alles andere ist nichts“. Sie kennen sicher auch das Zitat: „Der Zweite ist der erste Verlierer “.
Der Sportler baut sein Leben zunehmend auf seiner sportlichen Leistung auf. Dies geht

Abbildung 5: John von Neumann

soweit, dass er sich dadurch definiert und in eine Abhängigkeit gerät.
Und nicht nur der Sportler ist an seiner Leistung interessiert: alle Mühen und Investitionen der Trainer, Funktionäre, sowie Sponsoren sind umsonst, wenn der Athlet nichts erreicht. An dem Tag, an dem der Sportler feststellt, dass seine Leistung nicht mehr ausreicht, um an diesem Leben teilzunehmen, ist sein ganzes Leben in Gefahr. Es gibt für ihn nur die Welt des Sports. Außerhalb gibt es keine Existenz. Der Athlet wird gezwungen, sein bisheriges Leben aufzugeben, oder aber zu dopen. Zumindest solange bis er eine Alternative gefunden hat.
M: Und um im System Spitzensport bleiben zu können, wird gedopt. Wenn ich das richtig sehe, ist das Hauptrisiko eines Sportlers die Erfolglosigkeit. Denn wir haben zu Beginn der Sendung bereits gesehen, dass Scheitern in der Logik des Sports fest verankert ist. Nur durch das „Scheitern“ von Sportlern kann es Sieger und Verlierer geben. Außerdem betreffen Misserfolge alles, was mit der Unterstützung des Sportlers zu tun hat: Sponsoren, Trainer, Familie, technisches Personal, Physiotherapeuten etc.
H: Genau. Und deshalb ist es viel zu einfach, nur auf den Sportler zu zeigen und zu sagen: Er hatte ja die Möglichkeit der Wahl. Denn die Entscheidung ist keine freie Entscheidung mehr. Doping ist keine Frage schlechter Charaktereigenschaften, sondern vielmehr eine Reaktion der Sportler auf die Zwänge, die das System Spitzensport mit sich bringt. Es wird gedopt, um das Scheitern der eigenen Karriere zu verhindern und die Unsicherheit nach der Karriere zu minimieren. Wer dopt, minimiert das Risiko, in finanzielle Engpässe zu geraten.
M: Dr. Bob, würden sie den Aussagen zustimmen, dass der Sportler keine wirkliche Wahl hat?
B: Wir haben das Phänomen Doping unter uns Mathematikern bei Tee und Keksen diskutiert. Man kann dies sogar mathematisch untermauern, denn die Entscheidung für oder gegen Doping entspricht einem klassischen „Gefangenen-Dilemma“. [Enc13c]
M: Davon habe ich schon gehört. Hat das nicht etwas mit Spieltheorie zu tun? Es geht dabei doch um Entscheidungssituationen, bei denen der Erfolg des einen nicht nur von der eigenen Entscheidung, sondern auch von der des anderen abhängt.

B: Ganz Genau. John von Neumann [Enc13b] hat diese Theorie mathematisch formalisiert. Das Prinzip beim „Gefangenen-Dilemma “ist ganz einfach. Wir haben Athlet A und Athlet B. Beide sind Konkurrenten innerhalb eines Wettkampfes und haben prinzipiell zwei Strategien zur Auswahl: Doping oder kein Doping. Beide Athleten treffen ihre Wahl jeweils mit Kenntnis der Präferenz des Gegners, aber ohne Wissen über dessen tatsächliche Entscheidung. Sie reden nicht über Doping und wissen auch nicht um Dopingpraktiken des Gegners.
M: Dann ergeben sich vier mögliche Konstellationen:

a) A und B dopen nicht,

b) A dopt und B dopt nicht,

c) B dopt und A dopt nicht,

d) A und B dopen.

B: Exakt. Und wie Herr Hamilton schon vorher gesagt hat, stehen die Athleten unter erheblichem Erfolgsdruck. So ergeben sich beispielsweise für Sportler A vier Ausgänge.

1) Das beste Ergebnis: A dopt sich, B dopt sich nicht. Hier ergibt sich der höchste Nutzen für A hinsichtlich einer Kosten-Nutzen-Bilanz.

2) Zweitbestes Ergebnis: Beide dopen nicht. Bei dieser Konstellation entsteht ein „fairer“ Wettbewerb ohne die potentiell negativen Folgen des Dopings.

3) Zweitschlechtestes Ergebnis: Beide dopen sich. So entsteht ein „fairer“ Wettbewerb, aber mit potentiellen negativen psychischen, physischen und sozialen Folgen.

4) Schlechteste Ergebnis: A dopt nicht, B dopt. Bei dieser Konstellation hat Sportler A den geringsten Nutzen, da er im Wettbewerb ohne eigenes Doping benachteiligt wird.

M: Dann ist Doping für Sportler A die beste Lösung.
B: Ganz genau, die gleiche Rechnung können wir auch für Sportler B durchführen.
M: Ich verstehe. Dann ist Doping die beste Lösung für beide.
B: Genau! Man nennt sie die „dominante Strategie“, denn beide Sportler wissen ja nicht voneinander, welche Option der andere gewählt hat. Und so führt die Entscheidung zu dopen zu einem mindestens genauso guten Output wie die Entscheidung des anderen.
M: Ok, klingt einleuchtend, aber wo ist da bitte ein Dilemma?
B: Das Dilemma besteht darin, dass die Situation, in der beide dopen die dominante und damit rational erklärbare Entscheidung ist. Für alle Parteien wäre aber das beidseitige „Nicht-dopen “das bessere Resultat, weil die psychischen, physischen und sozialen Konsequenzen des Dopings wegfallen.
H: Die Modellierung trifft es ziemlich gut und zeigt auch, dass die von den Journalisten und Funktionären vorgebrachte These eines Werteverfalls im Leistungssports kaum das Phänomen Doping erklärt. Daran hängt auch die Vorstellung, dass die Sportler aufgrund mangelnden Charakters oder mangelnder Intelligenz dopen und dazu viel eher bereit wären als „normale“ Personen.
M: Das ist sehr interessant. Doping wurde meist nur unter eben diesen Aspekten diskutiert. Spannend, dass die Mathematik in Form der Spieltheorie sogar Erklärungskraft für

das Phänomen Doping hat.
B: Und es geht sogar weiter. Doping könnte man auch durch eine einfache Kosten-Nutzen-Analyse betrachten. Man geht dann von einem Problem Doping aus, wenn für den erwarteten Nutzen (E(N)) der Athleten gilt:

$$E(N) \text{ Doping} > E(N) \text{ Kein Doping.}$$

M: Klingt einleuchtend. Und für die Bekämpfung des Dopingproblems müsste dann die Ungleichung genau umgekehrt sein:

$$E(N) \text{ Kein Doping} > E(N) \text{ Doping.}$$

H: Die Gleichung könnte umgedreht werden, indem der Nutzen einer Alternativkarriere größer ist als der Nutzen des Doping. Also

$$E(N) \text{ Alternativkarriere} > E(N) \text{ Doping.}$$

Das ist vielleicht ein bisschen theoretisch. In der Praxis sieht das noch anders aus. Aber dennoch ein guter Gedanke hinsichtlich der Dopingprävention.

M: Ja, ein schöner Ansatz. Es wird sich sicher lohnen diesen weiter zu verfolgen. Dennoch wollen wir an dieser Stelle das Thema vorerst abschließen.
Danke, Herr Hamilton, dass Sie uns einen Einblick in das System Spitzensport gegeben haben. Vielen Dank auch an Dr. Bob, der uns einen mathematischen Erklärungsansatz aufgezeigt hat. Das ganze Team dieser Sondersendung hofft, dass wir Ihnen Blitzlichter der Mathematik und Technik in Hinblick auf den Sport aufzeigen konnten. Dennoch ist und bleibt die Mathematik hinsichtlich des Sports „nur“ ein Hilfsmittel, das uns ermöglicht, Phänomene besser zu verstehen oder aber mögliche Fehler, die die Gleichheit und Ergebnisoffenheit des Wettkampfes gefährden, zu verringern.

Literatur

[Bee00] Raoul R. D. Oudejans; Raymond Verheijen; Frank C. Bakker; Jeroen C. Gerrits; Marten Steinbrückner; Peter J. Beek. Errors in judging ’offside’ in football. *Nature Journal*, 404, 2000.

[BMVC02] Morya E. Baldo M. V. C., Ranvaud R. D. Flag errors in soccer games: the flash-lag effect brought to real life. *Perception Journal*, 31:1205 – 1210, 2002.

[Coy12] Tyler Hamilton; Daniel Coyle. *The Secret Race: Inside the Hidden World of the Tour de France: Doping, Cover-ups, and Winning at All Costs.* New York Times, 2012.

[Enc13a] Wikipedia The Free Encyclopedia. `http://de.wikipedia.org/wiki/Lance_Armstrong`, zuletzt geändert am 16. Mai 2013.

[Enc13b] Wikipedia The Free Encyclopedia. `http://de.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann`, zuletzt geändert am 21. April 2013.

[Enc13c] Wikipedia The Free Encyclopedia. `http://de.wikipedia.org/wiki/Gefangenendilemma`, zuletzt geändert am 3. Mai 2013.

[Thi12] Karl-Heinrich Bette; Felix Kühnle; Ansgar Thiel. *Dopingprävention : eine soziologische Expertise*. Transcript, 2012.

[uSGWRS11] John H. J. Einmahl und Sander G. W. R. Smeets. Ultimate 100-m world records through extreme-value theory. *Statistica Neerlandica*, 65:32–42, 2011.

Jake Desmond

What Have We Done With Mathematics?

—

Jake Desmond

Introduction

Mathematics has long been thought of as the standard example for a logical system on which one builds ideas. The notion of having an axiomatic system and using *a priori* truths to prove theorems within the system was initially set forth by Euclid and is the basis for mathematical research to the present day. As easy as it may sound to show that “c is true if a and b are true”, mathematical claims are not always straightforward and “evident” observations may be taken for granted, especially when the line of thinking has strayed so far away from a rigid axiomatic system into the more colloquial and conventional language that mathematicians use to this day.

Euler

One of the most well known errors in mathematical proofs was by Augustin Louis Cauchy, a french Mathematician who was fundamental in the development of analysis. Within his book Cours D’analyse in 1821, Cauchy has the following theorem: A convergent series of continuous functions converges to a continuous function. The novice student is inclined to follow through Cauchy’s proof, accepting each statement in the proof as true, and thus the proof is completed. However, there are various Fourier Series which can be provided as counterexamples left to baffle the student. On another investigation of the proof, one sees that underneath the basic ideas, Cauchy had accidentally assumed a condition known today as “uniform convergence“, and with this assumption the result easily follows.

Euclid

The ancient Greek mathematician Euclid was the founder of the fundamental notion of an axiomatic system that mathematicians still follow to the current day. This system lays down a set of axioms that are taken to be true and from these truths a logical foundation is created. Theorems are devised and then proved using logical assumptions that can always be traced back to these axiomatic truths, regardless of how tedious it may be. Euclid started with 5 axioms for what now is known as Euclidean Geometry. The first four are straightforward and are written in a more or less basic language. The fifth, known as the Parallel Postulate, states that “if a straight line falling on two straight lines make the interior angles on the same side less than two right angels, the two straight lines, if produced indefinitely, meet on that side on which are the angles less than the two right angles”. Euclid and many other mathematicians believed that the fifth postulate was unnecessary and could be proven from the other four. Many attempts were carried out in this respect, including Posidonius, Ptolemy, and Proclus. Eventually Girolamo Saccheri came to the idea of what are now called Saccheri Quadrilaterals, which are quadrilaterals that have two congruent sides that are perpendicular to its base. Three options then arise for the two angles, called summit angles, that are not initially assumed to be right angles: the summit angles could either be right, obtuse, or acute. Saccheri’s goal was to prove that the latter two cases were

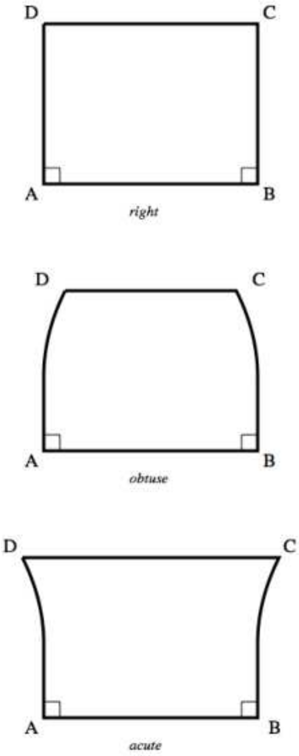


Figure 1: The three Saccheri Quadrilaterals

impossible, and thus the angles must be right angles, which would in turn imply the fifth postulate. He was partially successful, in the sense that he proved that if the obtuse case was assumed and lines could be extended indefinitely, then a contradiction was obtained. He rejected the acute angle case, stating that “the hypothesis of the acute angle is absolutely false; because it is repugnant to the nature of straight lines”. [RL94]

This was, however, precisely the problem: what is a straight line? At first sight one may think that the question is moot, as it is simple a line which does not curve! What then, is a curve? Euclid had failed to define what a straight line was and had just relied on his intuition, for it does seem that we live in a world that can easily be modeled by Euclidean Geometry. The acute and obtuse cases from earlier seem absolutely absurd when one looks at a drawn representation, because the summit line would either then “curve” in towards the quadrilateral or “curve” outwards.

Saccheri’s idea for the obtuse case was the basis for what became developed by Riemann, known as elliptical geometry, or geometry on a sphere. In spherical geometry, lines are assumed to be finite in length and called great circles. The fifth postulate is then changed to state that for any given line and a point not on the line, every line through the point will intersect the given line, i.e. for a given line and a point not on the line, there are no parallels to the given line! While it may seem odd on a “flat” surface, when you add positive curvature surface, such as a globe, the geometry becomes more fitting for the surface with which one is working. This also explains why flight paths appear to be "curved" on maps for airplane flights. The projection from the globe onto the 2 dimensional map causes the straight line (great circle) to appear curved. [RL94]

The battle continued trying to avoid stating the fifth postulate, and many mathematicians suggested other postulates in place of the fifth, all of which eventually turn out to be equivalent to the fifth postulate. Some notable examples include: there is at most one line that can be drawn parallel to another given one through an external point (Playfair's axiom), the sum of the angles in every triangle is 180 degrees (triangle postulate), and there is no upper limit to the area of a triangle (Wallis axiom).

Gauss decided to tackle the problem by contradicting the 5th postulate. The problem is that a statement with "one and only one" has two ways to contradict itself: it has more than one or less than one. Seeing as the elliptical geometry case takes the latter case, Gauss contradicted the infamous postulate by stating that for every given line and a point not on the line, there are an infinite number of lines parallel to the given line. Gauss's hope was to eventually derive a contradiction in his system, and by a type of proof known as "proof by contradiction", Gauss would have shown that his initial assumption cannot be assumed. Instead of obtaining his goal, Gauss, along with others who had the same idea (Janos Bolyai and Nikolai Lobachevsky), developed what is now known was hyperbolic geometry! [RL94]

This 2,000 year battle following Euclid's fifth postulate led to discussions about what a mathematical truth is and how it differs from "what is obvious". While we may feel that we live in the world of plane geometry, looking far enough away, the world is in fact spherical. Simply using "intuitive" ideas such as points, lines, and circles is not rigorous enough for a formal mathematical system and everything except for the axioms must be defined and not considered known or true until a suitable proof has been given.

Formal Proof

The idea of a formal axiomatic system is further built upon by formal proofs, which is "a proof in which every logical inference has been checked all the way back to the fundamental axioms of mathematics. All the intermediate logic steps are supplied, without exception" [Hal08]. Therefore, the computer never has a chance to use its intuition. While controversial in the mathematical community, people have already began the transition between using formal proofs to prove or reconfirm results, one of the most notable being the Four Color Theorem. Within this system of formal proofs, two different types of software have been developed: proof checkers and theorem provers. Proof checkers do exactly as they say. A proof is input into the software, redefined into the software's logical language system. Then the computer checks the assumptions made all the way back to their axiomatic bases. On the other hand, theorem provers attempt to actually prove a statement, but as it is difficult to give a generalized algorithm to prove something, they are not as reliable. [Gon08, Har08, Wie08]

The Formal Jordan Curve Theorem

$$
\begin{aligned}
&\forall C.\ \mathit{simple\_closed\_curve}\ \mathit{top2}\ C \Rightarrow \\
&\quad (\ \exists A\,B.\ \mathit{top2}\ A \wedge \mathit{top2}\ B\ \wedge \\
&\qquad \mathit{connected}\ \mathit{top2}\ A \wedge \mathit{connected}\ \mathit{top2}\ B\ \wedge \\
&\qquad A \neq \varnothing \wedge B \neq \varnothing \wedge \\
&\qquad A \cap B = \varnothing \wedge A \cap C = \varnothing \wedge B \cap C = \varnothing \wedge \\
&\qquad A \cup B \cup C = \mathit{euclid}\ 2\ )
\end{aligned}
$$

Figure 2

Figure 2 (Abbildung 2) shows a famous theorem, the Jordan Curve Theorem, written into the formal proof language (which itself depends on which program one uses). This would read for a member of the mathematics community: For every closed curve $C \subset \mathbb{R}^2$, there exists $A, B \subset \mathbb{R}^2$ such that A and B are both nonempty sets, $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$, and $A \cup B \cup C = \mathbb{R}^2$. To the standard person, this can be understood as: For every circle in the plane, it splits the plane into an "interior" and "exterior", whereas the interior is bounded(i.e. finite area), and the exterior is unbounded.

Formal proofs, like geometry and axiomatic systems, are a development, and furthermore revolve around the integration of logic, mathematics, and computer science. Their validity can be argued, but this also brings up the question of whether or not something is not true until it is proven to be. Just because there was a time that the Pythagorean theorem was not proved does not mean that its principles are still not valid. To compliment this idea, Oliver Heaviside said "I do not refused my dinner simply because I do not understand the process of digestion". While more in respect towards applied mathematics, in the sense of "if it works, use it", something must not first hand be proven before it can be used. An excellent example would be the Heaviside operator. This in turn brings up a more philosophical question of whether truth is more important than usefulness. Mathematics is continuing to grow, and with it as an interdisciplinary field that is quickly finding computer science to be an extremely useful tool. Every period of growth has gone through phases of opposition from its community, and they either become obsolete or accepted. To upkeep the sanctity of pure mathematics, much more effort will be needed in regards towards formal proofs, and even for mathematicians to be conscious of their errors! As for an applicable use of mathematics for real world inspired problems, assuming that precaution is taken and results match data input, then if a method works, why not just keep using it?

Literatur

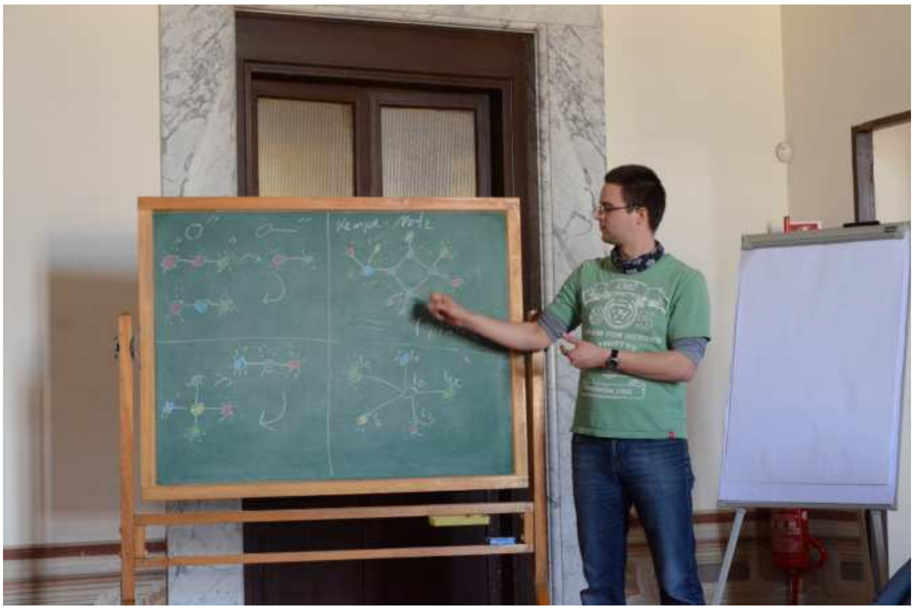
[Gon08] George Gonthier. Formal Proof - the Four-Color Theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55:1382–1393, 2008.

[Hal08] Thomas C. Hales. Formal Proof. *Notices of the American Mathematical Society*, 55:1370–1380, 2008.

[Har08] John Harrison. Formal Proof - Theory and Practice. *Notices of the American Mathematical Society*, 55:1395–1406, 2008.

[RL94] Raymond H. Rolwing and Maita Levine. *The Search for Certainty: A Journey Through the History of Mathematics*. Open Court Publishing Company, Chicago, IL, USA, 1994.

[Wie08] Freek Wiedijk. Formal Proof - Getting Started. *Notices of the American Mathematical Society*, 55:1408–1414, 2008.



Der Vierfarbensatz

—

Vier Farben genügen - wenn der Computer nicht irrt.

Sebastian Schneckenburger

Abbildung 1: Die englischen Grafschaften mit vier Farben eingefärbt.

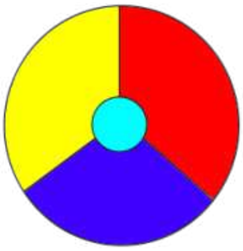


Abbildung 2: Es braucht 4 Farben

Die Geschichte des **Vierfarbensatzes** beginnt Mitte des 19. Jahrhunderts. Der junge Mathematiker *Francis Guthrie* bemerkt beim Einfärben der Landkarte Englands, dass ihm 4 Farben genügen, um alle Grafschaften so einzufärben, dass zwei gleichfarbige Grafschaften nicht aneinander grenzen (Abbildung 1). Daraus entwickelt er die Behauptung, dass dies bei jeder beliebigen Landkarte der Fall sei. Sein jüngerer Bruder *Frederick Guthrie* ist ein Student von *Augustus de Morgan* und stellt seinem Lehrer diese Behauptung als mathematische Fragestellung.[1] Am selben Tag, dem 23. Oktober 1852, schreibt nun De Morgan an *Sir W.R. Hamilton* einen Brief über das Problem. Das **Vierfarbenproblem** als mathematische Fragestellung ist geboren! [FF94]

Auszug aus dem Brief von de Morgan an Sir Hamilton:
My dear Hamilton
A student of mine asked me to day to give him a reason for a fact which I did not know was a fact, and do not yet. He says, that if a figure be any how divided and the compartments differently coloured so that figures with any portion of common boundary line are differently coloured - four colours may be wanted but not more.

An dieser Stelle bringt De Morgan ein Beispiel, in dem mindestens 4 Farben benötigt werden (vgl. Abb. 2).

[1] Sämtliche Information sind soweit nicht anders gekennzeichnet aus [FF94].

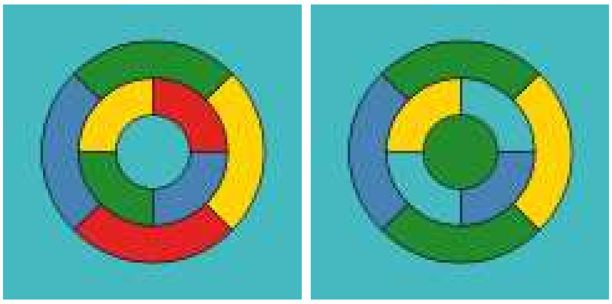


Abbildung 3: Es braucht 5 Farben? Quelle [Aut13]

De Morgan schreibt nun nicht von Grafschaften
(oder Ländern) einer Karte, sondern von „compartments“
(Bestandteilen) eines Bildes. Dies führt zu zwei für die Fragestellung wichtigen Einschränkungen. Haben zwei compartments nur einzelne Punkte als gemeinsame Grenzen, dürfen sie gleichfarbig sein. Weiter werden auch Exklaven/Enklaven ausgeschlossen. Ließe man diese Einschränkungen weg, kann man für jede beliebige Anzahl von Farben ein Gegenbeispiel konstruieren. So ließe sich z.B. eine auf klassische Art und Weise in $n + 1$ Stücke geschnittene Pizza nicht so mit $n \in \mathbb{N}$ Farben einfärben, dass sich nicht zwei gleichfarbige Pizzastücke im Mittelpunkt berühren würden.

Das Problem wird dann bis 1878 kaum weiter verfolgt. Dann veröffentlicht *Cayley* eine gründliche mathematische Analyse des Problems.[2]

1879 veröffentlicht dann *Sir Alfred Kempe* einen Beweis. Dieser wird mit ein paar kleineren Verbesserungen und Korrekturen durch *W.E. Story* von der Mathematikerwelt akzeptiert und das Vierfarbenproblem gilt als gelöst.

Nun kommt aber ein **Fehler** ins Spiel. *Percy Heawood* entdeckt 1890 einen solchen im Beweis. Es sollte weitere 77 Jahre dauern, bis der Satz bewiesen werden konnte.

Das Hauptaugenmerk der folgenden Ausführungen soll nun auf den Beweisideen von Kempe und seinem Denkfehler liegen.

Falsche Gegenbeispiele

In den mehr als 100 Jahren, in denen der Vierfarbensatz unbewiesen war[3], wurden viele „Gegenbeispiele“ konstruiert. Dabei und treten vor allem zwei Typen von falschen Gegenbeispielen auf. Der eine Typ sind Landkarten, die schon mit 5 Farben eingefärbt sind und auf den ersten Blick nicht passend umgefärbt werden können.

Färbt man z.B. in der linken Grafik in Abbildung 3 nur ein Land um, kann man keine 4-Färbbarkeit erreichen, Man muss dafür wenigstens 4 Länder auf einmal umfärben.

[2] [FF94] verweist auf „Proceedings of the Royal Geographic Society“
[3] und auch noch danach

Der andere Typ von falschen Gegenbeispielen konstruiert Objekte, die tatsächlich nicht mit vier Farben einfärbbar sind. Diese Objekte sind dann aber keine Landkarten im klassischen Sinn. Beliebt ist z.B. das Gedankenkonstrukt einer Landkarte, in der sich 5 Länder jeweils gegenseitig als Nachbarn haben. So eine Landkarte wäre tatsächlich nicht mit nur vier Farben einfärbar, allerdings kann sie auch nicht auf einer Ebene oder einer Kugeloberfläche existieren. Sie ist vorstellbar auf dem Torus, wo wir jedoch topologisch eine komplett neue Situation haben. Auf dem Torus gilt nicht der Vierfarbensatz, sondern der Siebenfarbensatz, ein Beispiel für eine mit mindestens 7 Farben einzufärbende Landkarte auf dem Torus ist in Abbildung 4 zu sehen.

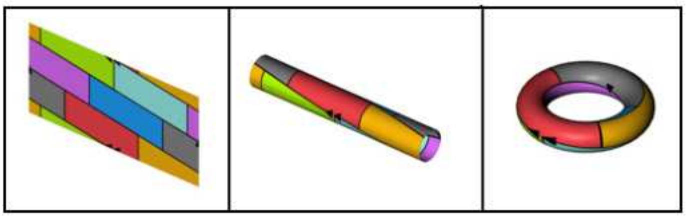


Abbildung 4: Auf dem Torus braucht es 7 Farben! Quelle [Aut13]

Auf zum Beweis?

Begriffe

Bevor wir uns an den Beweis wagen, brauchen wir natürlich erst einmal einen Begriffskanon, mit dem wir mathematisch sauber arbeiten können. Zunächst zum Begriff Landkarte. Diese sind zunächst ein sehr komplexes Konstrukt aus Linien und Flächen. Betrachtet man zwei Dreiländerecken (auf zwei verschiedenen politischen Karten) so können diese die verschiedensten Formen annehmen. Aus dem Blickwinkel der Vierfärbbarkeitsproblematik gibt es jedoch keinen Unterschied.

Praktischerweise gibt es eine einfache Dualitätsbeziehung zwischen Landkarten und einfachen planaren Graphen.[4] Man betrachte die Abbildung 5.

Jedem Land ordnen wir eine Ecke des Graphen zu und jeder gemeinsamen Grenzlinie zweier Länder eine Kante des Graphen.[5] Nun können wir uns das Färbarkeitsproblem für Graphen betrachten, und lösen damit das Färbbarkeitsproblem für Landkarten.

Definition: LANDKARTE
Es sei L eine nichtleere Menge und $G \subseteq \{Y \subset \mathcal{P}(L) : |Y| = 2\}$.

Dann bezeichnen wir den Graphen

$$\mathcal{L} = (L, G)$$

[4] Einfache planare Graphen haben keine mehrfachen Kantenzüge und keine sich kreuzenden Kanten. Wen diesen Zusammenhang zwischen mengentheoretischer Topologie und Kombinatorik tiefer interessiert, in [FF94] Kapitel 2,3 und 4 wird dies ausführlich behandelt.

[5] Dass wir dies dürfen, liegt am **Satz von Wagner/Fáry** Satz 4.2.11[FF94]

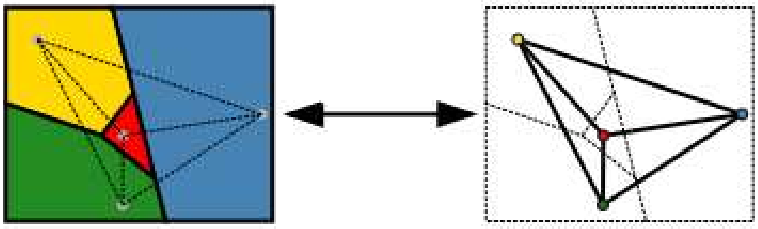


Abbildung 5: Dualität

als Landkarte (L sind die Länder (entspricht den Ecken) und G die Grenzen (entspricht den Kanten) zwischen zwei Ländern), wenn $\mathcal{L}$ ein planarer[6] Graph ist. Zwei Länder L_1, L_2 heißen benachbart, falls

$$(L_1, L_2) \in G.$$

Definition: ZULÄSSIGE (LANDKARTEN-)(4-)FÄRBUNG
Es sei $\mathcal{L} = (L, G)$ eine Landkarte. Wir nennen eine Abbildung $\chi : L \to \{b, g, r, y\}$ eine **(4-)Färbung** von $\mathcal{L}$. Falls zwei benachbarte Länder nicht gleich eingefärbt sind nennen wir χ ein **zulässige** (4-)Färbung.

Übung : Man erstelle den der politischen Landkarte Deutschlands entsrpechenden planaren Graphen (Länder=Bundesländer) und färbe ihn mit einer zulässigen Färbung ein.

Damit können wir nun den Vierfarbensatz korrekt formulieren.
Satz: VIERFARBENSATZ

Für jede Landkarte gibt es eine zulässige 4-Färbung.

Kleinste Verbrecher

Beweisidee: KLEINSTE VERBRECHER
Wir kommen nun zur generellen Beweisidee. Angenommen, der VIERFARBENSATZ wäre falsch. Dann muss es Landkarten geben, für die es keine zulässige 4-Färbung gibt. Diese Landkarten nennen wir *Verbrecher*. Als **kleinste Verbrecher** bezeichnen wir Landkarten aus der Menge der Verbrecher, die minimal bezüglich der Anzahl der Länder sind. Wenn also $\mathcal{L}_{\mathcal{V}} = (L_V, G_V)$ ein kleinster Verbrecher mit $n = |L_V|$ Ländern ist, so sind alle Landkarten $\mathcal{L} = (L, G)$ mit $|L| < n$ keine Verbrecher, besitzen also eine zulässige 4-Färbung. Der Beweis ist dann geglückt, wenn wir zeigen können, dass es keine kleinsten Verbrecher gibt.

Wir sammeln nun einige Eigenschaften kleinster Verbrecher.

[6] Satz von Kuratowski: Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keinen zu K5 oder K3,3 homöomorphen Teilgraphen enthält. Der Satz von Wagner/Fáry ist eine Variante von Kuratowski.

Lemma 1

Von 5 Ländern einer Landkarte (diese muss nicht notwendigerweiße ein kleinster Verbrecher sein) müssen mindestens zwei nicht benachbart sein.

Beweis. Vergleiche **Satz von Weiske** [FF94, 4.5.1]

Lemma 2 Ein kleinster Verbrecher hat mindestens 5 Länder.

Beweis durch Bildchen (betrachte die Abbildung 2).

Lemma 3 In einem kleinsten Verbrecher gibt es keine Länder mit weniger als 3 Nachbarn.

Beweis. Angenommen, wir hätten einen kleinsten Verbrecher $\mathcal{V}$ mit einem Land l_0 mit nur 2 Nachbarn. Es ist nach Voraussetzung möglich, die Landkarte $\mathcal{V}'$, die man erhält, wenn man das Land l_0 mit einem seiner Nachbarn verschmilzt (also quasi die Grenze zwischen diesen beiden eliminiert), zulässig mit 4 Farben einzufärben. Diese zulässige 4-Färbung χ von $\mathcal{V}'$ verwenden wir nun, um unseren kleinsten Verbrecher $\mathcal{V}$ einzufärben (Die neue Färbung nennen wir χ^*). Wir färben jedes Land mit der gleichen Farbe, die es unter χ erhielt. Das Land l_0 und seine Nachbarn färben wir mir der Farbe ein, die die beiden verschmolzenen Länder unter χ hatten. Der entscheidende Ausschnitt unserer eingefärbten Landkarte sieht also o.B.d.A so aus:

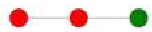


Abbildung 6: Eingefärbte Landkarte

Das Einfärben von $\mathcal{V}$ mit Hilfe einer gegebenen Färbung von $\mathcal{V}'$ nennt man *induziertes* Färben. Wir haben nun dank der zulässigen 4-Färbung χ von $\mathcal{V}'$ eine Färbung χ^* von $\mathcal{V}$ *induziert*, die schon fast zulässig ist. Wir färben $\mathcal{V} = (L, G)$ dann mit einer neuen induzierten Färbung χ^{**} ein. Dazu setzen wir $\chi^{**}(l_0) = b$ und $\chi^{**}(l) = \chi^*(l)$ für alle anderen Länder $l \in L \setminus l_0$. Nun haben wir für $\mathcal{V}$ eine zulässige 4-Färbung gefunden

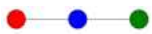
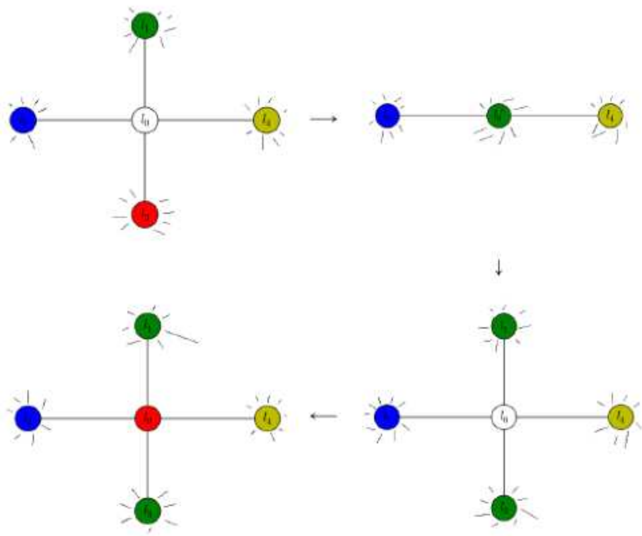


Abbildung 7: 4-Färbung

Damit haben wir einen Widerspruch herbeigeführt, und es gibt keine kleinsten Verbrecher mit Ländern, die nur 0,1 oder 2 Nachbarn haben.

Lemma 4 In einem kleinsten Verbrecher gibt es keine Länder mit weniger als 5 Nachbarn.

Beweis. Der Beweis läuft über einen durch eine induzierte Färbung erzeugten Widerspruch zur Existenz eines kleinsten Verbrechers mit einem Land l_0 mit nur 4 (respektive 3) Nachbarn. Der Beweis kann leicht anhand der folgenden Graphen nachvollzogen werden. Die Länder l_1, l_2, l_3, l_4 und l_0^* haben natürlich noch andere Nachbarn als l_0 (bzw. im Fall von l_0^* die Länder l_2 und l_4). Wir konzentrieren uns aber wieder auf den entscheidende Ausschnitt der Landkarte. Die anderen, für den Beweis unwichtigen Ländern, werden durch Striche angedeutet.



Lemma 5 In jeder Landkarte gibt es ein Land mit höchstens 5 Nachbarn.

Beweis.

Folgerung **4.6.3**[FF94]. Dieses Lemma ergibt sich aus dem Eulerschen Polyedersatz

(#Ecken-#Kanten+#Flächen=#Länder-#Grenzen+#Flächen=2)[7]

und einigen Abzählungen.

Nun kommen wir zum fehlerhaften Beweis des Vierfarbensatzes von Kempe. Dafür brauchen wir noch den Begriff der *Kempe-Ketten-Spiele* (KKS). Sie stellen den wichtigsten Beitrag von Kempe zur Lösung des Vierfarbenproblems dar. Auch wenn sein Beweis einen entscheidenden irreparablen Fehler enthält, beinhaltet er doch mit der Einführung der Kempe-Ketten-Spiele die zentrale Idee, die später zum computergestützten Beweis von Hakken, Appel und Koch führte.

Definition KEMPE-KETTEN Sei $\mathcal{L} = (L, K)$ eine Landkarte.

- Kette der Länge n: $(l_1, \ldots, l_n)$ mit $\{l_i, l_{i+1}\} \in K$ (und $l_i \neq l_j$ für $i \neq j$)
- Kempe-Kette : Eine Kette, deren Länder immer abwechselnd mit zwei Farben gefärbt ist. $(l_1, l_2, \ldots, l_r)$ ist eine blaue-grüne Kempe-Kette,. Kurz:(b,g)-Kette.

Bemerkung Zeichnen wir eine Landkarte als planaren Graphen so können sich zwei Ketten nur in einem Land (oder mehreren Ländern) kreuzen. Die Kanten zweier Ketten können sich nie kreuzen, da die Landkarte ein planarer Graph ist. Diese Bemerkung

[7]wobei # Anzahl bedeutet

Definition KEMPE-NETZ
Es sei $\mathcal{L} = (L, K)$ eine Landkarte mit einer zulässigen 4−Färbung χ.
Ein KEMPE-NETZ ist ein zusammenhängender Teilgraph

$$\mathcal{KN} = (L_{KN}, G_{KN})$$

von $\mathcal{L}$, der die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) Die Länder von $\mathcal{KN}$ sind nur mit zwei Farben eingefärbt.

(ii) Zwei Länder aus $\mathcal{KN}$ lassen sich durch eine Kempe-Kette in $\mathcal{KN}$ verbinden.

(iii) Bezüglich (i),(ii) ist $\mathcal{KN}$ maximal.

(iv) Ist $l_1, l_2 \in L_{KN}$ und $(l_1, l_2) \in K$, dann auch $(l_1, l_2) \in L_{KN}$.

Ein Kempe-Netz mit den Farben g und b nennen wir dann ein (b, g)-Netz, vergleiche Abbildung 8.

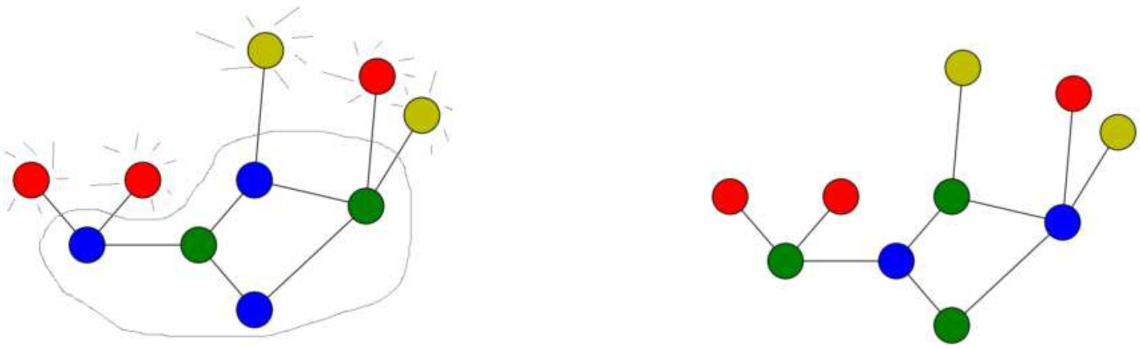


Abbildung 8: Links ein (b, g)-Netz und rechts die Landkarte nach einem Kempe-Ketten-Spiel.

Definition KEMPE-KETTEN-SPIELE (KKS)

Die Idee der Kempe-Ketten-Spiele ist folgende: Man möchte aus einer gegebenen Färbung χ auf einer Landkarte $\mathcal{L}$ eine neue Färbung χ^* induzieren, die ein bestimmtes Land umfärbt, aber im Rest der Landkarte bezüglich der Vierfarbenproblematik nichts Problematisches bewirkt.

Betrachten wir die Abbildung 8. Wir möchten nun diese Landkarte umfärben und zwar so, dass das blau gefärbte Land ganz links, welches an zwei rote und ein grünes Land grenzt, grün eingefärbt wird. Färben wir es einfach grün und belassen wir die Färbungen der anderen Länder, so haben wir zwei benachbarte grüne Länder. Also färben wir das angrenzende grüne Land blau. Dadurch haben wir das Problem, dass dieses blaue Land nun an zwei andere blaue Länder grenzt. Schrittweise müssen wir also nun alle Länder der Kempe-Kette umfärben, um eine zulässige Färbung zu ereichen.

Ein KEMPE-KETTEN-SPIEL ist eine induzierte Färbung, die die Farben eines Kempe-Netzes invertiert und den Rest der Landkarte gleich eingefärbt lässt. Vergleiche die gefärbten Landkarten in Abbildung 8.

Kempes „Beweis" des Vierfarbensatzes:

$\mathcal{L} = (L, K)$ sei ein kleinster Verbrecher. Nach **Lemma 5** gibt es ein Land mit höchstens 5 Nachbarn und nach **Lemma 4** muss dieses Land auch genau 5 Nachbarn haben.
Wir können also OBdA eine Situation wie in Abbildung 9 betrachten.

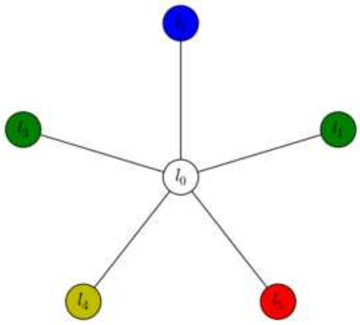


Abbildung 9: Kempes Beweis

Es gibt nun 3 Fälle.

(I) Es sind l_2 und l_5 in zwei verschiedenen (b,r)-Netzen. Färbe per Kempe-Ketten-Spiel das komplette (b,r)-Netz, das l_2 enthält, so um, dass $\chi'(l_2) = r$. Blau ist jetzt für l_0 frei.

(II) Es sind l_2 und l_4 in zwei verschiedenen (b,y)-Netzen. Färbe das komplette (b,y)-Netz, das l_2 enthält, per KKS so um, dass $\chi'(l_2) = y$. Blau ist jetzt für l_0 frei.

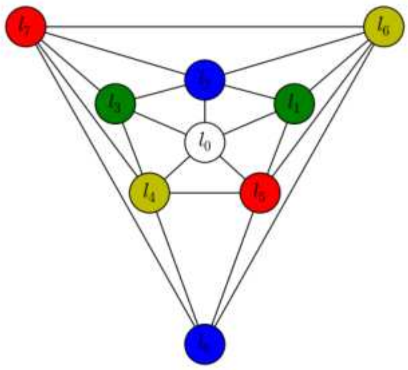
(III) Gibt es (b,r)-Ketten von l_2 nach l_5 und (b,y)-Ketten von l_2 nach l_4, so gibt es weder eine (g,y)-Kette von l_1 nach l_4, noch eine (g,r)-Kette von l_3 nach l_5.[8]
$\rightarrow$ Färbe per KKS so um, dass $\chi'(l_1) = y$ und $\chi'(l_3) = r$. Grün ist jetzt für l_0 frei.

Dieser Beweis wurde von Kempe im Jahre 1879 im American Journal of Mathematics veröffentlicht. Allerdings erhält er einen entscheidenden Fehler. Dieser wurde erst 1890 von Percy John Heawood entdeckt.

Heawood findet den Fehler

Heawood betrachtete eine Landkarte, bei der das eine Kempe-Ketten-Spiel im (III) Fall des Beweises die Voraussetzung für das andere Kempe-Ketten-Spiel zerstört. Seine Landkarte enthielt 18 Länder.[**?**] Wir zeigen hier in Abbildung 10 ein Beispiel mit 9 Ländern, bei dem das Gleiche geschieht.

[8]Siehe die Bemerkung zu Kempe-Ketten: Ein Land kann nicht sowohl Teil einer (b,r)-Kette als auch einer (g,y)-Kette sein.



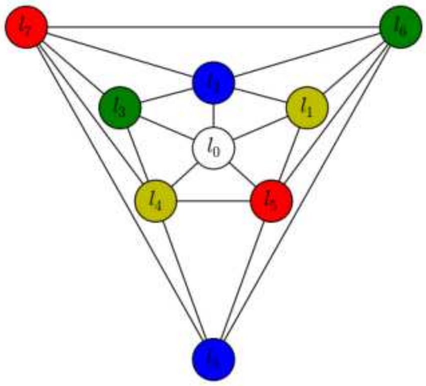


Abbildung 10: Links eine Landkarte, die den (III)-ten Fall des Beweises erfüllt. Rechts die Situation nach dem ersten KKS. Nun existiert eine (g,r)-Kette von l_3 nach l_5.

Der Fünfarbensatz

Den Fehler in Kempes Beweis des Vierfarbensatzes konnte Heawood nicht reparieren. Allerdings konnte er durch eine leichte Modifikation wenigstens die Aussage für 5 Farben zeigen.

Satz: FÜNFFARBENSATZ
Für alle Landkarten existiert eine zulässige Fünffärbung.

Beweis.

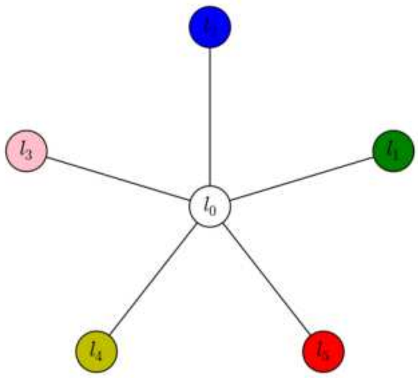


Abbildung 11

Wir benutzen alle Vorbereitungen für den Vierfarbensatz, die natürlich auch für 5 Farben gelten, und betrachten die Landkarte in Abbildung 11.

Es gibt nun 2 Fälle:

(I) Sind l_2 und l_5 in zwei verschiedenen (b,r)-Netzen. Färbe per Kempe-Ketten-Spiel das komplette (b,r)-Netz, das l_2 enthält, so um, dass $\chi'(l_2) = r$. Blau ist jetzt für l_0 frei.

(II) Gilt (I) nicht, so müssen l_1 und l_4 in zwei verschiedenen (g,y)-Netzen sein. Färbe das komplette (g,y)-Netz, das l_1 enthält, per KKS so um, dass $\chi'(l_1) = y$. Grün ist jetzt für l_0 frei.

Auf zum Beweis!

Nach der Enttarnung des Fehlers in Kempes Beweis, blieb der Vierfarbensatz immer im Fokus der Mathematikerwelt. Die Beweisversuche verfolgten entweder die Idee der Kempe-Ketten-Spiele weiter oder einen anderen von Heawood entwickelten Ansatz, der Methoden der elementaren Zahlentheorie verwendet.([FF94] S.29)

Im Jahre 1967 gelingt dann Appel, Haken und Koch mit Hilfe einer IBM 360 ein computergestützter Beweis, der wesentlich auf den Ideen Kempes beruht [FF94]. Dies wird 1989 auch explizit von Appel und Haken gewürdigt:
„Kempes argument was extremely clever, and although his „proof“ turned out not to be complete it contained most of the basic ideas that eventually led to the correct proof one century later.“

Die Grundidee des Beweises verfolgt den Ansatz des „Kleinsten Verbrechers“. Es wird gezeigt, dass es eine endliche Menge an sogenannten unvermeidbaren Konfigurationen gibt. Das ist eine Menge von Teilgraphen, von denen mindestens einer in einem kleinsten Verbrecher auftreten muss. In einem zweiten Schritt wird dann für jede einzelne Konfiguration gezeigt, dass sie, falls sie in einem kleinsten Verbrecher auftritt, auch in einem Gegenbeispiel zum Vierfarbensatz auftritt, das weniger Länder enthält als der vorgegebene kleinste Verbrecher. Damit wird für jede einzelne unvermeidbare Konfiguration ein Widerspruch produziert. Da diese Menge an unvermeidbaren Konfigurationen recht groß ist, (im ersten Computerbeweis waren es 1976. Dies konnte inzwischen reduziert werden, ist aber immer noch zu groß, um von Menschen in akzeptabler Zeit nachgeprüft zu werden.) wird der zweite Teil des Beweis vom Computer erledigt. Aus diesem Grund ist der Beweis auch umstritten, da kein Mathematiker alle einzelnen Schritte des Beweises nachvollziehen kann.

Literatur

[Aut13] Autorenkollektiv Wikipedia. Vier-farben-satz, 2013.

[FF94] R. Fritsch and G. Fritsch. *Der Vierfarbensatz.* BI-Wiss.-Verl. Mannheim; Leipzig; Wien; Zürich, 1994.

Irren ist menschlich

—

Gedanken zum ewigen Kampf zwischen Mensch und Maschine

Michael Wegner

Menschen sind die Krone der Schöpfung, Ebenbilder Gottes, die einzigen vernunftbegabten Wesen des Planeten – das glauben wir zumindest gerne. Ob Biologie, Psychologie oder Soziologie, ob Theologie oder Philosophie, jede Wissenschaft die sich mit dem Menschen beschäftigt, beschäftigt sich auch mit seiner Abgrenzung von allem anderen – mit seiner Einzigartigkeit. Auch die Informatik wurde inzwischen in diesen Club aufgenommen, hat sie doch den größten Widersacher des Menschen geschaffen: den Computer. Schon 1843 schrieb Ada Lovelace:

> The Analytical Engine has no pretensions whatever to originate anything. It can do whatever we know how to order it to perform. [Chr12]

Etwa 100 Jahre bevor die ersten frei programmierbaren Rechenmaschinen überhaupt gebaut wurden, wurde ihnen bereits die Kreativität aberkannt: *Computer können nur das, was wir ihnen beibringen (können)!*

Das hat die Maschinen natürlich nicht daran gehindert in so gut wie jeden Bereich unseres Lebens einzudringen. Sie nehmen uns die Arbeit ab (oder weg), tragen dabei zur allgemeinen Verdummung bei, lassen sich nie so bedienen, wie wir uns das vorstellen und funktionieren im entscheidenden Moment sowieso nicht. Das ist allerdings immer noch besser als das, was uns droht, wenn Maschinen tatsächlich einmal echte Intelligenz erreichen – zumindest wenn man der Fiktion glaubt. Barack Obama wollte uns vielleicht beruhigen als er meinte:

> As President, I believe that robotics can inspire young people to pursue science and engineering. And I also want to keep an eye on those robots, in case they try anything. [TWH09]

Hoffen wir nur, er benutzt keine *unbemannten Drohnen* um die Maschinen zu überwachen.

Noch sind wir glücklicherweise nicht so weit, uns ernsthafte Sorgen um unser Leben machen zu müssen. Was uns nicht daran hindert – in der Tradition von Lovelace – immer wieder neue Grenzen der Fähigkeiten von Computern zu definieren. Eine dieser Grenzen war jahrelang das Schachspiel. Bis am 11. Mai 1997 der amtierende Schachweltmeister Gary Kasparov die letzte Partie seines zweiten Matches gegen den Schachcomputer Deep Blue in nur 19 Zügen verlor und damit das Ende der menschlichen Vorherrschaft im Spiel der Könige besiegelte.

War over the board – Eine extrem kurze Geschichte des Schachspiels[1]

Dabei hat es die Geschichte so lange gut mit dem Spiel um Könige, ihre Damen und das restliche Fußvolk gehalten. Irgendwann zwischen dem dritten und sechsten Jahrhundert in Indien, Persien oder auch China erfunden, ranken sich schon um die Entstehung zahlreiche Mythen. Wahlweise erfand es etwa Pythagoras um abstrakte Zusammenhänge der

[1] Zusammengefasst aus David Shenks *The Immortal Game*[She07]. Die Aussage *Chess is war over the board* stammt von Bobby Fischer, dem amerikanischen Großmeister der 1972 (auf der Höhe des Kalten Krieges) für kurze Zeit die sowjetische Übermacht im Schachspiel beendete, indem er den damaligen Weltmeister Boris Spassky besiegte.

Mathematik zu veranschaulichen, der griechische Feldherr Palamedes um die Kunst der Kriegsführung zu illustrieren oder auch Moses im Paket mit Astronomie, Astrologie und dem Alphabet. Im Mittelalter eroberte das Spiel Europa in Windeseile. So galt es als eine der sieben essentiellen Fähigkeiten eines jeden Ritters.[2] Der Titel eines der erfolgreichsten Bücher der Zeit trug den Titel *Liber de moribus hominum et officiis nobilium ac popularium sive super ludo scacchorum* (Buch von den Sitten der Menschen und den Pflichten der Vornehmen und Niederen durch das Schachspiel) und benutzte Schach als Allegorie der Gesellschaft. Der Einfluss des Spiels auf alle Lebensbereiche sei es Politik, Kultur oder Religion war ungebrochen.

Im 20. Jahrhundert wurde Schach zunehmend interessant für die Wissenschaft. Der Mathematiker Ernst Zermelo benutze es 1913 als Beispiel in seinem Beweis, dass endliche Spiele mit perfekter Information und ohne Zufallseinfluss eine eindeutige Lösung besitzen, also alle möglichen Ausgänge einer Schachpartie zumindest theoretisch berechenbar sind. Da dies aufgrund der immensen Komplexität des Spieles an Unmöglichkeit grenzt, versuchten gleichzeitig Psychologen zu ergründen, was manche Menschen zu scheinbar übermächtigen Schachmeistern macht. Diese Überlegungen waren ein wichtiger Einfluss auf das junge Feld der kognitiven Psychologie. Die Forscher fanden unter anderem heraus, dass gute Schachspieler nicht unbedingt schneller als andere rechneten, sondern vielmehr, dass sie sehr viel besser darin waren Muster auf dem Schachbrett zu erkennen um ihre Entscheidungsfindung zu optimieren.[3] Heute gilt es als gesichert, dass Schachgenies nicht geboren sondern gemacht werden – nicht die Veranlagung sondern beharrliches und konsequentes Üben sind Voraussetzung für Erfolge. Die beste Bestätigung dafür lieferte der ungarische Psychologe László Polgár. Überzeugt von der Erlernbarkeit von Begabungen entschied er sich bereits vor der Geburt seiner Kinder sie früh und systematisch im Schach zu fördern, etwa durch Training mit internationalen Großmeistern. Die Strategie war ein voller Erfolg: alle drei Mädchen wurden erfolgreiche Schachspielerinnen, zwei errangen den Titel eines Großmeisters. Die jüngste Tochter erreichte dieses Ziel bereits im Alter von 15 Jahren, schneller als jeder andere Mensch vor ihr.

Ungeachtet wissenschaftlicher Erkenntnis blieb Schach aber auch ein Mysterium. Gutes Schachspiel wurde und wird weiterhin als zutiefst kreativer Prozess wahrgenommen und nicht nur als Rechenübung oder Musterrätsel. In den Worten von Marcel Duchamps, welcher sich auf der Höhe seiner Künstlerkarriere plötzlich fast exklusiv dem Schachspiel zuwandte:

> I have come to the personal conclusion, that while all artists are not chess players, all chess players are artists.[Chr12]

Noch genereller fasste es Douglas Hofstadter in *Gödel, Escher, Bach – ein Endloses Geflochtenes Band*:

[2]Neben Reiten, Schwimmen, Bogenschießen, Boxen, Falknerei und Versdichtung

[3]Eines der wichtigsten Theoreme der kognitiven Psychologie, das *Chunking*, wurde anhand von Experimenten mit Schachspielern formuliert. *Chunking* beschreibt nichts anderes als die Eigenschaft von Menschen sich Bündel von Informationen besser merken zu können (etwa bei einer Telefonnummer: 513-555-9144 anstatt 5135559144). Getestet wurde dies unter anderem, indem man Schachspielern die Aufgabe auftrug sich Spielpositionen einzuprägen. Erfahrene Spieler waren, wie zu erwarten, sehr viel erfolgreicher, da sie Muster sehr viel besser erkennen konnten.

> ... profoundly insightful chess-playing draws intrinsically on central facets of the human condition.[Hof99]

Gutes Schachspiel hängt von zentralen Facetten des menschlichen Daseins ab. Noch höhere Bedeutung kann man einem Spiel kaum geben und so wird sich wohl die alte Weisheit bewahrheiten: *Wer hoch steigt, wird tief fallen.*

Er will doch nur spielen – Computer und Schach

Auch Kasparov sparte in seinen Äußerungen vor dem ersten Duell mit Deep Blue nicht mit Pathos. Für ihn ging es um nichts Geringeres als die Verteidigung der kreativen Menschheit gegen seelenlose Maschinen:

> To some extent, this match is a defense of the whole human race. Computers play such a huge role in society. They are everywhere. But there is a frontier that they must not cross. They must not cross into the area of human creativity.[Chr12]

Stellt sich die Frage, vor was wir gerettet werden müssen? Was macht so ein Schachcomputer eigentlich? Und wie gefährlich ist das?

Dass die Lösungen einer Partie Schach ermittelbar und damit für eine Maschine zumindest theoretisch berechenbar sind, wurde bereits gesagt. Praktisch sind Computer davon noch weit entfernt. Die möglichen Kombinationen sind einfach zu komplex. Nach dem ersten Zug von beiden Spielern gibt es 400 verschiedene Positionen des Schachbretts. Nach zwei Zügen sind es schon 71852, nach drei Zügen circa neun Millionen und nach vier Zügen über 315 Milliarden. Die Gesamtzahl aller möglichen Schachpartien wird auf 10^{123} geschätzt.[4] Könnte ein Computer eine Milliarde Positionen pro Sekunde auswerten[5] bräuchte er immer noch circa 10^{100} Jahre dazu. Eine etwas lange Wartezeit wenn man bedenkt, dass das Universum erst 10^{10} Jahre alt ist.

Glücklicherweise haben Studien gezeigt, dass selbst gute Schachspieler nur etwa 40 bis 50 Positionen betrachten, bevor sie sich für einen Zug entscheiden [Wik13b]. Je erfahrener ein Schachspieler ist umso besser erkennt er ungeeignete Züge. Ein Computer arbeitet nicht unähnlich. Deep Blue etwa berechnete im Durchschnitt den Baum der möglichen Spielzüge bis zu sechs Stufen tief und war programmiert nur in Ausnahmefällen bis zu 20 Stufen zu untersuchen. Jede Stufe wurde mit verschiedensten Heuristiken gefiltert, etwa der Stärke der Position des Königs, ob andere wertvolle Figuren bedroht sind oder ob Angriffe auf den Gegner möglich sind. Um diese Situationen bewerten zu können hatte Deep Blue zuvor tausende Spiele von Großmeistern analysiert. Wenig aussichtsreiche Varianten wurden so schnell aufgegeben, während andere detaillierter untersucht werden konnten. Am Ende wird einfach der Zug dessen Analyse die beste Punktzahl erhalten hat ausgewählt.

[4] Das sind eintausend Billionen Billionen Billionen Billionen Billionen Billionen Billionen Billionen Billionen Billionen

[5] Deep Blue schaffte gereade einmal 300.000

Die gerade beschriebene Funktionsweise kommt allerdings nur in einer der drei Spielphasen des Schachspiels zum tragen. Schon lange vor den ersten Computern wusste der österreichische Schachmeister Rudolf Spielman:

> Play the opening like a book, the middle game like a magician, and the endgame like a machine. [She07]

Die Zauberei beim Mittelspiel wurde gerade erläutert. Das Endspiel mit nur wenigen auf dem Spielfeld verbleibenden Figuren ist in der Tat wie gemacht für einen Computer – alle möglichen Positionen können berechnet und die optimale ausgesucht werden.[6]

Bleibt die Eröffnung, die ersten Züge, welche genutzt werden um das spätere, "richtigeSSpiel vorzubereiten. Um dorthin zu gelangen werden zu Anfang einfach bewährte Züge gespielt, die ausführlich theoretisch aufgearbeitet wurden. Jeder ernsthafte Schachspieler studiert die bekannten Eröffnungen und prägt sich bevorzugte Taktiken sowie Antworten auf die möglichen Spielzüge des Gegners ein. Und natürlich besitzt auch ein guter Schachcomputer eine Datenbank mit Eröffnungen, damit er schnell auf die ersten Züge der anderen Seite reagieren kann.

Irren ist menschlich...

Genau die Eröffnungsdatenbank von Deep Blue wurde Kasparov zum Verhängnis in jener bereits erwähnten, schicksalhaften Partie, die nach nur 19 Zügen beendet war. Kasparov machte einen Flüchtigkeitsfehler in seiner eigenen Eröffnung, indem er die Züge sieben und acht verwechselte und sich damit angreifbar machte. Das wäre vielleicht alles halb so schlimm gewesen, hätte Deep Blue nicht die Antwort auf diesen spezifischen Fehler in seiner Datenbank gehabt und korrekt, wie es die Theorie will, darauf geantwortet. Von alleine hätte der Computer das an dieser Stelle nötige Opfern seines Springers wahrscheinlich gar nicht in Betracht gezogen. Doch die Erfahrungen und Analysen anderer Spieler nahmen ihm diese Entscheidung ab. Kommentator Yasser Seirawan bemerkte schon während des Spieles, dass dieser Sieg nicht viel wert sein würde, wenn Deep Blue nur seiner Datenbank folgen würde:

> ... if Garry Kasparov were to lose today‘s game, it‘s entirely conceivable this whole sacrifice and so on is just in Deep Blue‘s library, opening library, and it‘s done nothing – it may turn out it won‘t even have to play an original move if Garry chooses one of the variations that it has been programmed as a win for itself. [Chr12][7]

[6] So haben Computerprogramme schon Endspiele berechnet, welche bei sieben verbleibenden Figuren zu einem Schach Matt in 517 Zügen führen. Eine durchschnittliche Partie dauert 30 - 50 Züge. [Wik13c]

[7] In der Tat schaffte es Kasparov im 11. Zug Deep Blue aus seiner Datenbank zu zwingen. Doch der Schaden war an dieser Stelle schon angerichtet und auch die unkonventionelle Rettungsstrategie machte nach Expertenmeinung die Lage nur noch schlimmer.

...und das ist auch gut so

Es interessiert aber gar nicht, dass Deep Blue gar nicht wirklich selbst gespielt hat und der Sieg dementsprechend möglicherweise unverdient ist. Ein Schachgroßmeister hätte auch nicht anders gehandelt, sondern so gespielt wie er es in vorherigen Analysen der Situtation gelesen hat. Man kann es der Maschine wohl kaum vorwerfen, wenn sie die gleichen Taktiken wie wir anwendet. Viel spannender ist der Flüchtigkeitsfehler Kasparovs. Der offenbart nämlich tatsächlich etwas von der menschlichen Natur.

Nehmen wir zum Vergleich einen Fehler den Deep Blue in der ersten Partie des gleichen Wettbewerbs machte:

> The bug had arisen on the forty-fourth move of their first game against Kasparov; unable to select a move, the program had defaulted to a last-resort fail-safe in which it picked a play completely at random. The bug had been inconsequential, coming late in the game in a position that had already been lost; Campbell and team repaired it the next day. "We had seen it once before, in a test game played earlier in 1997, and thought that it was fixed," he told me. "Unfortunately there was one case that we had missed." [Sil12]

Ein Programmierfehler hatte dazu geführt, dass Deep Blue einen weiteren, zufälligen Zug spielte anstatt sich geschlagen zu geben. Ein Bug den man übersehen hatte. Der Computer hatte keine falsche Entscheidung getroffen, sondern war nur seiner Programmierung gefolgt. Wie soll eine Maschine auch einen Fehler machen? Das zugrundeliegende Konzept von richtig und falsch haben sich Menschen ausgedacht. Das zeigt auch Kasparovs Reaktion auf den Bug:

> In fact, the bug was anything but unfortunate for Deep Blue: it was likely what allowed the computer to beat Kasparov. In the popular recounting of Kasparov's match against Deep Blue, it was the second game in which his problems originated — when he had made the almost unprecedented error of forfeiting a position that he could probably have drawn. But what had inspired Kasparov to commit this mistake? His anxiety over Deep Blue's forty-fourth move in the first game - the move in which the computer had moved its rook for no apparent purpose. Kasparov had concluded that the counterintuitive play must be a sign of superior intelligence. He had never considered that it was simply a bug. [Sil12]

Kasparov kam es nicht einmal in den Sinn der Computer würde einen Fehler machen. Die vermutete Genialität verunsicherte ihn so sehr, dass er es in den folgenden Partien zu keinem weiteren Sieg schaffte und schließlich in der letzten, wie bereits beschrieben, unterging. Wie sehr ihn das Ende der ersten Partie wirklich mitgenommen hat und welche anderen Umstände vielleicht noch eine Rolle spielten, kann man sicher diskutieren. Aber egal warum, die Fehler die Kasparov machte demonstrierten wundervoll die Einzigartigkeit der menschlichen Natur. Nur wir können uns ein Spiel komplexer als das Universum ausdenken, einer Maschine beibringen dieses Spiel zu spielen und dann im entscheidenden Moment einen Bauern anstatt den Läufer zu spielen.

> Wenn Irren menschlich ist, dann ist Nicht-Irren unmenschlich. [Ost06]

Schlusswort – Eine Zukunft in Frieden

Es ist also nicht nötig wie Douglas Hofstadter zu reagieren:

> My God, I used to think chess required thought. Now, I realize it doesn't. [Chr12]

Die Grenze der Intelligenz einfach weiterschieben ist keine gute Idee, über kurz oder lang wird der Computer sie doch wieder erreichen. Nach Schach zum Beispiel wurde das noch komplexere Brettspiel Go[8] zur neuen rein menschlichen Domäne ernannt. Inzwischen machen Supercomputer auch professionellen Go-Spielern das Leben schwer. Auch wenn es viele nicht wahr haben wollen, der Rubikon wurde schon lange überquert. *Alea iacta est.*

Wir Menschen brauchen nicht in Depressionen verfallen weil wir in einem willkürlich gewählten Kriterium nicht mehr mithalten können. Schachspiel unter Menschen verliert nichts an seiner Faszination. Schachspiel gegen Computer hat eine neue Faszination erhalten – viele Spieler haben die inzwischen unzähligen Duelle zwischen Mensch und Maschine untersucht und versucht die besten Strategien gegen die Rechenmaschinen zu formulieren. Nicht nur um zu gewinnen, sondern vor allem um sich selbst zu verbessern. Schließlich wurde schon lange vor dem Computerzeitalter festgestellt:

> Wer immer strebend sich bemüht,
> den können wir erlösen.

Literatur

[Chr12] Brian Christian, *The Most Human Human: What Talking with Computers Teaches Us About What It Means to Be Alive*, Anchor Books, New York, NY, 2012.

[TWH09] The White House, Remarks by the President on the „Education To Innovate“ Campaign, The White House, `http://www.whitehouse.gov/the-press-office/remarks-president-education-innovate-campaign`, 2009.

[Wik13a] Wikipedia, Geschichte des Schachspiels - Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, `http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Geschichte_des_Schachspiels&oldid=115291324`, 2013.

[She07] David Shenk, *The immortal game: a history of chess*, Anchor Books, New York, NY, 2007.

[Hof99] Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Basic Books, 1999.

[Wik13b] Wikipedia, Computer chess - Wikipedia, The Free Encyclopedia, `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Computer_chess&oldid=549490001`, 2013.

[8] Komplexität 10^{360} statt 10^{123}

[Wik13c] Wikipedia, Chess endgame - Wikipedia, The Free Encyclopedia, `http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Chess_endgame&oldid=548594034`, 2013.

[Sil12] Nate Silver, *The Signal and the Noise: Why So Many Predictions Fail-but Some Don't*, Penguin Group US, 2012.

[Ost06] Manfred Osten, *Die Kunst, Fehler zu machen: Plädoyer für eine fehlerfreundliche Irrtumsgesellschaft*, Bibliothek der Lebenskunst, Suhrkamp Verlag GmbH, 2006.

Wissenschaftliches Denken im Alltag

—

Das passt

Matthis Leicht

Stimmt eigentlich die Legende vom Elfenbeinturm? In diesem Turm sollen alle Wissenschaftler von jeglichen störenden Einflüssen isoliert sitzen und nur selten mal einen Blick auf den von ihnen abfällig als trivial bezeichneten Alltag verschwenden.

Natürlich sieht es in der Realität anders aus. In Zeiten von Drittmittelbeschaffung wird von einem Wissenschaftler mehr verlangt als Forschungserfolge. Aber trotz dieses Aspekts kann nicht von einer Vergleichbarkeit der Bedingungen am Arbeitsplatz und dem „Rest", den er täglich erlebt, gesprochen werden. Mit dem Rest meine ich Angelegenheiten, die im persönlichen, sozialen (im Kleinen und im Großen), politischen Bereich etc. liegen. Als frischer Student der Mathematik fällt mir dieser Unterschied besonders stark auf, denn wenn man das Bild vom Elfenbeinturm heranzieht, würden Mathematiker sicher ganz oben im Dachgebälk hausen. Während ich in meinem Studium klare Verhältnisse vorfinde, die ein strukturiertes Vorgehen ermöglichen, ist es ungleich komplizierter, wenn ich den Hörsaal verlasse. Alltägliche Fragen und Probleme sind zum Teil so komplex, dass n-dimensionale Vektorräume und die Konvergenz von Reihen daneben lächerlich einfach wirken. Dabei ist vorprogrammiert, dass ich kleine und große Fehler begehe und dem Irrtum unterliege. Diese Erfahrungen empfinde ich teilweise als ziemlich unangenehm und würde ich gerne vermeiden. Das Problem dabei ist, dass man zwar die Zugbrücke vor dem Elfenbeinturm hochziehen kann -wie Hans Magnus Enzensberger es ausgedrückt hat-, um den Alltag draußen zu halten, was aber nichts daran ändert, dass man auch ab und zu raus muss, denn im Elfenbeinturm schläft man schlecht. Das bedeutet, dass man sich den Problemen des Alltags stellen muss, egal ob man ein Semester studiert hat, oder zehn. Also, warum sollte man nicht den gleichen Eifer und die gleiche Präzision an den Tag legen und den Alltag kurzerhand zur Wissenschaft erklären, um unangenehmen Fehlern erst gar keinen Raum zu bieten? Den ganzen unentwirrbaren Knoten auflösen, der sich Alltag nennt um dann eine universelle Anleitung zu verfassen, nach der sich jeder Mensch richten kann. Ist doch eine gute Idee oder? Nein? Stimmt, denn so einfach ist es nicht.

In den Wissenschaften wird man in erster Linie mit klaren Fakten konfrontiert. Das Ziel ist es, möglichst genaue Beschreibungen eines Sachverhalts zu erstellen, damit auf Fragen eine konkrete Antwort gegeben werden kann, denn wissenschaftliches Denken ist ergebnisorientiert. Im Alltag dagegen hat man es zusätzlich noch mit subjektiven Wahrnehmungen zu tun. Diese Einflüsse machen es komplizierter, sich ein realistisches Bild der Situation zu verschaffen, denn diese sind häufig ungenau und widersprechen sich. Dazu kommt, dass die Wissenschaften streng gegliedert und formal sind. Sie sind in Fachbereiche und Fachrichtungen unterteilt, die jede ein relativ festes Teilgebiet behandeln und jede dieser Bereiche legt seinen eigenen Standard für wissenschaftliches Arbeiten fest. Zum Beispiel ist es einem Mathematiker klar, welche Beweisschemata zulässig sind und welche nicht, oder einem Physiker, wie ein Versuch korrekt aufgebaut wird. Im Alltag gibt es so etwas nicht. Es existieren zwar Begriffe für Bereiche, aber die sind meist eher schwammig formuliert. Dadurch ändern sich auch Abgrenzungen je nach Perspektive und sind deshalb willkürlich und individuell. Beispielsweise wurden Wirtschaft und Politik von vielen vor ein paar Jahren noch strikt getrennt, mittlerweile dreht sich da aber die Anschauung. Soziale Verantwortung spielt stärker eine Rolle. Und wie jeder seine Grenzen selber festlegt, so hat auch jeder seine eigenen Mittel und Wege um mit Problemen umzugehen, denn es existiert keine Richtlinie dafür. Zu guter Letzt existieren im Alltag keine festen Definitionen. In der Wissenschaft ist klar, wenn ich von einem Würfel im 3-dimensionalen Raum rede, was gemeint ist. Befrage ich aber zehn Leute auf der Straße zu einem Thema, bekomme ich mindestens elf verschiedene Antworten. Bei solchen Bedingungen über ein und die selbe Sache zu reden, das ist manchmal schon schwierig.

Wenn wir also von Wissenschaft und Alltag reden, reden wir von zwei Bereichen die sich bemerkbar unterscheiden. Dazu kommt noch eine weitere Komponente, nämlich das Unterbewusstsein. Verschiedene Psychologen räumen dem Unterbewussten einen hohen Stellenwert in der menschlichen Entscheidungsfindung ein. Sigmund Freud bezeichnet es sogar als dominant. Wenn ihr das Unterbewusstsein mal in Aktion sehen wollt, dann macht folgenden Selbsttest.

Gleich bekommt ihr eine Frage gestellt, die mit Ja oder Nein beantwortet werden kann. Legt euch innerhalb von fünf Sekunden auf eine Antwort fest.

Frage: Stimmt ihr der Aussage „Wissenschaftliches Denken im Alltag - Das passt" zu?

Folgendes habt ihr nun getan: Anstatt durch logisches Denken auf eine Antwort zu kommen, habt ihr aus dem Bauch heraus entschieden. War das wissenschaftlich? Diese Denkweise wird als „Intuition" bezeichnet und ist ein Aspekt des irrationalen Denkens.

Wikipedia liefert zum Stichwort Intuition folgende Definition: „Die schnelle eingebungsmäßige Einsicht in Zusammenhänge und ihre Erkenntnis ohne bewusste rationale Ableitung oder Schlüsse, sowie auch das Entstehen neuer Erfindungen und Ideen."

In dieser Definition stecken mehrere Aspekte. Einerseits kann Intuition zu einem richtigen Ergebnis führen (ihr seid hoffentlich mit eurer Antwort zufrieden, oder zumindest nicht unzufrieden), hoher Geschwindigkeit, Irrationalität der Intuition und auch so etwas wie Kreativität. Tatsächlich zeigen aktuelle Forschungen, dass Entscheidungen, die intuitiv getroffen worden sind, erstaunlich oft zu brauchbaren Ergebnissen führen, manchmal zu besseren als es durch eine genaue Analyse möglich wäre. Ist das nachvollziehbar? Beobachtbar zumindest. Da gibt es auf der einen Seite die Menschen, die über jedes Problem nachgrübeln, Folgen abschätzen und sich einen Plan zurechtlegen. Viel zu oft kommt dann etwas dazwischen und die ganze Grübelei war umsonst. Zu diesen Menschen zähle ich mich. Aber dann gibt es noch die Menschen, die mehr durchs Leben tanzen als sich durch den Alltag zu beißen. Entscheidungen werden aus dem Bauch heraus getroffen, maximal eine Nacht darüber geschlafen und das Frustrierende für mich: Diese Menschen kommen genauso ans Ziel, meist noch mit weniger Stress. Klar, sie zerbrechen sich darüber nicht den Kopf.

Aber auch wenn die Intuition einige Vorteile mit sich bringt, so hat sie doch auch Nachteile. Diese Nachteile finden sich im Selbstversuch vorhin. Ruft euch nochmal eure Antwort in den Kopf und überprüft sie. Ist eure Antwort logisch begründbar? Oder könnt ihr vielleicht auf wissenschaftliche Fachliteratur verweisen, die eure Aussage stützt? Der kritische Punkt bei der Intuition ist, dass man nur das Ergebnis geliefert bekommt. Wie dieses Ergebnis zustande kommt und ob es überhaupt zutreffend ist, ist unbekannt, während ein widerspruchsfreies, logisches Gebilde in sich schlüssig ist. Des Weiteren ist eine intuitive Antwort in den meisten Fällen eher ungenau und vage.

Das widerspricht sich doch eigentlich mit der wissenschaftlichen Auffassung, dass nicht nur das Was sondern auch das Wie und Warum interessieren, und ohne Exaktheit würde doch das komplette Gebilde einer Wissenschaftlichkeit im Alltag in sich zusammenstürzen? Auf der einen Seite finden wir im Alltag komplett andere Bedingungen vor als in den Wissenschaften. Auf der anderen Seite denken wir im Alltag eher irrational als rational.

Aber wie rational sind eigentlich die Wissenschaften?

Da ist mir der Grundlagenstreit der Mathematik in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts eingefallen. Aufgrund der vorangegangenen Krise wurde fieberhaft nach neuen Dogmen gesucht und es bildeten sich zwei Lager heraus, die sich im Streit befanden. Das eine bestand aus den Formalisten um Hilpert und das andere aus den Vertretern des mathematischen Intuitionismus um Brouwer. Die Formalisten entsprechen am ehesten dem, was heute als knallharter Axiomatiker bezeichnet werden kann. Verwirrend sind im ersten Moment aber die Intuitionisten. Was hat die Intuition in der Mathematik zu suchen? Betreiben diese die Mathematik nach Gefühl? Eigentlich nicht. Sie unterscheiden sich hauptsächlich in ihrem Grundsatz, der vereinfacht lautet: Ein mathematisches Objekt entsteht im Geist eines Mathematikers. Er benutzt die Sprache der Mathematik um sich mit anderen darüber auszutauschen. Was bedeutet das? Der Intuitionist stellt den Inhalt über die Form, während ein Formalist größeren Wert auf den formalen Aspekt legt. Etwas gilt erst dann, wenn es sich mit der mathematischen Ausdrucksweise beweisen lässt.

Aus einer anderen Richtung kommt die Einschätzung Albert Einsteins. „Der intuitive Geist ist ein heiliges Geschenk und der rationale Geist ein treuer Diener. Wir haben eine Gesellschaft erschaffen, die den Diener ehrt und das Geschenk vergessen hat." Er weist damit der Intuition eine höhere Rolle zu als dem rationalen Denken. Und das gibt zu denken. Ein namhafter Wissenschaftler und eine ganze Strömung der Mathematik setzen sich dafür ein, dass die Intuition auch in der Wissenschaft eine Rolle spielt.

Warum? Dafür muss die Intuition noch etwas genauer betrachtet werden. Fasst man das Intuitive als einen Abgleich mit einem bestehenden Erfahrungsschatz auf, ergibt sich eine neue Perspektive. Wenn ein Gedanke intuitiv gefasst wird und es entsteht ein Widerspruch, dann muss der Gedanke rational nachvollzogen werden. Dabei stößt man auf den Fehler und seinen Ursprung. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse, der Fehler, dessen Ursprung und das nun richtige Ergebnis fließen wieder ein in den Erfahrungsschatz und beeinflussen also zukünftige intuitive Prozesse. Das bedeutet so viel wie, Intuition kann gelernt und verbessert werden. Für eine Verwendung spricht auch die Leistungsfähigkeit der Intuition. Man kann sich schneller in neue Bereiche und Probleme eingearbeiten. Nicht alles muss komplett nachvollzogen werden, es genügt die relevante Aussage „herauszufiltern" und zu verwenden. Auch kann mit Intuition ein größeres Spektrum an Informationen miteinfließen, als es möglich wäre, wenn man sich auf rein rationales Denken stützen würde. Es entsteht auch eine Art von Kreativität. Abstrakte Modelle, die vielen Menschen Schwierigkeiten machen, können mit Hilfe der Intuition vorstellbar werden und neue können durch die Erfahrung mit dem Umgang bekannter erstellt werden. Es zeigt sich also, dass die Intuition für die Wissenschaften ein mächtiges Werkzeug darstellen kann. Sie kann als leistungsfähige Methode zum Verstehen, als Wegweiser, der das Vorgehen festlegt, oder als interdisziplinäre Brücke dienen. Neben den rational begründeten wissenschaftlichen Abhandlungen und Beweisen, die das Gesicht der Wissenschaften nach außen darstellen, besteht aber auch ein Teil des wissenschaftlichen Arbeitens aus irrationalen Denkweisen, der sich eher wenig beachtet im

Hintergrund herumdrückt. Das liegt daran, dass rational vor irrational gilt. Ein Gefühl oder eine Vermutung wird eben seltener geäußert als ein neues Ergebnis.

Aber wie könnte sich jeder dieses Wissen im Alltag zu nutzen machen?

Folgendes könnte als Leitfaden dienen. In den täglichen Entscheidungen sollte man sich auf die Intuition verlassen, denn sie ist leistungsfähig. Mit intuitivem Denken kann eine größere Informationsmenge mit einbezogen werden und das wäre gerade dann vom besonderen Nutzen, wenn uns aufgrund komplexer und verwirrender Fragen eine rationale Herangehensweise überfordern würde. Der zeitliche Druck stellt häufig ein großes Problem dar. Auch dort könnte Intuition helfen, denn sie ist spontan und vermeidet damit auch Stress. Was aber passiert, wenn man mit der Intuition scheitert? Wenn das Gefühl einmal trügt und ein Widerspruch auftritt, hilft doch nur die genaue Analyse des Problems. Jeder einzelne Aspekt muss hinterfragt werden, bis der Fehler erkannt wird. Aber da liegt auch der Hund begraben. Die meisten Menschen haben manchmal -wenige Menschen oft- Schwierigkeiten damit, eine realitätsnahe Analyse des Problems durchzuführen. Vor allem die Selbstreflexion –die Kunst sich seiner eigenen Position bewusst zu werden- ist Teil davon. Dort spielen oft noch andere irrationale Einflüsse mit hinein, die durchaus störend wirken können. Es kann also nicht uneingeschränkt davon gesprochen werden, dass wissenschaftliches Denken im Alltag möglich wäre. Ich denke aber schon, dass es zum Teil möglich und praktikabel ist. Das bedeutet nicht, dass der Alltag wie die Wissenschaften behandelt werden sollte, denn es sind zu Recht zwei verschiedene Bereiche. In den Wissenschaften interessieren zwar das „Warum“ und das „Wie“, aber im Alltag interessiert, was passiert und wie Probleme gelöst werden können. Alles haargenau zu analysieren, würde auf Grund der Komplexität des Alltags mehr Zeit verschlingen als man hat. Deswegen muss man sich auf ungenaue Grundsätze, schwammig formulierte Gedanken und Ideen verlassen. Im Einzelfall muss immer improvisiert werden und das ist die Rolle der Intuition.

Dass dabei Fehler begangen werden, ist kaum zu vermeiden. Darüber sollte man sich klar sein. Laut Hegel gilt „dass diese Furcht zu irren schon der Irrtum selbst ist“, denn Angst davor sollte man nicht haben. Hat man Angst einen Fehler zu begehen, dann wird man einen intuitiven Gedanken kaum annehmen und damit vielleicht die richtige Antwort verwerfen. Und auch die Wissenschaften sind nicht frei von Fehlern. Betrachtet man die Geschichte, stößt man weitaus häufiger auf widerlegte Theorien, als eine von Anfang an gültige Wahrheit. Auch Galileo Galilei, einer der bekanntesten Wissenschaftler, wurde noch zu Lebzeiten mit Johannes Kepler konfrontiert, der seine Kreisbahnen durch Ellipsen ersetzte. Was die Wissenschaften ausmacht, ist eine stetige Entwicklung. Und diese Entwicklung sollte Vorbild für den Alltag sein. Die Intuition ist lernfähig. Fehler machen daher nichts aus. Im ersten Moment unangenehm, fließen sie doch in zukünftige Entscheidungen ein und helfen damit uns zu Entwickeln.

Um mit einem der Leitsätze dieses Seminars zu enden: „Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better. “ (Samuel Beckett)

Gibt es grosse Wahrheiten in der Mathematik?

—

Retha Heymann

Das Dilemma

Mein Thema ist inspiriert von Niels Bohrs Ansicht, dass es grosse und kleine Wahrheiten gäbe. Beschrieben hat er es als...

> ...two sort of truth: profound truths recognized by the fact that the opposite is also a profound truth, in contrast to trivialities where opposites are obviously absurd.
>
> – Berichtet von Hans Bohr in *Niels Bohr: His Life and Work as Seen by His Friends and Colleagues* (1967), p. 328 [Roz67]

Normalerweise wird diese Aussage im Kontext des Prinzips der Komplementarität in der Quantenmechanik verstanden. In folgendem Zitat wird das auch von Niels Bohr erklärt.

> [H]owever far the [quantum physical] phenomena transcend the scope of classical physical explanation, the account of all evidence must be expressed in classical terms. The argument is simply that by the word "experiment" we refer to a situation where we can tell others what we have done and what we have learned and that, therefore, the account of the experimental arrangements and of the results of the observations must be expressed in unambiguous language with suitable application of the terminology of classical physics.
>
> This crucial point...implies the impossibility of any sharp separation between the behaviour of atomic objects [i.e., objects governed by quantum mechanics] and the interaction with the measuring instruments which serve to define the conditions under which the phenomena appear... Consequently, evidence obtained under different experimental conditions cannot be comprehended within a single picture, but must be regarded as complementary in the sense that only the totality of the phenomenena exhausts the possible information about the objects.
>
> – Niels Bohr, *Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, in [Sch01]

Ein Beispiel ist die Tatsache, dass Elektronen sowohl Wellen-, als auch Teilcheneigenschaften haben, was aus der Perspektive der klassischen Mechanik ein Widerspruch wäre. Jedoch hat Bohr seine Definition von grossen und trivialen Wahrheiten auch in anderen Bereichen des Lebens gelten lassen, wie von verschiedenen seiner damaligen Kollegen und Freunden in [Roz67] berichtet wird. Dirac, zum Beispiel, schrieb:

> Bohr considered that the highest wisdom necessarily involves words whose meaning cannot be defined unambiguously. Thus the truth of a statement of the highest wisdom is not absolute, but is only relative to a suitable meaning for the ambiguous words in it, with the consequence that the converse statement also has validity and is also wisdom.
>
> – Paul A.M. Dirac in [Roz67]

Jetzt erläutere ich meine persönliche Motivation, die Frage nach der Existenz grosser Wahrheiten in der Mathematik zu stellen.

Als ich vor einigen Jahren zum ersten Mal irgendwo die Äusserung “Die Wahrheit ist immer ein Widerspruch” gehört habe, hat es Eindruck auf mich gemacht. Für mich kam ein übermass an Sicherheit, vor allem über schwierige Dinge, schon immer falsch vor. Ich mag die Verwunderung über das, was man nicht verstehen kann. Ich mag die Tatsache, dass man immer mehr versteht, wie wenig man versteht, je mehr man lernt. Ich mag diese Sicherheit über die ewige Unsicherheit.

Ich denke, die Definition von grossen Wahrheiten ergibt Sinn, wenn man begreift, dass viele Bereiche der Welt und des Lebens viel zu komplex sind, um genau analysiert zu werden. Im Duden wird *komplex* definiert als “zusammengesetzt; nicht allein für sich auftretend, ineinandergreifend, nicht auflösbar” (siehe `http://www.duden.de/rechtschreibung/komplex`), d.h., wenn etwas komplex ist, reicht es nicht, die verschiedenen Teile einzeln zu betrachten, um das Ganze zu verstehen. So kann es sein, dass die Eigenschaften der verschiedenen einzelnen Teile im Widerspruch stehen.

In starkem Kontrast zu diesen Überlegungen ist die Welt der Mathematik. In der Mathematik ist alles exakt. Jede Definition ist eindeutig, jeder gültige Beweis ist richtig und jeder Satz stimmt, sofern wir darauf vertrauen, dass keine logischen Fehler von Menschen gemacht und übersehen worden sind. Das gleiche gilt für Formeln, Statistiken und Rechnungen. Die dazugehörige Tragik wird klarer in den folgenden beiden Zitaten aus Homo Faber von Max Frisch:

> Ich habe mich schon oft gefragt, was die Leute eigentlich meinen, wenn sie von Erlebnis reden. Ich bin Techniker und gewohnt, die Dinge zu sehen, wie sie sind. Ich sehe alles, wovon sie reden, sehr genau; ich bin ja nicht blind. Ich sehe den Mond über der Wüste von Tamaulipas – klarer als je, mag sein, aber eine errechenbare Masse, die um unseren Planeten kreist, eine Sache der Gravitation, interessant, aber wieso ein Erlebnis? Ich sehe die gezackten Felsen, schwarz vor dem Schein des Mondes; sie sehen aus, mag sein, wie die gezackten Rücken von urweltlichen Tieren, aber ich weiss: Es sind Felsen, Gestein, wahrscheinlich vulkanisch, das müsste man nachsehen und feststellen. Wozu soll ich mich fürchten? Es gibt keine urweltlichen Tiere mehr. Wozu sollte ich sie mir einbilden? Ich sehe auch keine versteinerten Engel, es tut mir leid; auch keine Dämonen, ich sehe, was ich sehe: die üblichen Formen der Erosion, dazu meinen langen Schatten auf dem Sand, aber keine Gespenster. Wozu weibisch werden? [Fri97]

> Ich glaube nicht an Fügung und Schicksal, als Techniker bin ich gewohnt mit den Formeln der Wahrscheinlichkeit zu rechnen. Wieso Fügung? Ich gebe zu: Ohne die Notlandung in Tamaulipas (26. III.) wäre alles anders gekommen; ich hätte diesen jungen Hencke nicht kennen gelernt, ich hätte vielleicht nie wieder von Hanna gehört, ich wüsste heute noch nicht, dass ich Vater bin. Es ist nicht auszudenken, wie anders alles gekommen wäre ohne diese Notlandung in Tamaulipas. Vielleicht würde Sabeth noch leben. Ich bestreite nicht: Es war mehr als ein Zufall, dass alles so gekommen ist, es war eine ganze Kette von Zufällen. Aber wieso Fügung? Ich brauche, um das Unwahrscheinliche als Erfahrungstatsache gelten zu lassen, keinerlei Mystik; Mathematik genügt mir. [Fri97]

Das zeigt die Möglichkeit, aufgrund von Mathematik, Statistiken und Berechnungen alle Verwunderung im Leben total zu löschen. Man kann dieses Argument allerdings auch umkehren, wie Richard Feynman einmal in einem Vortrag sagte:

> You know, the most amazing thing happened to me tonight. I was coming here, on the way to the lecture, and I came in through the parking lot. And you won't believe what happened. I saw a car with the license plate ARW 357. Can you imagine? Of all the millions of license plates in the state, what was the chance that I would see that particular one tonight? Amazing!
>
> – Seite xi-xii, [FLS11]

Ausserdem gab es eine Zeit, in der Mathematiker sich der Macht der Mathematik, alle Fragen zu beantworten, so sicher waren, dass sie davon motiviert und begeistert wurden, Mathematik zu betreiben. In diesem Sinne sagte David Hilbert:

> Diese Überzeugung von der Löslichkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!
>
> – David Hilbert, Rede von Hilbert, Königsberg, 1930 [Ker00b]

Am 8. August 1900 hat Hilbert beim Internationalen Mathematiker-Kongress in Paris 23 zu diesem Zeitpunkt ungelöste Probleme vorgestellt, die einen Ausblick auf die Mathematik der kommenden Jahrhundert bieten sollten [Ker00a]. Sein zweites Problem war die Fragestellung: Sind die arithmetischen Axiome widerspruchsfrei?

Bei zu grosser Sicherheit darf man vermuten, dass etwas nicht in Ordnung ist. Auch diese Aussage von Hilbert über die Lösbarkeit jedes mathematischen Problems ist nicht korrekt, wie in weiteren Absätzen noch besprochen wird.

Hier ist jetzt mein Dilemma: Wenn Verwunderung und grosse Wahrheiten etwas mit Unsicherheit und augenscheinlichen Widersprüchen zu tun haben, worin liegt dann die Faszination der Mathematik? Ich denke, das folgende Zitat erfasst, was ich sagen will:

> This book is about beliefs. It was born from my dissatisfaction with the attempts of many physicists to sell a vision of the world whose 'objective' character disregards most of what makes life interesting.
>
> – Aus dem Vorwort von "Why Beliefs Matter" von E. Brian Davies [Dav10]

Die Grundlagenkrise der Mathematik

Der Theologe Hans Küng schreibt in seinem Buch "Existiert Gott?" über Gewissheit und Glaube. Am Anfang des Buches schreibt er auch über mathematische Gewissheit. Man kann behaupten, dass es nur in der Mathematik wahre Gewissheit gibt, weil nur in der Mathematik alles genau definiert wird und darauf mit logischen Argumenten gebaut wird. Es gibt keine Chance für Unsicherheit. Küng schreibt dann, dass auch in der Mathematik nicht alles so sicher ist, weil es am Anfang des 20. Jahrhunderts eine Grundlagenkrise der Mathematik gab. (Siehe [Kün01].)

Die Grundlagenkrise der Mathematik wurde 1903 mit der Publikation der Russelsche Antinomie ausgelöst. Russel hat die folgende Menge "naiv" definiert:

$$R := \{x \mid x \notin x\},$$

das heisst, R enthält jede Menge, die sich nicht selbst als Element enthält. Stellt man die Frage, ob R sich selbst enthält, folgt aus der Definition von R, dass R sich genau dann selbst enthält, wenn R sich nicht selbst enthält, was ein Widerspruch ist. (Siehe [Rus03].)

Zwischen 1920 und 1930 wurde die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre eingeführt. Das ist eine axiomatische Mengenlehre, wobei Mengen nur nach bestimmten Regeln aus anderen Mengen gebildet werden können. Dadurch werde Antinomien, wie die von Russel, vermieden.

Kurz danach (1931) wurde noch der Gödelsche Unvollständigkeitssatz veröffentlicht. Er besagt, dass es in hinreichend starken widerspruchsfreien Systemen immer unbeweisbare, wahre Aussagen gibt. Das liefert auch die, aus Hilberts Perspektive enttäuschende Lösung von Hilberts 2. Problem: Nach dem Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel kann diese Frage nicht mit Hilfe der arithmetischen Axiome beantwortet werden.

Laut Küng kann man heute auch nicht sicher sein, dass die Axiome, die eingeführt worden sind, widerspruchsfrei sind, und so können Mathematiker nie sicher sein, dass ihre Welt nicht irgendwann wieder in den Grundlagen erschüttert werden wird.

Ich bin anderer Meinung und glaube, dass die Zermelo-Fraenkel-Mengen-lehre mit Axiomen eingeführt worden ist, die keine Widersprüche zulassen. Auch folgendes Zitat aus *Ebbinghaus u.a., Kap. VII, Ü4, "Einführung in die mathematische Logik"* [EFT07] spricht für die Widerspruchsfreiheit der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre:

> Die Tatsache, dass ZFC seit Jahrzehnten untersucht und in der Mathematik benutzt wird, ohne dass sich ein Widerspruch gezeigt hat, spricht aber für die Widerspruchsfreiheit von ZFC.

Gottesbeweise

Der Theologe Küng wollte etwas über Gewissheit in der Theologie aussagen. Er argumentierte, dass man Gewissheit nicht mal in der Mathematik findet. Ich glaube, dass er damit sagen will, dass selbst reines logisches Denken keine Gewissheit schafft und dass man über Gewissheit im Glauben (und selbst in der Mathematik) eine andere Denkweise finden muss. Sein Argument hat mich aber nicht überzeugt, und ich habe dadurch keine grossen Wahrheiten in der Mathematik gefunden.

Auch Mathematiker haben schon versucht, etwas über die Existenz Gottes auszusagen. Gödel hat sogar einen "Beweis" der Existenz Gottes gefunden. Auch wenn es keine groen Wahrheiten in der Mathematik gibt, wäre ich ziemlich fasziniert, wenn die Existenz Gottes mathematisch bewiesen werden könnte. Doch leider geht das nicht, denn in jedem "Gottes-beweis” gissbt es schon irgendeine Annahme, wie z.B., die Möglichkeit, dass Gott existiert, was keinen Atheist überzeugen würde.

Es gibt einen ganz witzigen “Beweis” der Nichtexistenz Gottes im Buch *A Hitchhiker’s guide to the galaxy* [Ada05].

> Der Babelfisch ist klein, gelb und blutegelartig und wahrscheinlich das Eigentümlichste, was es im ganzen Universum gibt. Er lebt von Gehimströmen, die er nicht seinem jeweiligen Wirt, sondern seiner Umgebung entzieht. Er nimmt alle unbewussten Denkfrequenzen dieser Gehimströme auf und ernährt sich von ihnen. Dann scheidet er ins Gehirn seines Wirtes eine telepathische Matrix aus, die sich aus den bewussten Denkfrequenzen und Nervensignalen der Sprachzentren des Gehirns zusammensetzt. Der praktische Nutzeffekt der Sache ist, dass man mit einem Babelfisch im Ohr augenblicklich alles versteht, was einem in irgendeiner Sprache gesagt wird. Die Sprachmuster, die man hört, werden durch die Gehirnstrommatrix entschlüsselt, die einem der Babelfisch ins Gehirn eingegeben hat.
>
> Nun ist es aber verdammt unwahrscheinlich, dass sich etwas so wahnsinnig Nützliches rein zufällig entwickelt haben sollte, und so sind ein paar Denker zu dem Schluss gelangt, der Babelfisch sei ein letzter und entscheidender Beweis dafür, dass Gott nicht existiert.
>
> Die Argumentation verläuft ungefähr so: “Ich weigere mich zu beweisen, dass ich existiere, sagt Gott, denn ein Beweis ist gegen den Glauben, und ohne Glauben bin ich nichts.” “Aber”, sagt der Mensch, “der Babelfisch ist doch eine unbewusste Offenbarung, nicht wahr? Er hätte sich nicht zufällig entwickeln können. Er beweist, dass es dich gibt, und darum gibt es dich, deiner eigenen Argumentation zufolge, nicht. Quod erat demonstrandum.” “Ach, du lieber Gott”, sagt Gott, “daran habe ich gar nicht gedacht”, und löst sich prompt in ein Logikwölkchen auf. “Na, das war ja einfach”, sagt der Mensch und beweist, weil’s gerade so schön war, dass schwarz gleich weiss ist, und kommt wenig später auf einem Zebrastreifen ums Leben. Die meisten führenden Theologen behaupten, dieser ganze Streit sei absoluter Humbug, aber er hinderte Oolon Coluphid nicht, ein kleines Vermögen damit zu verdienen, dass er ihn zum zentralen Thema seines neusten Bestsellers “Na, lieber Gott, das war’s dann wohl” machte.

Mathematik und Gegensätze

Auf meiner Suche nach grossen Wahrheiten in der Mathematik verzweifelte ich fast, da, trotz Grundlagenkrise und Unvollständigkeitssatz, mathematische Exaktheit für mich immer noch und immer mehr die einzige echte Gewissheit ist, die es überhaupt gibt. Allerdings hat diese Gewissheit nichts mit der Realität zu tun, da alle mathematische Objekte abstrakte Begriffe sind. Was ich aber auf meiner Suche auch entdeckt habe, ist dass Mathematik ein Fachgebiet ist, das zahlreiche gegensätzlichen Eigenschaften besitzt. Ich möchte versuchen, solche aufzulisten.

Mathematik ist...

Schön und hässlich

In *Dr. Riemann's Zeros* [Sab03] behauptet Karl Sabbagh, dass die meisten Mathematiker, motiviert sind, Mathematik zu machen, weil sie Mathematik schön finden. Es gibt zahlreiche Zitate über die Schönheit der Mathematik. Hier ist eines von Bertrand Russel:

> Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than Man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry.
>
> – Bertrand Russel, Study of Mathematics

Doch kann man meiner Meinung nach nicht bestreiten, dass es für viele Menschen schwer vorstellbar ist, sich täglich mit abstrakten Konzepten zu beschäftigen. Natürlich ist jedes Fach für manche interessant und für andere nicht. Jedoch finde ich, das die Mathematik besonders heftig polarisiert.

Beeindruckend und abschreckend

Ich denke hier eigentlich an Formeln und Statistiken. Sie werden im Alltag bewusst oder unbewusst eingesetzt, um Menschen zu manipulieren. Formeln und Zahlen sind einerseits sehr exakt und sollen genaue, authentische Informationen vermitteln, andererseits werden sie oft nicht verstanden; einerseits sind sie beeindruckend und andererseits abschreckend. Aus diesem Grund haben sie Macht und können Menschen manipulieren.

Logisch und unfassbar

Mathematik ist meiner Meinung nach die einzige Disziplin, in der richtig logisch argumentiert werden kann. So kann man in einem Beweis jeden Schritt nachvollziehen und die Aussage, die bewiesen wird, nicht bezweifeln. Nur in Mathematik kann man alles richtig verstehen, was man lernt.

Andererseits kann kein Mensch Mathematik richtig verstehen. Es gibt einfach zu viel davon. Jeder kann ein bisschen davon verstehen und muss dennoch wissen, dass es noch ganz viel gibt, das er noch nicht verstanden hat. Es gibt, z.B., den Klassifikationssatz der endlichen einfachen Gruppen, der von hunderten Autoren zusammen bewiesen wurde. Aber keine einzelne Person kann den ganzen Beweis überprüfen, weil er zehntausende von Seiten lang ist. Ausserdem gibt es heutzutage formale Beweise, die von Rechnern durchgeführt werden. Der Vier-Farben-Satz z.B. wurde teilweise mithilfe von Rechnern bewiesen. Der formale Beweis ist so lang, dass kein Mensch ihn überprüfen kann. Aus diesem Grund gibt es heutzutage immer mehr Sätze, die man entweder glauben muss oder nicht, und so ist die Mathematik für einen Menschen unfassbar geworden.

Anwendbar und nicht anwendbar

Albert Einstein sagte schon:

> Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.
>
> – Geometrie und Erfahrung. Erweiterte Fassung des Festvortrages gehalten an der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin am 27. Januar 1921. Julius Springer Berlin 1921, S. 3 f.

Einerseits ist Mathematik also total abstrakt und hat überhaupt nichts mit der Wirklichkeit zu tun. Es gibt mathematische Modelle, die Erscheinungen der Wirklichkeit beschreiben sollen, aber diese Modelle sind nie ganz richtig. Sie beschreiben immer eine Vereinfachung oder einen Idealfall der Erscheinung. Doch funtkioniert es viel besser, als es eigentlich sollte, wie Eugene Wigner in seinem Artikel *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* (`http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html`) schreibt.

Pluralistisch

Letztlich ist die Mathematik pluralistisch, wie Brian Davies in [Dav10, S. 92] schreibt. Seit der Grundlagenkrise gab es eine Gruppe von Mathematikern, die wir als klassische Mathematiker bezeichnen, und eine kleinere, die wir als Konstruktivisten bezeichnen. Konstruktivisten akzeptieren nur, dass es ein mathematisches Objekt gibt, wenn es einen Existenzbeweis dafür gibt. Ein Konstruktivist vermeidet Ausdrücke wie “Die Menge aller Gebiete”. Ein klassischer Mathematiker würde sagen, dass es eine richtige Antwort auf die Frage gibt, “Kommen beliebig lange Reihen aufeinanderfolgender Fünfen in der Dezimalentwicklung von π vor?” Man weiss nur nicht was die richtige Antwort ist. Ein Konstruktivist würde sagen, es gibt keine Antwort auf diese Frage.

Davies ist der Meinung, dass ein Mathematiker sich im Idealfall zwischen diesen Perspektiven bewegen kann. Man kann sich ein besseres Verständnis von verschiedenen Gebieten aneignen, in dem man darauf achtet, wann ein Beweis konstruktiv ist und wann nicht.

Schlussfolgerung

Ich bin zum Schluss gekommen, dass man in der Mathematik keine grosse Wahrheiten finden wird, wenn man sich auf die Wahrheit von mathematischen Aussagen beschränkt.

Allerdings hat die Mathematik so viele gegensätzliche Eigenschaften, dass ich glaube, man hat hier mit einer grossen Wahrheit zu tun.

Literatur

[Ada05] ADAMS, D.: *Per Anhalter durch die Galaxis: der Roman zum Film ; [mit exklusivem Material zum Film]*. Heyne, 2005.

[Dav10] DAVIES, E.B.: *Why Beliefs Matter: Reflections on the Nature of Science*. OUP Oxford, 2010.

[EFT07] EBBINGHAUS, H.D., J. FLUM und W. THOMAS: *Einführung in die mathematische Logik*. Hochschul-Taschenbuch. Spektrum Akademischer Verlag, 2007.

[FLS11] FEYNMAN, R.P., R.B. LEIGHTON und M.L. SANDS: *Feynman Lectures on Physics 1: Mainly Mechanics, Radiation, and Heat*. Basic Books. Basic Books, 2011.

[Fri97] FRISCH, M.: *Homo faber: ein Bericht*. Suhrkamp-Taschenbuch. Suhrkamp-Taschenbuch-Verlag, 1997.

[Ker00a] KERSTEN, INA: *Hilberts Mathematische Probleme*. `http://www.math.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/`, 2000.

[Ker00b] KERSTEN, INA: *Mathematische Probleme*. `http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~kersten/hilbert/rede.html`, 2000.

[Kün01] KÜNG, H.: *Existiert Gott?: Antwort auf die Gottesfrage der Neuzeit*. Piper Taschenbuch. Piper Verlag GmbH, 2001.

[Roz67] ROZENTAL, S.: *Niels Bohr: His Life and Work as Seen by His Friends and Colleagues*. North-Holland Pub. Co., 1967.

[Rus03] RUSSEL, BERTRAND: *The Principles of Mathematics*. `http://fair-use.org/bertrand-russell/the-principles-of-mathematics/s101`, 1903.

[Sab03] SABBAGH, K.: *Dr. Riemann's zeros*. Atlantic Books, 2003.

[Sch01] SCHILPP, P.A.: *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*. Library of living philosophers. MJF Books, 2001.

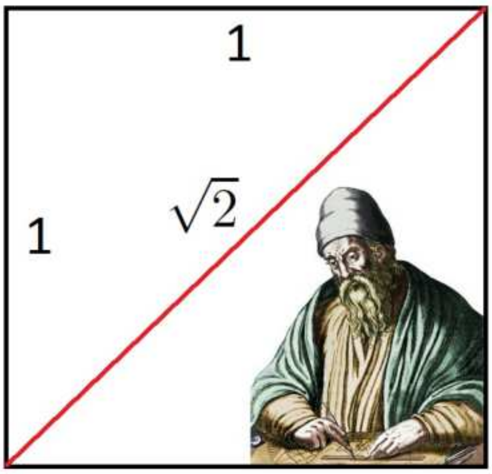
Tertium non datur. Widerspruch!

—

KARI KÜSTER
FREDERIK WESTERMAIER

Eigentlich ist alles ganz einfach: Entweder, Sie lesen gerade diesen Artikel oder Sie lesen ihn nicht. Entweder scheint draußen die Sonne oder nicht. Entweder es gilt die Aussage A oder nicht, $A \vee \neg A$. Das ist das *Tertium non datur*! Zu deutsch: ein Drittes ist nicht gegeben, auch genannt der *Satz vom ausgeschlossenen Dritten*.
Ist es wirklich so einfach? Das *Tertium non datur* mag oberflächlich betrachtet so wirken, ist aber alles andere als banal. Es spielt als ein Instrument der klassischen Logik eine bedeutende Rolle in der Mathematik, da es Grundlage einer Beweismethode ist, des *Widerspruchsbeweises*. Dabei geht man folgendermaßen vor:
Wir möchten eine Aussage A zeigen. Nach dem *Tertium non datur* gilt entweder A oder ihr Gegenteil, A v $\neg A$. Wir leiten aus $\neg A$ einen Widerspruch her, also kann $\neg A$ nicht gelten und es bleibt nur noch A übrig; A muss gelten.
Ein naives Beispiel ist der „Beweis“ der Behauptung „Nicht alle Menschen sind Griechen“[urla]: Angenommen, das Gegenteil würde gelten, d.h. alle Menschen wären Griechen. Daraus würde folgen, dass z.B. Cicero ein Grieche ist. Allerdings ist allgemein bekannt, dass Cicero kein Grieche, sondern Römer ist. Es kann aber nicht sein, dass Cicero sowohl Grieche als auch kein Grieche ist. Wir haben also die Aussage, dass alle Menschen Griechen sind, zu einem Widerspruch geführt und damit gezeigt, dass nicht alle Menschen Griechen sind.

Auch wenn wir nun bewiesen haben, dass nicht alle Menschen Griechen sind, spielen diese doch eine bedeutende Rolle in der Entwicklung des Widerspruchsbeweises. In der Tat besitzt er eine lange Tradition seit der antiken griechischen Mathematik. Als Argumentationsmuster explizit in der eleatischen Philosophie entwickelt, wird er dort unter anderem von Zenon und dessen Lehrer Parmenides benutzt [Sza94].



Euklid von Alexandria [bila]

In mathematischem Kontext findet er sich das erste Mal bei Euklid im Beweis der - in heutigen Worten - Irrationaltät von $\sqrt{2}$ [urlb]: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis. Angenommen $\sqrt{2}$ wäre rational, dann lässt es sich schreiben als $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, wobei $\frac{a}{b}$ ohne Einschränkung vollständig gekürzt ist und $b \neq 0$. Dann ist $a = \sqrt{2} \cdot b$, also $a^2 = 2b^2$, 2 teilt also a^2. Damit teilt 2 auch a. Daraus folgt: Es existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, so dass $a = 2n$, also $4n^2 = 2b^2$ und somit $b^2 = 2n^2$. 2 teilt also b^2 und damit auch b. Somit gibt es ein $m \in \mathbb{Z}$, so dass $b = 2m$. Wir erhalten, dass 2 sowohl a als auch b teilt. Somit ist aber $\frac{a}{b}$ nicht mehr vollständig gekürzt. Widerspruch! □

Ein weiteres berühmtes historisches Beispiel ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz von Euklid (Version 1). *Es gibt unendlich viele Primzahlen.*

Beweis. Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, ..., p_n$. Betrachte $p := p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Es ist $p > p_i$ für alle $i = 1, ..., n$. Dann ist aber p wieder eine Primzahl, denn jeder Primteiler p_k von p ist nach Definition auch ein Primteiler von $p - 1$. Daher muss p_k auch die Differenz von p und $p - 1$ teilen, also 1 teilen. Widerspruch! □

Der Widerspruchsbeweis ist ein häufiges, geradezu inflationär benutztes Beweismittel. Doch ist es notwendig, ihn so oft zu benutzen?
Der Satz von Euklid ist ein Beispiel dafür, dass Widerspruchsbeweise oft benutzt werden, obwohl sie nicht notwendig wären. In obiger Situation kann man den Widerspruchsbeweis leicht umgehen, indem man den Satz konstruktiv formuliert.

Satz von Euklid (Version 2). *Zu jeder Primzahl p_n gibt es eine grössere.*

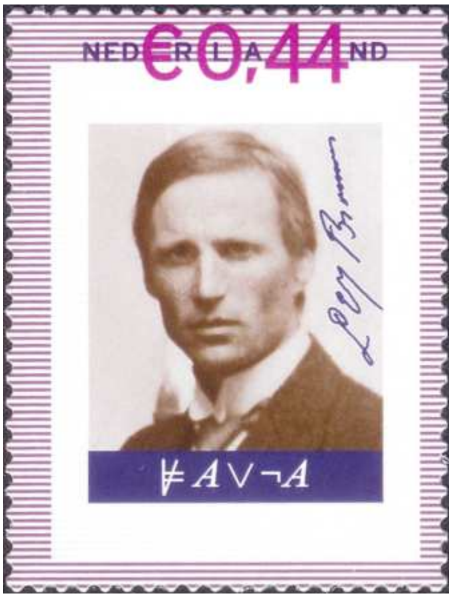
Beweis. Seien $p_1, ..., p_n$ die ersten n Primzahlen. Definiere $p := p_1 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Dann wird wie im vorhergehenden Beweis p nicht von $p_1, ..., p_n$ geteilt. Daher ist p entweder selbst eine Primzahl oder wird von einer weiteren Primzahl geteilt, die nach Konstruktion größer als p_n sein muss. □

Tatsächlich hat Euklid selbst den Beweis seines Satzes nicht, wie lange angenommen, als Widerspruchsbeweis geführt. Sein originaler Beweis in moderner Terminologie kann nachgelesen werden in [HW09]

Begibt man sich auf die Suche nach Widerspruchsbeweisen, die nicht leicht umgangen werden können, wird man feststellen, dass beispielsweise Existenzaussagen, die das Lemma von Zorn benutzen, häufig einen Widerspruchsbeweis benötigen. So benötigen die Existenz von nichtmessbaren Mengen und der Satz von Hahn-Banach einen Widerspruchsbeweis.
Ein weiteres Beispiel eines berühmten Widerspruchsbeweises ist Cantors Diagonalargument, mit dem man u.a. die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen beweist.
Beim Vergleich der Vorlesungen verschiedener Dozenten fällt auf, dass es unterschiedliche Auffassungen zur Benutzung des Widerspruchbeweises gibt. Viele Professoren benutzen sie häufig, andere halten sich von Widerspruchsbeweisen eher fern und bevorzugen einen konstruktiven An-satz. Wie gerechtfertigt ist diese Skepsis? Noch weitgreifender: Ist der Widerspruchsbeweis tatsächlich ein zulässiges Beweisverfahren?

Tertium non datur? Die Intuitionisten widersprechen

Es gibt Positionen, die der Behauptung „*Tertium non datur*“, „ein Drittes ist nicht gegeben“, widersprechen. Eine bekannte Strömung der Mathematik, in der das *Tertium non datur* nicht uneingeschränkt verwendet werden darf, ist der *Intuitionismus*. Dieser wurde von dem niederländischen Mathematiker *L.E.J. Brouwer* in der ersten Hälfte des 20. Jh begründet.



Luitzen Egbertus Jan Brouwer [bilb]

In der intuitionistischen Mathematik wird ein nichtklassischer Wahrheitsbegriff vertreten [urlc]. „$A \vee \neg A$“ heißt nicht wie in der klassischen Mathematik „A trifft zu oder $\neg A$ trifft zu“, sondern „Es gibt einen Beweis für A oder es gibt einen Beweis für $\neg A$“.
Vielleicht hört sich dies zunächst an wie ein nicht schwerwiegendes Detail, es bewirkt allerdings einen großen Unterschied. „Es gibt einen Beweis für A oder es gibt einen Beweis für $\neg A$“ bedeutet, dass Mathematik abhängig vom menschlichen Denken ist. Im Brouwerschen Intuitionismus wird keine Existenz der mathematischen Objekte und wahren Sätze außerhalb von Denkprozessen angenommen. Mathematische Sätze sind nicht für sich selbst wahr oder falsch, sondern werden dies erst durch das Finden eines Beweises oder eines Gegenbeispiels.
Sofern man nicht entweder einen Beweis für A oder einen Beweis für $\neg A$ vorliegen hat, darf man also nicht sagen „$A \vee \neg A$“. Doch genau dies ist das *Tertium non datur*! Damit verliert es in diesem Fall seine Gültigkeit. In diesem Sinne kann man Gegenbeispiele für das *Tertium non datur* konstruieren, indem man ein mathematisches Problem entwirft, das auf einer nichtbewiesenen Behauptung beruht.

Brouwersches Gegenbeispiel [Dal94] 1. *Man darf nicht sagen, dass jede Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *entweder endlich oder unendlich ist. Betrachte z.B.* $A = \{n \in \mathbb{N} |\ R \text{ gilt}\}$*, wobei* R *die Riemannsche Vermutung sei. Es ist dann*

$$A = \mathbb{N} \text{ genau dann, wenn } R \text{ richtig}$$
$$A = \emptyset \text{ genau dann, wenn } R \text{ unrichtig.}$$

Aber R *ist ungelöst. Daher gilt nach intuitionistischer Definition nicht* $A = \mathbb{N}$ *oder* $A = \emptyset$*.*

Dieser alternative Wahrheitsbegriff und die Abschaffung des „mathematischen Himmels" haben Auswirkungen auf den Existenzbegriff in der Mathematik, da mathematische Gegenstände nicht mehr als für sich selbst existierend angenommen werden. Dass etwas existiert bedeutet nun, dass es konstruiert werden kann. Für Brouwer ist die Essenz der Mathematik idealisiertes mentales Konstruieren [Sha00]. Ihm zufolge ist ein Theorem, das eine Existenzaussage beinhaltet, erst dann bewiesen, wenn ein Algorithmus angegeben wurde, mit dem das gewünschte Objekt tatsächlich konstruiert werden kann. Alle mathematischen Objekte sollten dem Mathematiker, zumindest prinzipiell, durch Konstruktion verfügbar und erfahrbar sein.
Dieser Existenzbegriff führt zu einer anderen Auffassung von Unendlich-keit. Betrachtet man z.B. eine unendliche Dezimalbruchentwicklung, so hat man, sofern es keine Regel für die Belegung der Dezimalstellen gibt, nie die ganze Zahl vor sich, sondern ist nur dazu in der Lage, diese beliebig lange fortzuführen. Zu jedem Zeitpunkt hat man aber nur ein endliches Segment der ganzen Folge vor sich [Sha00]. Hier wird also statt der meist üblichen *aktualen Unendlichkeit* die Vorstellung einer *potentiellen Unendlichkeit* zu Grunde gelegt. Wenn a eine Dezimalbruchentwicklung ohne Regel ist, dann kann man also über a nur sagen, dass sie eine Eigenschaft P hat, wenn man dafür nicht die ganze Zahl a zu kennen braucht, denn dies wird man nie erreichen. Die Verwerfung des *Tertium non datur*s führt dazu, dass der Widerspruchsbeweis nicht mehr uneingeschränkt anwendbar ist. Solange man sich im Endlichen aufhält, bekommt man keine Schwierigkeiten, da hier theoretisch alles einzeln nachgeprüft werden könnte. Kommt jedoch das Unendliche ins Spiel, ist der Widerspruchsbeweis nicht zulässig. Ein Beispiel:

Brouwersches Gegenbeispiel [Dal94] 2. *Sei* P *eine Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Wenn man die Aussage „Es existiert kein* $n \in \mathbb{N}$*, für das* P *gilt", zum Widerspruch geführt hat, so folgt aus intuitionistischer Sicht nicht: „Es existiert ein* $n \in \mathbb{N}$*, für das* P *gilt", da man einen Algorithmus zur Konstruktion eines solchen* n *angeben müsste.*

Doch wie geht es weiter, wenn das *Tertium non datur* im Allgemeinen nicht als gültig betrachtet wird? Da dann nicht mehr allgemein $A \vee \neg A$ gilt, kann es eine dritte Möglichkeit neben A und $\neg A$ geben.

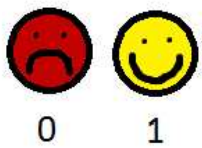
Mehrwertige Logik als Alternative[1]

In einem solchen System wäre eine Aussage nicht unbedingt wahr oder falsch, sondern könnte auch etwas anderes sein, z.B. „unbestimmt". Im Intuitionismus nehmen beispiels-

[1] Quelle dieses Abschnitts: [Got89]

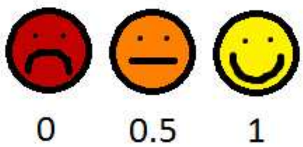
weise unbewiesene Aussagen den Wahr-heitswert „unbestimmt“ an.
Verdeutlichen wir uns die Sinnhaftigkeit einer solchen dritten Möglichkeit an einem Beispiel: Der Aussage „Der Fußboden in diesem Raum ist schön“ kann ich zustimmen, sie für „wahr“ halten, oder sie bestreiten, sie also für „falsch“ erklären. Allerdings kommt es häufig vor, dass man sich nicht eindeutig für eine dieser beiden Möglichkeiten entscheiden will oder kann. In diesem Fall könnte man etwa die Position vertreten, der Boden sei weder schön noch unschön, sondern eben irgendetwas dazwischen. In diesem Fall würde dann ein dritter Wahrheitswert zutreffen.
In mathematischen Begriffen kann man dies folgendermaßen ausdrücken: Man stellt die Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ durch die Zahlen 1 und 0 und die Bewertung von Aussagen bezüglich der Wahrheitswerte durch eine Abbildung, die jeder Aussage einen dieser beiden Zahlen zuordnet, dar.

Klassische Logik



Für die dritte Möglichkeit, dass eine eindeutige Entscheidung zwischen diesen beiden „Extremen“ nicht möglich ist, kann nun einfach eine dritte Zahl dem Bildbereich der Abbildung hinzugefügt werden. Um den Kontext des Sich-nicht-zwischen-zwei-Extremen-entscheiden-Könnens sinnvoll zu modellieren, ist $\frac{1}{2}$ eine natürliche Wahl für den dritten Wahrheitswert.

Dreiwertige Logik



In einem dreiwertigen logischen System funktioniert alles im Wesentlichen problemlos wie in der klassischen zweiwertigen Logik, es wird nur etwas komplizierter, weil man nun drei Wahrheitswerte zur Verfügung hat. In der klassischen Logik sind sogenannte Junktoren, wahrheitsfunktionale Aussagenverknüpfungen wie das „Und“, das „Oder“ oder die Negation, wichtige Hilfsmittel. Diese werden durch Wahrheitstafeln definiert. Z.B. für das „Und“ sieht die definierende Wahrheitstafel folgendermaßen aus:

$A \wedge B$		B	
		w	f
A	w	w	f
	f	f	f

Genauso kann man nun in der dreiwertigen Logik Junktoren mit Wahrheitstafeln definieren. Man muss sich überlegen, was die eigentliche Essenz eines Junktors ist, bzw. was dieser erfüllen soll. Sinnvoll wäre es, eine Erweiterung der schon bekannten Junktoren zu bekommen, d.h. eingeschränkt auf die Werte „wahr“ und „falsch“ soll der Junktor mit dem entsprechenden bekannten aus der zweiwertigen Logik übereinstimmen. Zur Veranschaulichung wieder das Beispiel des „Und“:
Es soll wahr sein, wenn beide Teilaussagen wahr sind und falsch, wenn mindestens eine davon falsch ist. Bleiben die Fälle, in denen eine unbestimmt und die andere wahr ist. Hier können wir immer „unbestimmt“ setzen. Die Wahrheitstafel sieht also so aus:

$A \wedge B$		B		
		w	u	f
	w	w	u	f
A	u	u	u	f
	f	f	f	f

Nun muss auch in einer dreiwertigen Logik sichergestellt werden, dass jede Aussage einen der gewählten drei Wahrheitswerte zugewiesen bekommt. Sonst ist das System unbrauchbar! Dadurch bekommt man nun ein „Quartum non datur“, ein vierter Wahrheitswert ist nicht zulässig. An dieser Stelle angekommen, lädt diese Forderung allerdings geradezu dazu ein, sie zu hinterfragen: Wieso soll es keinen vierten Wahrheitswert geben? Man ahnt schon, worauf dies hinausläuft.

Natürlich gibt es auch eine funktionstüchtige vierwertige Logik. Und warum sollte man bei vier Wahrheitswerten aufhören? In der Tat gibt es kein solches Gebot, vielmehr gibt es zu jeder natürlichen Zahl ein sinnvolles logisches System mit ebensovielen „Wahrheitswerten“.

Fünfwertige Logik

Spätestens hier sollte man jedoch nicht mehr von „Wahrheitswerten“ sprechen, denn von den ursprünglichen Begriffen „wahr“ und „falsch“ ist man jetzt im wahrsten Sinne des Wortes beliebig weit weg. Treffendere Bezeichnungen sind „Quasiwahrheitswerte“ oder einfach nur „Werte“. Und da diese mit den natürlichen Zahlen korrespondieren, andererseits aber auch die klassische Zuweisung von „wahr“ und „falsch“ zu 1 und 0 erhalten bleiben soll, schreiben wir auch für die anderen Werte Zahlen zwischen 0 und 1.

Im Verlauf dieser Verallgemeinerung wird es allerdings immer mühseliger, die Wahrheitstafeln aufzustellen, um die Junktoren-Erweiterungen zu definieren. Nützlich wäre eine alternative Beschreibung des Wesens der Junktoren, die man auf beliebigwertige Systeme verallgemeinern kann. Betrachtet man aus diesem Blickwinkel erneut die oben gewählte Wahrheitstafel des „Und“, stellt man fest, dass hier immer der Kleinere der beiden Werte, also das Minimum gewählt wurde.

A ∧ B		B		
		1	$\frac{1}{2}$	0
	1	1	$\frac{1}{2}$	0
A	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	0	0	0

Natürlich sind auch andere Verallgemeinerungen möglich.

Damit ist eine wichtige Hürde genommen für den nächsten Schritt: Ein logisches System mit unendlich vielen Quasiwahrheitswerten. Hierfür ist es unausweichlich, eine solche Beschreibung der Junktoren mittels allgemeiner Formeln zur Verfügung zu haben. Eine naheliegende Entscheidung für die Wahl der Werte sind in diesem Fall alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Das ist der Rahmen für die sogenannte *Fuzzy-Logik*. Ihr Name leitet sich vom englischen „fuzzy“ für „unscharf, verschwommen“ ab. Dort hat man alle Abstufungen von „Wahrheitsgraden“ zur Verfügung. Und da nun alle Lücken zwischen den Werten 0 und 1 mit weiteren Quasiwahrheitswerten gefüllt sind, brauchen wir nicht mehr zu fürchten, wieder in die Fänge eines *Tertium non datur*-Verwandten zu geraten, sofern wir die klassische Logik erweitert haben und außerdem alle Werte miteinander vergleichen können.

Fazit

Bei einer solchen Fülle von logischen Systemen kann man fragen, inwieweit die nichtklassischen darunter ihre Berechtigung haben. Welches repräsentiert denn nun die „wahre Logik“ oder ergibt eine sich auf nur ein System festlegende Position überhaupt Sinn?
Das zu entscheiden, liegt bis zu einem gewissen Grad im Ermessen jedes Einzelnen und seiner jeweiligen Motivation, aus der heraus er sich für Logik interessiert. Dies gilt vor allem in Anbetracht der Tatsache, dass alle auf die konkrete Welt anwendbaren Resultate der Mathematik auch ohne das Konzept des Widerspruchsbeweises hergeleitet werden können. Als System von Schlussregeln ist weiterhin das klassische System am verbreitetsten, allerdings haben auch die alternativen Systeme wichtige technische Anwendungen hervorgebracht. Das In-Zweifel-Ziehen der klassischen Logik hat sich also in jedem Fall gelohnt.

Quelle: [bilc]

Literatur

[bila] `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/30/Euklid-von-Alexandria_1.jpg/220px-Euklid-von-Alexandria_1.jpg`

[bilb] `http://jeff560.tripod.com/images/brouwer.jpg`

[bilc] `http://www.faszination-wissenschaft.de/Quantenmechanik/quantenski.jpg`

[Bro25] BROUWER, L.E.J.: Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 154 (1925), S. 1–7

[Dal94] DALEN, Dirk v.: Der Grundlagenstreit zwischen Hilbert und Brouwer. In: EICHHORN, Eugen (Hrsg.): *Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff*. Berlin : Heldermann, 1994 (Berliner Studienreihe zur Mathematik ; 5), S. 207 – 212

[Dal99] DALEN, Dirk v.: *Mystic, geometer, and intuitionist*. Bd. 1: The dawning revolution. 1. publ. Oxford : Clarendon Press, 1999

[Dal05] DALEN, Dirk v.: *Mystic, geometer, and intuitionist*. Bd. 2: Hope and disillusion. Oxford : Clarendon Press, 2005

[Got89] GOTTWALD, Siegfried: *Mehrwertige Logik: eine Einführung in Theorie und Anwendungen*. Berlin, 1989

[HW09] HARDY, Michael ; WOODGOLD, Catherine: Prime Simplicity. In: *The Mathematical Intelligencer* 31 (2009), Dezember, Nr. 4, S. 44–52

[Sha00] *Kapitel* Intuitionism: Is something wrong with our logic? In: SHAPIRO, Stewart: *Thinking about mathematics : the philosophy of mathematics*. 1. publ. Oxford [u.a.] : Oxford Univ. Press, 2000

[Sti90] STIGT, Walter P. v.: *Brouwers intuitionism*. Amsterdam [u.a.] : North-Holland, 1990

[Sza94] In: SZABÓ, Árpád: *Die Entfaltung der griechischen Mathematik*. Mannheim [u.a.] : B.I.-Wiss.-Verl., 1994, S. 372

[Tas05] *Kapitel* Brouwer und die unendliche Freiheit. In: TASCHNER, Rudolf: *Das Unendliche : Mathematiker ringen um einen Begriff*. 2., verb. Aufl. Berlin : Springer, 2006 [erschienen] 2005

[urla] `http://de.wikipedia.org/wiki/Reductio_ad_absurdum`

[urlb] `http://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalit%C3%A4t_der_Wurzel_aus_2_bei_Euklid`

[urlc] `http://de.wikipedia.org/wiki/Intuitionismus_(Logik_und_Mathematik)`

Galileo Galilei

—

Eppur si muove, oder doch nicht?

Miriam Bombieri
Martin Adler
Johannes Winckler

„Die Sonne blieb also mitten am Himmel stehen und ihr Untergang verzögerte sich, ungefähr einen ganzen Tag lang.“

(Bibel Einheitsübersetzung, Josua 10, 12-13)

In diesem Bibelzitat wird das vor dem 16. Jahrhundert herrschende Weltbild deutlich: Die Erde befindet sich im Mittelpunkt des Universums, und alle Himmelskörper, inklusive der Sonne, drehen sich um sie. Galileo Galilei stützte mit seinen Entdeckungen aber die Idee eines anderen Weltbilds. Um den Konflikt, der sich zwischen der Kirche und Galilei entwickelte, zu verstehen, müssen wir zunächst diese beiden Weltbilder betrachten.

Ptolemäisches und Kopernikanisches Weltbild

Claudius Ptolemäus (80-160 n. Chr., Alexandria) vertrat das *Geozentrische Weltbild* (siehe Abbildung 1), von dem man seit der Antike über-zeugt war. Dabei wurde angenommen, dass sich die Erde in der Mitte der „Welt“ befindet, und die 7 Planeten (mit der Sonne) auf Kristallsphären befestigt sind, die sich ein Mal am Tag um die Erde drehen. Auf einer 8. Kristallsphäre befinden sich die „Fixsterne“.
Nikolaus Kopernikus (1473-1543) stellte das *Heliozentrische Weltbild* (siehe Abbildung 2) zunächst als abstrakte Theorie auf. Er veröffentlichte sein Hauptwerk „De Revolutionibus Orbium Coelestium“ („Über die Umdrehungen der Himmelskörper“, 1543) erst kurz vor seinem Tode. Er hatte Angst, nicht ernst genommen zu werden, weil es beim Zeitpunkt des Erscheinens keinen eindeutigen Beweis für die neue Theorie gab. Das Werk wurde von der katholischen Kirche im Jahre 1616 zensiert. Aus „Erklärung der dreifachen Bewegung der Erde“ wurde „Hypothese von der dreifachen Bewegung der Erde“, um den rein hypothetischen Charakter des Heliozentrischen Weltbilds zu unterstreichen. [Bö12, S. 21 ff.]

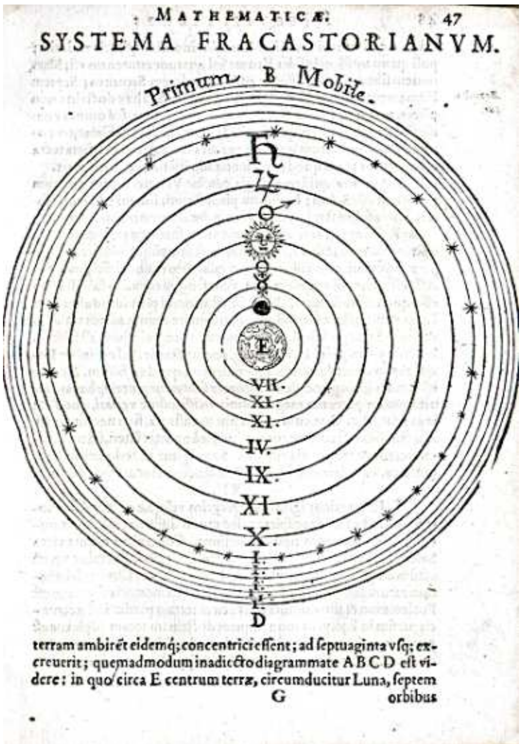


Abbildung 1:
Ptolemäisches Weltbild

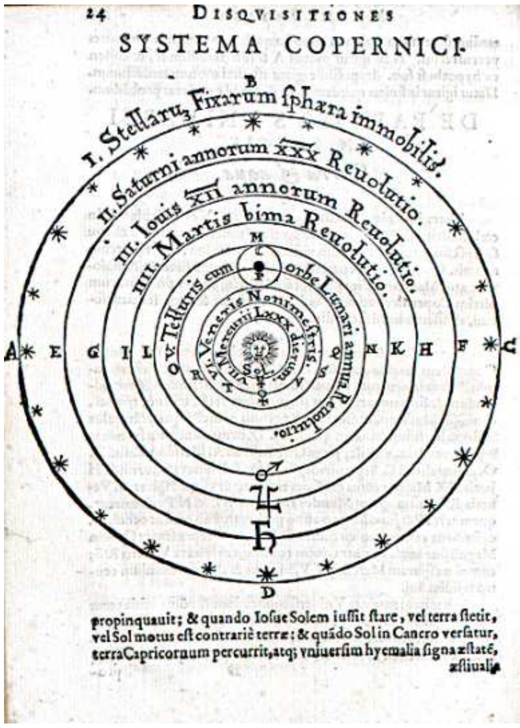


Abbildung 2:
Kopernikanisches Weltbild

Über Galileo Galilei

Galileo Galilei war italienischer Philosoph, Mathematiker, Physiker und Astronom, der auf verschiedenen Gebieten der Naturwissenschaften wich-tige Entdeckungen machte. Er wurde 1564 in Pisa geboren, studierte zunächst Medizin und später Mathematik und wurde schließlich Lektor in Pisa (1589) und Professor in Padua (1610). Dort baute und verkaufte er auch wissenschaftliche Instrumente. [Wik13a]

Das Leben Galileis - eine Übersicht

1564	Geburt in Pisa
1610	Erscheinen des „Sternenboten“
1613	öffentliche Diskussion, endet mit Ermahnung Galileis durch Kardinal Bellarmino in Rom 1616, Kopernikus-Zensur durch Index-Kongregation
1632	Erscheinen und Verbot des „Dialogs“, Vorladung vor die Inquisition in Rom
1633	Verhöre, Verurteilung, Abschwörung, lebenslanger Hausarrest
1638	Erscheinen der „Discorsi“, Erblindung
1642	Tod in Arcetri bei Florenz

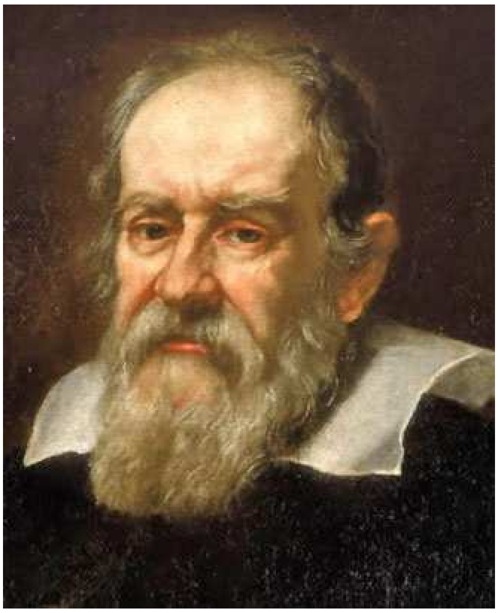


Abbildung 3: Der 72-jährige Galileo Galilei, Gemälde von Justus Sustermans, 1636

Der Sternenbote und Diskussionen 1610-1616

Galileis Werk „Sidereus Nuncius“ („Sternenbote“) wurde 1610 veröffent-licht. Darin sind die neuesten Erkenntnisse aus dem Bereich der Astronomie enthalten, die der Erfindung und Verbesserung des Fernrohrs zu verdanken sind, das 1608 von dem Niederländer Hans Lipperhey erfunden wurde. So beobachtet Galilei, dass der Mond keine Kugelgestalt hat, sondern ähnlich wie die Erde mit Kratern und Gebirgen versehen ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die Erde auch ein Himmelskörper wie die anderen sein kann. Auch veröffentlichte er darin die Entdeckung der Jupitermonde. Dadurch war bewiesen, dass es Himmelskörper gab, die sich um andere Planeten als die Sonne drehten. Nach der Veröffentlichung des „Sidereus Nuncius“ entdeckte Galilei die Venusphasen. Der Phasenwechsel eines Planeten kann nur dadurch erklärt werden, dass er sich um die Sonne dreht.

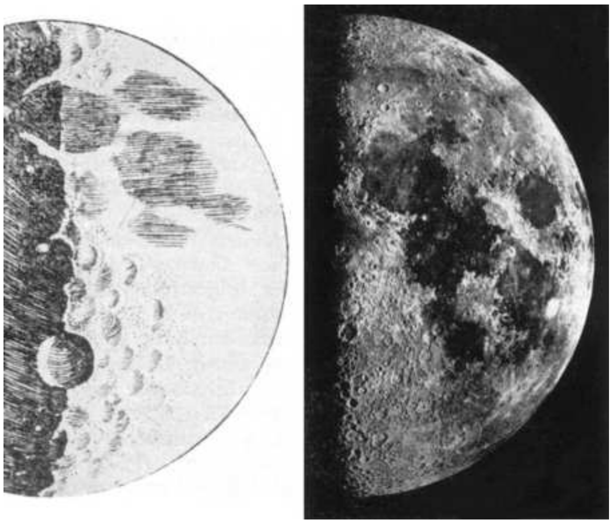


Abbildung 4: Zeichnung der Mondkrater in „Sidereus Nuncius “ und aktuelles Foto

In den Jahren 1613-1616 kam es daraufhin mehrmals zu Kontroversen um Galileis Weltsicht. Er hatte Konkurrenten im Kampf um die Gunst der Geldgeber. Er hatte diese schon zuvor 1612 in einer Diskussion über schwimmende Körper, bei der auch Kardinal Barberini anwesend war, übertrumpft. Sie griffen ihn nun an und versuchten, seine Ansichten in einen Konflikt mit dem damaligen Weltbild der Kirche zu verstricken. In öffentlichen Briefen verteidigte Galilei seine Ansichten und betonte, dass sie nicht im Widerspruch zu Inhalten der Bibel standen:

> „Da es ganz klar ist, dass zwei Wahrheiten sich niemals widersprechen können, so ist es die Aufgabe der weisen Ausleger, sich zu bemühen, den wahren Sinn der Bibelstellen, der mit den Naturgesetzen übereinstimmt, zu finden.“ - *Brief an Benedetto Castelli, 21. Dezember 1613* [Rav60, S. 195]

Mit einem Dekret positionierte sich 1616 erstmals die Kirche im Konflikt zwischen den beiden Weltbildern:

> „Die Entscheidung der Inquisition sei ohne Wenn und Aber zu respektieren. Das kopernikanische System dürfe nicht mehr als wahres Abbild der physischen Welt dargestellt werden. Es sei strengstens verboten zu behaupten, dass die Sonne still stehe oder dass die Erde sich um sie herum bewege.“[Nae05, S. 102 ff.]

Im selben Jahr schließlich reiste Galilei nach Rom, um seine Lehren zu verteidigen. Er wurde von Kardinal Bellarmino in seine Residenz gerufen und erhielt dort eine schriftliche Verwarnung. Durch diese inoffizielle Verwarnung konnte eine offizielle Demütigung Galileis, der hohes Ansehen besaß, verhindert werden. Kopernikus' Werk „Über die Umdrehungen der Himmelskörper“ wurde siebzig Jahre nach seinem Erscheinen von der katholischen Kirche auf den Index verbotener Bücher gesetzt; Galilei wurde in diesem Dekret nicht erwähnt. [Bö12, S. 30]

Theaterstück, frei nach „Berthold Brecht – Das Leben des Galilei“ [Bre48, Kapitel 1]

Miriam Bombieri	–	Frau Sarti, Galileis Haushälterin,
Johannes Winckler	–	Andrea Sarti, ihr Sohn und Galileis Schüler,
Martin Adler	–	Galileo Galilei

Galilei sitzt in der Mitte des Zimmers mit einem Apfel in der Hand. Andrea läuft vorbei.

Galilei: *Pfeifend.* Andrea, komm rein!
Andrea kommt rein.
Galilei: Hast du, was ich dir gestern sagte, inzwischen begriffen?
Andrea: Was? Das mit dem Kopernikus seinem Drehen?
G.: Ja.
A.: Nein. Warum wollen Sie denn, dass ich es begreife? Es ist sehr schwer, und ich bin im Oktober erst elf.
G.: Ich will gerade, dass auch du es begreifst. Dazu, dass man es begreift, arbeite ich und kaufe Bücher.
A.: Aber ich sehe doch, dass die Sonne abends woanders hält als morgens. Da kann sie doch nicht stillstehen. Nie und nimmer!
G.: Du siehst! Was siehst du? Du siehst gar nichts. Du glotzt nur. Glotzen ist nicht sehen.
Er stellt den Apfel in die Mitte des Zimmers.
G.: Also, du bist die Sonne. Bleibe stehen. Der Stuhl hier ist die Erde, und der Apfel hier ist Frau Sarti.
A.: Meine Mutti?
G.: Ja, genau. Wo ist die Sonne? Rechts oder links?
A.: Die Sonne, das bin ja ich! Von meiner Mutti aus gesehen, stehe ich links.
G.: Und wie kommst du nach rechts?
A.: Wenn Sie mich nach rechts tragen, natürlich.
G.: Nur so?
Er trägt den Stuhl mit Apfel auf die andere Seite.
Wo ist jetzt die Sonne?
A.: Rechts von Mutti.
G.: Und hast du dich bewegt?
A.: Das nicht.
G.: Was hat sich bewegt?
A.: Meine Mutti.
G.: *brüllt:* Falsch! Dummkopf! Der Stuhl!

A.: Aber sie mit ihm.
G.: Natürlich. Der Stuhl ist die Erde. Sie sitzt drauf.
Frau Sarti war schon da und hat zugehört. Aufgebracht stürmt sie herein.
S.: Was machen Sie eigentlich mit mir und meinem Jungen, Herr Galilei?
G.: Ich lehre ihn sehen, Frau Sarti.
S.: Indem Sie mich im Zimmer herumschleppen?
A.: Lass doch Mutter. Das verstehst Du nicht.
S.: So? Aber du verstehst es, wie? Sie bringen ihn noch so weit, dass er behauptet, zwei mal zwei ist fünf. Gestern abend bewies er mir schon, dass die Erde sich um die Sonne dreht. Was für ein Irrtum! Er ist fest überzeugt, dass ein Herr Namens Kippernikus das ausgerechnet hat.
A.: Hat das der Herr Kopernikus nicht ausgerechnet, Herr Galilei? Sagen Sie es ihr selber!
S.: Was, Sie sagen ihm wirklich einen solchen Unsinn? Dass er es in der Schule herumplappert und die geistlichen Herren zu mir kommen, weil er lauter unheiliges Zeug vorbringt. Sie sollten sich schämen, Herr Galilei.
G.: Auf Grund unserer Forschungen, Frau Sarti, haben, nach heftigem Disput, Andrea und ich Entdeckungen gemacht, die wir nicht länger der Welt gegenüber geheimhalten können.

Sarti verlässt murmelnd das Zimmer.

Freundschaft zu Urban VIII

Während des *Streits über die schwimmenden Körper* im September 1611 war Kardinal Maffeo Barberini anwesend. [Mau97]

Abbildung 5: Maffeo Barberini, Caravaggio, 1598 [Wik13b]

Er ist begeistert von Galileis Scharfsinn und seiner Fähigkeit, seinen Gegnern die Argumente zu nehmen. Es bahnt sich eine Freundschaft an, die Folgen haben wird. Denn im Jahr 1623 geht Maffeo Barberini als Papst Urban VIII in die Geschichte ein. Galileis erster Irrtum ist es wohl anzunehmen, dass er die Gunst des Vatikans besäße und damit Spielräume für seine Entdeckungen. Obwohl ihm der Papst wohlgesonnen ist, schafft es Galilei nicht, bei seinem Rombesuch im Jahr 1624 das Dekret von 1616 aufheben zu lassen. Allerdings erhält er die Erlaubnis, ein Buch zu schreiben über die beiden Weltbilder, die des Ptolemäus und des Kopernikus, allerdings als rein mathematische Hypothesen. Denn nach dem Dekret von 1616 ist es verboten, die heliozentrischen Gedanken anders als rein hypothetisch darzustellen. Ein Titelvorschlag von Seiten Urban VIII lautet *„Von der mathematischen Annahme über die Bewegung der Welt“*; das Buch wird später als der *„Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme“* veröffentlicht. [Hem69, S. 114], [Mau97]

Der Dialog

Auf dem Titelblatt des Dialogs sind drei Männer abgebildet: Aristoteles, Ptolemäus und Kopernikus.

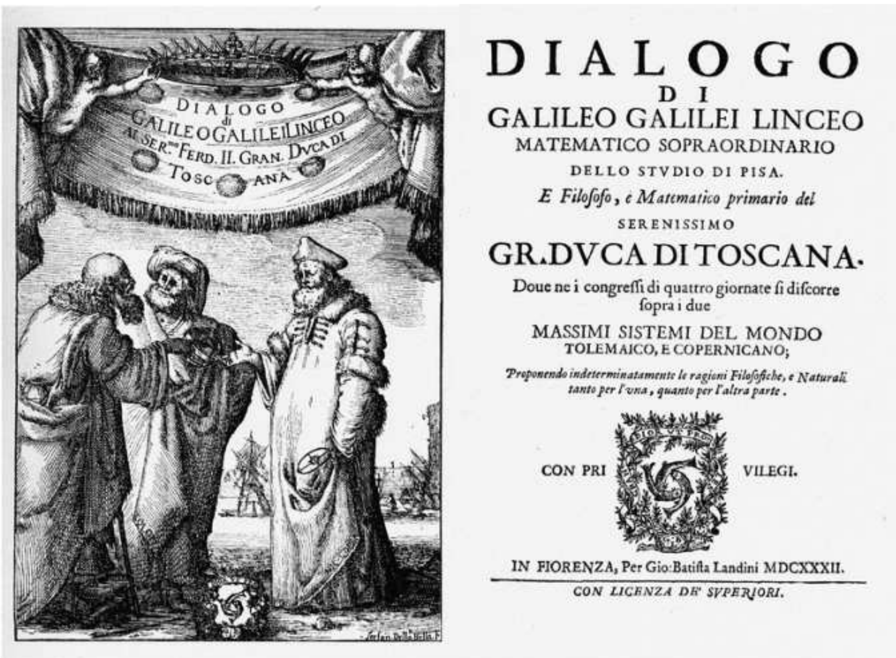


Abbildung 6: Aus dem „*Dialogus*“, 1632

Das Buch handelt von einem Dialog dreier Männer an vier Tagen.

- Salvati, der die kopernikanische Lehre vertritt,
- Simplicio, der Einfältige, der für die ptolemäischen Ideen eintritt,
- Sagredo, der als gelehrter Mensch die Diskussion vorantreibt.

In wie weit könnte man nun Galilei Fehler unterstellen?

1. Salviati, der jedes Argument des Simplicio sofort entkräftet, macht es den Gegnern Galileis leicht, ihn der Lehre des Kopernikanismus zu beschuldigen.
2. Das Weltbild des Tycho Brahe wird im Dialog nicht vertreten.
3. Galilei verfasst ein Vorwort, das heuchlerischer kaum sein könnte:

   > „In den letzten Jahren erließ man in Rom ein heilsames Edikt, das den gefährlichen Ärgernissen der Gegenwart begegnen sollte und der pythagoreischen Ansicht, dass die Erde sich bewege, rechtzeitiges Schweigen auferlegte.“[Gal91, S. 4],[Hem69, S. 113]

   Er spielt dabei auf das Dekret von 1616 an, das er nicht nur als Angriff gegen die Wissenschaft, sondern auch als einen persönlichen Angriff empfand.
4. Urban VIII fordert im Dialog eine Passage über die Allmacht Gottes, die Galilei unglücklicherweise in den Mund des Simplicio legt, der sagt

   > „dass es eine unerlaubte Kühnheit wäre, die göttliche Macht und Weisheit begrenzen und einengen zu wollen in die Schranken einer einzelnen menschlichen Laune.“[Gal91, S. 485],[Hem69, S. 115 f.]

   Der Papst fasst dies als Bloßstellung seiner Person auf und Galilei hat seine Gunst im Vatikan verspielt.

Abbildung 7: Urban VIII und Simplicissimus [Wik13b],[vG89]

Die Gegner Galileis stürzen sich auf den Dialog, beklagen die Verbreitung der verbotenen Lehre und beschuldigen Galilei der Ketzerei. [Hem69, S. 119] Auch der Papst, gekränkt und wegen politischen Drucks von außen, kann nicht länger zu Galilei halten. Die Inquisition eröffnet den Prozess gegen Galilei.

Der Prozess

Noch im Jahre 1632, im Erscheinungsjahr des Dialogs, befiehlt der Papst Galilei nach Rom. Da Galilei wegen angeschlagener Gesundheit nicht nach Rom reisen kann, fordert Urban VIII, Galilei notfalls in Ketten nach Rom bringen zu lassen, ein Zeichen der persönlichen Befangenheit des Papstes. In seiner Not schreibt Galilei an Francesco Barberini, einen Verwandten des Papstes:

> *„Wenn ich bedenke, dass die Frucht all meiner Studien [...] auf eine Vorladung vor das Heilige Offizium hinausläuft, [...] so bereue ich, der Welt einen Teil meiner Arbeiten mitgeteilt zu haben und spüre Lust, was ich noch unter den Händen habe, zu unterdrücken und den Flammen zu übergeben.“* [Hem69, S. 119]

In diesen wenigen Zeilen zeigt sich schon die Grundhaltung Galileis – Bedauern und Wut.

Galilei kommt im Februar 1633 in Rom an und kann in der toskanischen Botschaft wohnen, ein Zeichen dafür, dass weiterhin einflussreiche Männer zu ihm halten.

Das erste Verhör ist am 12. April 1633, nach dem Galilei nicht in die toskanische Botschaft zurückkehren kann, sondern in den Räumen des Heiligen Offiziums festgehalten wird.

Abbildung 8: Galileo vor dem Heiligen Offizium, Joseph-Nicolas Robert-Fleury

Am 17. April 1633 stellt eine Kommission aus drei Theologen Gutachten gegen Galilei vor. Einer der Theologen, der Jesuit Melchior Inchofer, steht selbst auf dem Index. Es bleibt anzunehmen, dass sein Gutachten *Tractatus Syllepticus* eine Chance auf Rehabilitierung war. Es geht daraus hervor, dass Galilei die verbotenen Ideen gelehrt hat und womöglich noch Anhänger des Kopernikanismus ist.

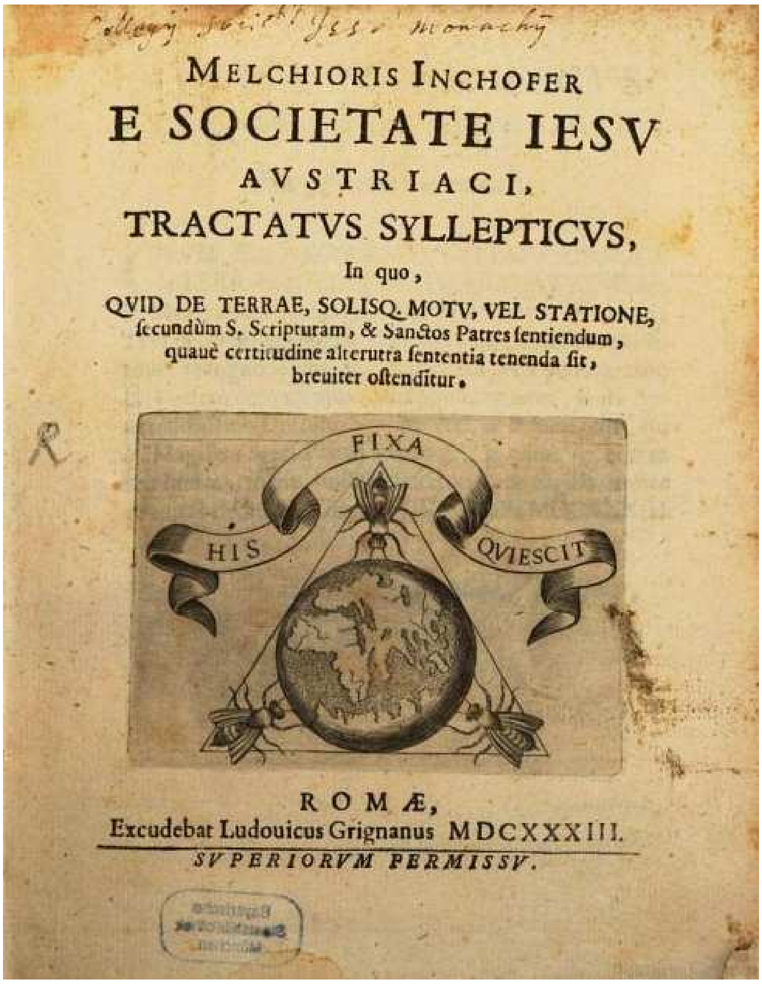


Abbildung 9: Tractatus Syllepticus von 1633 [Inc33]

Das zweite Verhör am 30. April 1633 gibt Galilei die Möglichkeit sich vorzubereiten. Er legt ein Geständnis ab, in welchem er zugibt, dass sein Buch missverständlich geschrieben sei. Weiterhin bietet er den Inquisitoren an, er könne den Dialog um 2 Tage verlängern, um die kopernikanische Lehre zu widerlegen. Man merkt bereits, dass er bereut, „der Welt einen Teil seiner Arbeiten mitgeteilt zu haben“, wie er Francesco Barberini schon zuvor in einem Brief mitgeteilt hatte.

Szenische Inszenierung – In der Nacht vor dem Prozess

Wir schreiben den 20. Juni 1633. Es ist der Tag vor der letzten Anhörung. Wir wollen uns in die verzwickte Lage Galileo Galileis hinein versetzen.

Musik: Fortuna Imperatrix Mundi (aus Carl Orff: Carmina Burana, 1937). Galilei ist im Zimmer, läuft auf und ab und überlegt sich, welche Position er im anstehenden Prozess vertreten soll.

Galilei: Morgen ist das dritte und entscheidende Verhör. Die Inquisition wird nichts unversucht lassen, mich der Ketzerei zu beschuldigen. Was soll ich nun machen?

Galilei hält in der Mitte des Zimmers und verharrt nachdenklich. Eine helle (Johannes) und eine dunkle Gestalt (Miriam) stellen sich hinter ihn mit Masken.

Dunkel: Ziehe deine Theorien zurück! Sonst läufst du Gefahr, wie Giordano Bruno als Ketzer auf dem Scheiterhaufen verbrannt zu werden!

Hell: Nein, mache das nicht! Deine Ergebnisse für dich behalten? So sollte kein Wissenschaftler handeln! Du musst für die Wahrheit kämpfen. Koste es, was es wolle!

Dunkel: Verwerfe deine Überzeugungen! Was bringt dir das? Dies ist es doch nicht wert! Sie sind blind. Sie wollen nicht glauben, dass sich die Sonne um die Erde dreht!

Hell: Aber wenn Du alles zurückziehst, wirst Du als Wissenschaftler nicht mehr glaubwürdig sein! Und denke an alle, die dich unterstützt haben!

Dunkel: Der Großteil der Menschen glaubt Dir jetzt schon nicht! Sie werden Dir nie glauben! Sie sind nicht bereit, neue Ideen zu akzeptieren und selbstständig zu denken!

Hell: Du musst dafür kämpfen, dass eine neue Zeit anbricht, in der die Menschen ihre „alten“ Wahrheiten kritisch überdenken können.

Dunkel: Aber denk doch nach: Wenn du am Leben bleibst, kannst du weiter forschen und noch viele wissenschaftliche Werke hinterlassen.

Hell: Frage dich: kannst du und deine ewige Seele eine solche Schmach ertragen? Eingeknickt vor der Inquisition?

Dunkel: Bedenke stets, die Folter ist unbarmherzig! Das Feuer brennt schmerzhaft!

Galilei: Für wen würde ich mich opfern? Für Menschen, die meine Meinung sowieso nicht akzeptieren? Ich kenne die Wahrheit. Wenn ich sterbe, stirbt auch sie mit mir. Gott, steh mir bei!

Das Urteil

Am 21.06.1633 will man herausfinden (unter Androhung von Folter), ob Galilei die verbotenen Lehren für wahr gehalten habe. Dieser macht folgende Aussage:

> *„Vor dem Erlass jenes Dekrets und bevor ein Verbot an mich ergangen war, schwankte ich und hielt die beiden Lehrmeinungen, nämlich die des Kopernikus und die des Ptolemäus für vertretbar, obwohl nur entweder die eine oder die andere in der Natur wahr sein konnte. Aber nach jener der Klugheit der Oberen entsprungenen Verfügung schwand in mir jeder Zweifel und ich hielt und halte noch heute für unbedingt wahr und unbezweifelbar die Lehre des Ptolemäus, das heißt die Ruhe der Erde und die Bewegung der Sonne. […] Ich kann daher mit bestem Gewissen behaupten, dass ich nach der Entscheidung der Oberen die verdammte Lehre nie wieder für wahr gehalten habe.“* [Hem69, S. 123 ff.]

Galilei schwört seine Fehler ab, verflucht und verabscheut diese.

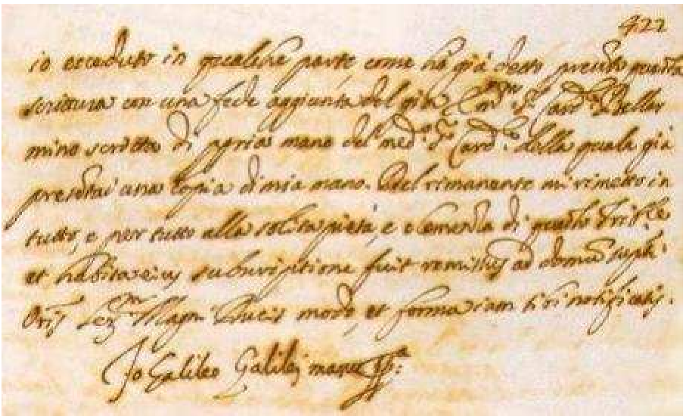


Abbildung 10: Galilei schwört ab

Am 22. Juni 1633 fällt das Urteil:

- der Dialog wird verboten und
- Galilei wird zu lebenslanger Kerkerhaft verurteilt, er kommt mit dem Leben davon.

Jedoch ist das Urteil nicht unumstritten, denn nur 7 von 10 Kardinälen unterschreiben es.

Eppur si muove!

„*Eppur si muove*“, so stellt der italienische Schriftsteller Giuseppe Marc’ Antonio Baretti in seinem Werk „The Italian Library“ (1757) die Reaktion Galileis nach dem Prozess dar.

Abbildung 11: Giuseppe Marc’Antonio Baretti

Es ist aber sehr unwahrscheinlich, dass Galilei diesen Satz wirklich ausgesprochen hat. Er wird in keinem offiziellen Dokument erwähnt, und weiterhin verkündet Galilei in seiner Widerrufung:

„... con cuor sincero e fede non finta abiuro, maledico e detesto li sudetti errori e eresie, e generalmente ogni e qualunque altro errore, eresia e setta contraria alla S.ta Chiesa ...“

Also erklärt er sich bereit, jedem Fehler, jeder Häresie und Sektiererei gegen die heilige Kirche abzuschwören.

Die Kirche war damals bei diesem Thema gespalten. Wie schon gesagt, wurde das Urteil gegen Galilei nur von 7 der 10 Kardinäle unterschrieben. Außerdem wurde Galilei 1633 im Hause des Erzbischofs Piccolomini empfangen. Später durfte Galilei sogar in seine Villa in Arcetri ziehen, dort Schüler empfangen, z.B Viaviani und Cavalieri, und mit ihnen weiter über Mathematik und Physik forschen. Man kann also sagen, dass Galilei eine Sonderbehandlung erfuhr.

Abbildung 12: Galileis Villa in Arcetri

Widerspruch – Geschichte nach Galileis Tod

Als Galilei 1642 starb, wollte Ferdinando II De Medici (Großherzog der Toskana) ein prächtiges Grab gegenüber dem von Michelangelo Buonarroti in der Basilica di Santa Croce in Florenz bauen lassen.

Abbildung 13: Basilica di Santa Croce

Urban VIII war mit dieser Idee nicht einverstanden und reagierte folgendermaßen:

„... [Galilei dort zu begraben] wäre kein gutes Beispiel, weil er von der Inquisition wegen seiner falschen und irrigen Theorien, mit denen er einen universellen Skandal produziert hat, verurteilt wurde ...“ [Fan94, S.468]

Selbst 9 Jahre nach dem Prozess hatte sich die Position des Papstes nicht geändert. Die Leiche Galileis wurde zunächst in einem Raum hinter der Sakristei der Basilica begraben. Erst im Jahre 1734 erlaubte das Heilige Offizium den Bau eines Mausoleums für Galilei.

Abbildung 14: Galileis Mausoleum in der Basilica di Santa Croce

Diese Erlaubnis hat sicherlich damit zu tun, dass sich im Laufe der Jahre die Theorie von Isaac Newton in ganz Europa verbreitet hatte. Damit waren auch die mathematischen Instrumente gegeben, um das heliozentrische System zu rechtfertigen. Außerdem entdeckte 1728 der Astronom Bradley die Aberration des Lichtes, wodurch man die Bewegung der Erde um sich selbst feststellte.

Einerseits war für die Kirche klar, dass sie ihre Art, die Bibel zu interpretieren, überdenken musste. Anderseits war dies keine einfache Aufgabe: in dem Index der verbotenen Bücher konnte man noch Werke über das heliozentrische System finden, und das Urteil gegen Galilei implizierte, dass die Bewegung der Sonne ein „actus fidei“ war. Die Kirche hatte ihre Autorität überschritten, und es hat lange gedauert, bis sie diese Überschreitung erkannt hat. Der Bau eines Mausoleums für Galilei war ein erster Schritt in diese Richtung.

Ein zweiter Schritt wurde 1741 gemacht, als die Inquisition erlaubte, die gesamten Werke Galileis drucken zu lassen. Der Inquisitor von Padua erklärt diese Entscheidung in einem Brief, in dem er sagt, dass die Werke eine „ungewöhnliche und schöne Theorie enthalten“, aber wenn es um die Bewegung der Erde geht, dann dürfe das nur als mathematische Hypothese betrachtet werden.

Der dritte Schritt war 1757 die Entscheidung der Inquisition, das Dekret von 1616, welches die Publikation von Büchern über die Bewegungslosigkeit der Sonne und Beweglichkeit der Erde verbietet, aufzuheben. Dennoch wurden die Bücher Galileis nicht aus der Ausgabe des Index von 1758 gestrichen.

Abbildung 15: Die Ausgabe des Index von 1758

Das ist natürlich ein Widerspruch. Aber die Idee war, dass die Behebung dieses Dekretes nicht impliziert, dass es formal und offiziell für nichtig erklärt wird. Dagegen hätte es mehr Staub in der intellektuellen Elite Europas aufgewirbelt, wenn die Werke Galileis aus dem Index gestrichen worden wären.

Es ist auch voller Widersprüche, wie es 1835 zur Entfernung der Bücher Galileis aus dem Index kam. Die Protagonisten sind Giuseppe Settele, Professor der Astronomie in Rom an der Universität La Sapienza, und der Dominikaner Filippo Anfossi. Settele hatte schon ein Buch über Astronomie und Optik veröffentlicht, und wollte jetzt ein zweites über das Kopernikanische System, nicht als Hypothese sondern als These dargestellt, publizieren. Anfossi verbot dies, und zitierte als Begründung das Dekret von 1616, obwohl damals bereits nicht mehr in Kraft. Zum Glück waren diesmal der Kommissar der Inquisition, der Dominikaner Olivieri, und der Assessor, Mons. Turiozzi, auf der Seite Setteles.

Dennoch brauchte es zwei Dekrete der Inquisition, um die Veröffentlichung des Buches zu erlauben. Das zweite aus dem Jahre 1822 wurde sogar von Papst Pius VII abgesegnet. Jetzt fühlte sich die Kirche bereit, Strafen an Kirchenmitglieder, die gegen eine Veröffentlichung solcher Werke waren, auszusprechen.

Erst 1835 wurden die Werke Galileis aus dem Index entfernt.

Abbildung 16: Ausgabe des Index 1835

Die Kirche hatte gehofft, den Fall Galilei damit abzuschließen, aber es folgten weiterhin schwierige Zeiten. Im 18. Jahrhundert begann das Zeitalter der Aufklärung, und am Ende des 18. Jahrhunderts fand die Französische Revolution statt. Galilei wurde als Opfer des intellektuellen und spirituellen Obskurantismus betrachtet.

Ausserdem war die politische Situation in Italien in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts nicht einfach: in 1861 entstand der Regno d'Italia und 1870 gab es die Breccia di Porta Pia. Also war die Kirche sehr beschäftigt und konnte sich nicht um den Fall Galilei kümmern.

Die formale Entschuldigung der Kirche

Erst 1979 äußert der damalige Papst Johannes Paul II in seiner Rede zum 100. Jahrestag des Geburtstags von Albert Einstein den Wunsch, den Fall Galilei von einer Kommission von Experten untersuchen zu lassen.

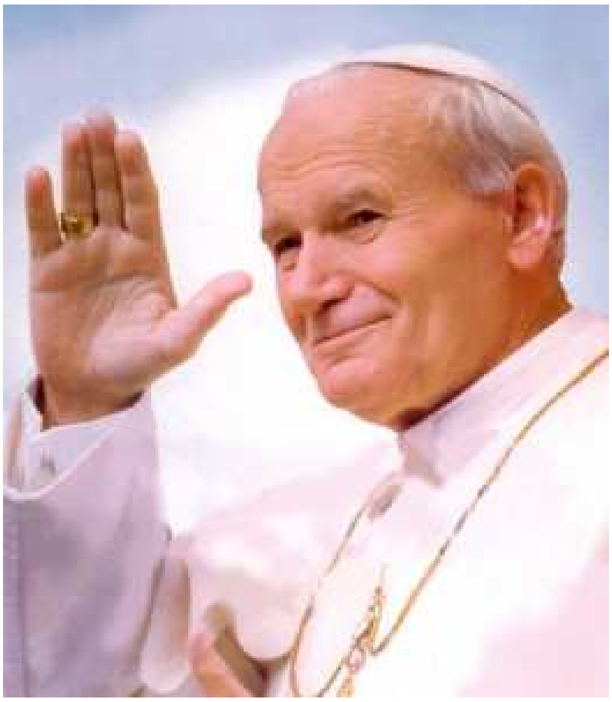


Abbildung 17: Johannes Paul II

"A ulteriore sviluppo di quella presa di posizione del Concilio, io auspico che teologi, scienziati e storici, animati da uno spirito di sincera collaborazione, approfondiscano l'esame del caso Galileo e, nel leale riconoscimento dei torti, da qualunque parte provengano, rimuovano le diffidenze che quel caso tuttora frappone, nella mente di molti, alla fruttuosa concordia tra scienza e fede, tra Chiesa e mondo. A questo compito che potrà onorare la verità della fede e della scienza, e di schiudere la porta a future collaborazioni, io assicuro tutto il mio appoggio." [II79]

1981 wurde eine Kommission gegründet, die dreizehn Jahre lang an dem Fall Galilei forschte. Die Ergebnisse dieser Studien wurden am 31. Oktober 1992 vom Kardinal Poupard vorgetragen (siehe [Pou92]): einerseits hat Galilei die von ihm selbst eingeführte wissenschaftliche Methode, „metodo scientifico", nicht auf die Kopernikanische Theorie angewandt. Anderseits hatten Vertreter der Kirche es nicht geschafft, die Astronomie als Wissenschaft von Glaubensfragen zu trennen, und sie hatten Angst, dass diese neue Theorie die Menschen vom christlichen Glauben abbringen könnten.

Es ist vielleicht kein Zufall, dass das Jahr 1992 für diese offiziellen Präsentation gewählt wurde: in diesem Jahr war der 350. Todestag Galileis. Papst Johannes Paul II hielt einen Vortrag (siehe [II92]), in dem er den Fall Galilei aus unterschiedlichen Perspektiven betrachtete, die Fehler von beiden Seiten analysierte und auch von Missverständnissen sprach. Er schloß seine Rede, in dem er allen Wissenschaftlern eine fruchtbare Zusammenarbeit wünschte, weil Forschung uns nicht nur bei der „Suche der Wahrheit" hilft, sondern auch bei der Gestaltung einer harmonischen Gesellschaft in einer Welt, die respektvoll gegenüber dem Menschlichen ist.

Literatur

[Bö12] Martin Börnchen. *Galileo Galilei zwischen Kirche und Wissenschaft*. Endformat Gesellschaft für gute Druckerzeugnisse mbH, 2012.

[Bre48] Bertolt Brecht. *Das Leben des Galileo Galilei*. Suhrkamp Verlag, 1948.

[Fan94] Annibale Fantoli. *Galileo for copernicanism and for the church*. Vatican Observatory Foundation, 1994.

[Gal91] Galilei Galileo. *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme*. B.G. Teubner, 1891.

[Hem69] Johannes Hemleben. *Galileo Galilei*. rororo, 1969.

[II79] Giovanni Paolo II. Discorso di Giovanni Paolo II per la commemorazione della nascita di Albert Einstein, November 1979.

[II92] Giovanni Paolo II. Discorso di Giovanni Paolo II ai partecipanti alla sessione plenaria della pontificia accademia delle scienze, Oktober 1992.

[Inc33] Melchior Inchofer. *Tractatus Syllepticus*. 1633.

[Mau97] Jean-Pierre Maury. *Galileo Galilei. Und sie bewegt sich doch!* Ravensburger Buchverlag, 1997.

[Nae05] Atle Naess. *Als die Welt still stand: Galileo Galilei - verraten, verkannt, verehrt*. Springer, 2005.

[Pou92] Cardinale Poupard. Riabilitazione – 31 ottobre 1992: La Chiesa riabilita Galileo – I risultati di una ricerca interdisciplinare, Oktober 1992.

[Rav60] Mathilde Raven. *Galileo Galilei– Ein geschichtlicher Roman*. F.A. Brockhaus Leipzig, 1860.

[vG89] Hans Jakob Christoffel von Grimmelshausen. *Der abenteuerliche Simplicissimus*. Husum: Hamburger Lesehefte Verlag o. J., 1989.

[Wik13a] Wikipedia. Galileo Galilei, März 2013.

[Wik13b] Wikipedia. Pope Urban VIII, April 2013.

Revolution oder Evolution?

—

Was prägt die Wissenschaft Mathematik?

Barbara Ricken

Einleitung

Das Thema des diesjährigen Romseminars, „Fehler, Irrtum, Widerspruch“, bietet zahlreiche Anknüpfungspunkte. Dass *Fehler*, die Menschen machen, nicht immer als negativ anzusehen sind, sondern uns die Augen öffnen können, ist sicherlich eine wesentliche Einsicht, zu der wir in unseren Diskussionen im Laufe des Wintersemesters gelangt sind. Ebenso können *Widersprüche* das Individuum weiterbringen. Fortschritte in der kognitiven Entwicklung werden laut Piaget gerade durch Widersprüche ausgelöst. Nach Piagets Theorie der kognitiven Entwicklung baut das Kind, angeregt durch seine Umwelterfahrungen, bestimmte kognitive Strukturen auf. Damit erklärt es sich die Welt, bis schließlich die Widersprüche so groß werden, dass die kognitiven Strukturen verändert und ausgebaut werden müssen.[1]

Wie sieht es in den Wissenschaften aus, haben wir uns nun gefragt. Wo und wann tauchen hier Widersprüche auf? Und führen diese zu einem Umbau oder gar zum Einsturz bestehender Theoriegebäude? Wie verhält es sich speziell in der Mathematik; welche Rolle spielen Widersprüche dort? Gab und gibt es in der Mathematik überhaupt Umwälzungen, ja Revolutionen, oder ist nicht diese Wissenschaft eher von Evolution(en) geprägt im Sinne einer fortschreitenden Anhäufung gültiger Regeln und Theoreme? Diesen Fragen beschlossen Barbara Stüßer und ich weiter nachzugehen.

Im Zuge unserer Nachforschungen trafen wir schnell auf die „Theorie wissenschaftlicher Revolutionen“[2] von Thomas Samuel Kuhn, einem der wohl bedeutsamsten Wissenschaftsphilosophen des 20. Jahrhunderts. Wie der Titel seines Hauptwerks aus dem Jahre 1962 bereits erahnen lässt, argumentiert Kuhn *für* die Existenz von Revolutionen in den Wissenschaften. Seine Untersuchungen lösten nicht nur in Fachkreisen große Resonanz aus. Kuhn prägte den heute bereits geläufigen Begriff des „Paradigmenwechsels“. Die Bedeutsamkeit von Kuhns Theorie war für uns Anlass genug, uns mit ihr genauer zu befassen und auch der Frage nachzugehen, inwiefern sie sich auf die Mathematik anwenden lässt. Im vorliegenden Beitrag stelle ich Kuhns „Theorie wissenschaftlicher Revolutionen“ vor und frage im Anschluss nach deren Anwendbarkeit auf die Mathematik. Diese Frage entfachte in den USA bereits in den 1970er Jahren eine Diskussion. Die Positionen der damaligen Hauptwortführer – Michael J. Crowe und Joseph Dauben – werden hier kurz vorgestellt; ihnen folgen im letzten Abschnitt dieses Beitrags kurze Schlussbetrachtungen.

Das Bruner-Postman-Experiment

Vor dem Einstieg in den Theorieteil soll dem Leser noch die Gelegenheit gegeben werden, an einem Experiment teilzunehmen, das wir mit den Zuhörern unseres Vortrags in Rom durchgeführt haben. Hierfür ist Internetzugang erforderlich, denn während des Experiments schaut der Proband ein Video an. Es handelt sich um einen Reaktionstest. Im Video werden dem Probanden wiederholt verschiedene Spielkarten gezeigt – erst ganz kurz, später länger. Aufgabe des Teilnehmers ist es zu versuchen, die jeweilige Karte unmittelbar nach ihrem

[1] Vgl. Ormrod (2012).
[2] Vgl. Kuhn (2012).

Erscheinen zu nennen, z.B. durch „Karo 6". Wer das Experiment noch nicht kennt und ganz unvoreingenommen daran teilnehmen möchte, sollte den folgenden Abschnitt nicht lesen. Das Video ist unter dem Link `www.youtube.com/watch?v=yFYBY_YUH5I` abrufbar – zumindest war es das bis zum Zeitpunkt des Verfassens dieses Berichts.

Wozu dieses Experiment? Die Psychologen Bruner und Postman haben Ende der 1940er Jahre ein sehr ähnliches Experiment durchgeführt.[3] Sie wollten erforschen, wie es sich auf die Wahrnehmung auswirkt, wenn ein gegebener Reiz nicht der erwartete ist, wenn also – so ihr Terminus – Inkongruenzen auftauchen. Wie im Youtube-Video nachgestellt, haben sie mit ganz normalen Spielkarten und Trickkarten gearbeitet. Neben normalen Skatkarten tauchten z.B. auch Karten mit roten Piks auf. Die Wissenschaftler haben vier Reaktionsmuster auf Inkongruenzen identifiziert und folgendermaßen benannt: Dominanz, Kompromiss, Verstörung und Erkennen der Inkongruenz. Bei der *Dominanz*, dem häufigsten Reaktionsmuster, dominiert eine bestimmte Eigenschaft die Wahrnehmung. So kann etwa die Farbe dominant sein, so dass die Trickkarte mit einem roten Pik als Herz bezeichnet wird. *Kompromiss* bedeutet, dass etwa ein rotes Pik als Herz „gesehen" wird, wobei das Rot eher als Braun-Rot beschrieben wird. *Verstörung* kann sich z.B. so äußern, dass ein Proband verwirrt ist und gar nicht mehr weiß, ob es sich beim betrachteten Gegenstand überhaupt um eine Spielkarte handelt. Beim *Erkennen* dagegen wird dem Probanden bewusst, dass es sich bei der Trickkarte um eine solche handelt. Dem Erkennen geht typischerweise eine langsam zunehmende Schwächung der anfänglichen Hypothese zuvor (Zweifeln etc.), selbst wenn sich das Erkennen dann scheinbar plötzlich zeigt (z.B. als „Ach, jetzt fällt es mir wie Schuppen von den Augen"). Bruner und Postman folgern, dass schon ein Minimum einer Erwartungsbestätigung, etwa bei rotem Pik die Farbe und annähernd auch die Form von Herz, dazu führen kann, dass Anomalien gar nicht erkannt werden.
Wichtigstes Fazit des Experiments ist, dass offensichtlich unsere Erwartungen unsere Wahrnehmung stark beeinflussen und das Bewusstwerden von Anomalien stark hemmen können. Thomas S. Kuhn nimmt in seinem Essay „Über die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen" Bezug auf dieses Experiment und vertritt die These, dass sich Wissenschaftler auch häufig so verhalten wie die Probanden im Experiment.

Kuhns Struktur wissenschaftlicher Revolutionen

Thomas S. Kuhn lebte von 1922 bis 1996 in den USA. Er war Physiker, Wissenschaftshistoriker und -philosoph. Als Professor lehrte er in Berkeley, Princeton und am MIT. Sein Hauptwerk „The Structure of Scientific Revolutions", von ihm selbst bescheiden als Essay bezeichnet, erschien 1962, ist mittlerweile in zahlreiche Sprachen übersetzt und auf Deutsch bereits in der 23. Auflage erschienen.

Der Kern von Kuhns Theorie ist ein *Phasenmodell*. Zunächst durchlebt eine Wissenschaft die *vorparadigmatische Phase*, in der sich noch keine Standards, noch keine Paradigmen unter den Wissenschaftlern herausgebildet haben. Erst wenn dies der Fall ist, gilt eine Wissenschaft als „reif". Nun durchläuft sie – idealtypisch – immer wieder drei Phasen: die

[3] Vgl. Bruner; Postman (1949).

Phase der *Normalwissenschaft*, eine *Krise* und eine *Revolution*, gefolgt von der nächsten normalwissenschaftlichen Phase.

Eines der *Beispiel*e, anhand derer Kuhn seine Theorie belegt, ist die Kopernikanische Wende, also der krisenhafte und revolutionäre Übergang vom geozentrischen Weltbild (erste normalwissenschaftliche Phase) hin zum heliozentrischen Weltbild (aktuelle normalwissenschaftliche Phase). Im Folgenden werden die drei wiederkehrenden Hauptphasen (Normalwissenschaft, Krise und Revolution) genauer vorgestellt.

Die Normalwissenschaft

Wenn sich bestimmte Paradigmen als führend herausgestellt haben, ist dies ein Zeichen für eine reife Wissenschaft. Diese wird dann von jenen Paradigmen angeleitet und zwar in Hinblick auf die zu verwendenden Begriffe, Instrumente, Theorien und Methoden. *Paradigmen* sind also die Standards, die Grundlagen einer Fachwissenschaft zu einer bestimmten Zeit. Die Neulinge einer Wissenschaft, z.B. die Studenten, werden etwa durch die ersten Vorlesungen und insbesondere durch die grundlegenden Lehrbücher wie auch durch Übungsaufgaben auf die geltenden Paradigmen „eingeschworen“.

Die Haupttätigkeit der (Natur-)Wissenschaftler in der Normalwissenschaft sind sogenannte „Aufräumarbeiten“. Die Wissenschaftler sind vorwiegend damit beschäftigt, die Natur in die von den Paradigmen geformten Schubladen zu sortieren bzw. einzufügen. Die Entdeckung neuer Phänomene spielt in dieser Phase keine große Rolle. Diese Tätigkeit in der Normalwissenschaft bezeichnet Kuhn häufig auch als Rätsellösen (engl.: puzzle-solving). Die Analogie besteht darin, dass wie das Puzzeln auch das Forschen bestimmten Regeln folgt – Puzzleteile dürfen z.B. nicht geknickt werden – und ein abgesteckter Rahmen besteht, in dem sich die Forschungstätigkeit vollzieht – beim Puzzeln werden z.B. nur die gegebenen Teile verwendet. Der Glaube der Wissenschaftler, die Probleme (Rätsel) ihrer Fachwissenschaft mit den Mitteln und Regeln der geltenden Paradigmen lösen zu können, spornt sie zu enormen Höchstleistungen an. Aufwendige, höchstpräzise Messinstrumente werden i.d.R. in dieser Phase entwickelt.

Anomalien kommen zwar auch in der Phase der Normalwissenschaft vor, doch sie werden entweder gar nicht erkannt (vgl. obiges Experiment!), werden als Messfehler o.a. abgetan oder bleiben unberücksichtigt und werden an die nächste Generation weitergegeben. Jedenfalls wird Anomalien in dieser Phase kaum Beachtung geschenkt. Der starke Glaube der Wissenschaftler an das Paradigma ermöglicht also nicht nur Höchstleistungen, sondern macht sie manchmal auch blind.

Die Krise

Die Normalwissenschaft geht dann in eine Phase der Krise über, wenn Anomalien unerträglich geworden sind, wenn sie nicht mehr als Rätsel, sondern als Gegenbeispiele aufgefasst werden und insbesondere wenn selbst die besten Wissenschaftler mit diesen Anomalien nicht fertig werden. Die Krise ist eine Phase fachlicher Unsicherheit. Sie ist geprägt von Grundlagendiskussionen und Verzweiflung. Paradigmen weichen auf. Die besten Wissenschaftler wenden sich den bestehenden Problemen zu und sind sich typischerweise nicht alle einig, wie es weiter gehen soll. Es handelt sich nun um einen außerordentlichen, spekulativen Wissenschaftsbetrieb, der nicht mehr wie zuvor in den von den Paradigmen gegebenen, geordneten Bahnen verläuft. Die Wissenschaftler gehen kaum noch den sonst üblichen Aufräumarbeiten nach. Gelöst von den bisher dominanten Paradigmen experimentieren sie nun auch „auf gut Glück".

Eine Krise ist notwendig für einen Paradigmenwechsel. Es kommt häufig vor, dass Paradigmenwechsel schon lange vorher gedanklich vorweggenommen werden. Die neuen Paradigmen liegen dann also schon länger bereit, zumindest in den Köpfen einiger. Doch zu ihrem Durchbruch verhilft ihnen erst eine Krise, da zuvor in der Fachwissenschaft – mangels Krise – keine Notwendigkeit zu einem Paradigmenwechsel besteht.

Nach Kuhns wissenschaftshistorischen Analysen trifft dies auch auf die Kopernikanische Wende zu. Ein heliozentrisches Weltbild entwarf schon Aristarchos im dritten Jahrhundert v. Chr., d.h. 18 Jahrhunderte vor der Kopernikanischen Wende, doch bis zu dieser wies das geozentrische Modell keine wesentlichen Mängel auf, die das heliozentrische hätte beheben müssen.[4]

Die Revolution

Nach Kuhns Untersuchungen können Krisen auf drei Arten enden. Zum einen ist es möglich, dass schließlich das alte Paradigma im Wesentlichen doch beibehalten wird, da die Wissenschaftler es schaffen, durch kleine Anpassungen der Theorie die zuvor unerträglichen Anomalien auszumerzen bzw. zu verharmlosen. Zum anderen kann die Krise auch durch Ermüdung der Wissenschaftler über die Zeit zu einem Ende kommen. In diesem Fall werden die Probleme verdrängt und an nachfolgende Wissenschaftlergenerationen weitergegeben. Es ist auch möglich, dass der von den Problemen betroffene Bereich der Wissenschaft abgesondert wird und im fachwissenschaftlichen Betrieb in Zukunft keine Rolle mehr spielt.

Die Krise kann aber auch – und das steht im Fokus von Kuhns Abhandlung – in eine Revolution münden. Die Phase der Revolution ist zunächst gekennzeichnet durch sich bekämpfende Lager mit unterschiedlichen, konkurrierenden neuen Ansätzen, ähnlich wie in der vorparadigmatischen Phase.

Welches Paradigmenbündel setzt sich schließlich durch? Entscheidend ist hier mehr die Überredung als die Überzeugung von bestimmten Paradigmen, denn die gemeinsame Basis der Konkurrenten ist zu klein, um die jeweils andere Partei mit rein sachlichen, logischen Argumenten zu überzeugen. Es setzt sich schließlich das Paradigma durch, von dem die meisten bzw. die meinungsführenden Wissenschaftler wollen, dass es in Zukunft die Fachwissenschaft anleitet, insofern sie glauben / vermuten / erwarten, dass es am ehesten mit den bestehenden und potentiellen (zukünftigen) Problemen fertig (werden) wird. Auch ästhetische Aspekte spielen eine Rolle. So soll meist das neue Paradigma „saubere" oder „einfache" Theorien liefern. Die Erfinder des neuen Paradigmas sind typischerweise vergleichsweise jung oder relativ neu in der betreffenden Fachwissenschaft.

[4] Vgl. Kuhn (2012), S. 88.

Kuhn merkt an, dass sich in der Revolution die Wichtigkeit der Krise zeigt. Die wissenschaftliche Gemeinschaft bringt einen Paradigmenwechsel hervor, da sie die Krise als schmerzliche Phase empfunden hat und alle Hoffnung auf neue Paradigmen setzt. Um die Stärke der Emotionen während der Krise und der Revolution zu veranschaulichen, zitiert Kuhn den Physiker Wolfgang Pauli:

> „(...) Wolfgang Pauli schrieb in den Monaten, ehe Heisenbergs Schrift über die Matrizenmechanik den Weg zu einer neuen Quantentheorie zeigte, an einen Freund: ‚Zur Zeit ist die Physik wieder einmal furchtbar durcheinander. Auf jeden Fall ist sie für mich zu schwierig und ich wünschte, ich wäre Filmschauspieler oder etwas Ähnliches und hätte von der Physik nie etwas gehört.' Dieses Zeugnis ist besonders eindrucksvoll, wenn man es Paulis Worten nach weniger als fünf Monaten gegenüberstellt: ‚Heisenbergs Modell hat mir wieder Hoffnung und Freude am Leben gegeben. Es gibt sicherlich noch nicht des Rätsels Lösung, aber ich glaube, es ist jetzt wieder möglich, voranzukommen.'"[5]

Schließlich nimmt die Mehrheit der Fachwissenschaftler das neue Paradigma an. Dieses liefert nun einen neuen Rahmen für die weitere Forschungsarbeit. Die Revolution geht über in eine neue Phase der Normalwissenschaft. Häufig vollziehen nicht sämtliche Wissenschaftler diesen Paradigmenwechsel sofort mit. Einige gehen zeitverzögert zum neuen Paradigma über, andere nie. An letzteren Zeit sich, wie stark einzelne Paradigmen das Denken von Wissenschaftlern beeinflussen können und wie unerschütterlich deren Glaube an diese Paradigmen sein kann.

Ist Kuhns Theorie auf die Mathematik anwendbar?

Kuhns Essay „Über die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen" durchziehen drei Beispiele, mit denen Kuhn seine Theorie erläutert: die Chemische Revolution, die Kopernikanische Wende und die Einstein'sche Revolution. Alle drei entstammen nicht der Fachwissenschaft Mathematik. Dazu, ob seine Theorie auch volle Gültigkeit für die Mathematik beansprucht, äußert sich Kuhn in seinem Werk nicht explizit. Seine Untersuchungen scheinen sich mehr auf die typischen Naturwissenschaften zu beziehen.

In den 1970er Jahren entwickelte sich in den USA eine Diskussion um die Frage der Anwendbarkeit von Kuhns Theorie auf die Mathematik. Insbesondere wurde die Frage diskutiert, ob es Revolutionen in der Mathematik gibt. Die beiden Anführer und gleichzeitig Gegner in dieser Diskussion waren die Wissenschaftshistoriker Joseph Dauben und Michael Crowe. *Joseph W. Dauben* vertrat dabei die These, dass es Revolutionen in der Mathematik gibt. Unter Revolutionen versteht er einen radikalen Wandel in der Wissenschaft, die danach nicht mehr ist, wie sie vorher zu sein schien. Radikale Umbrüche solchen Ausmaßes meint Dauben in der Wissenschaft der Mathematik finden zu können und urteilt dann: „they have all changed the content of mathematics and the ways in which mathematics is regarded.

[5] Kuhn (2012), S. 97, zitiert aus Ralph Kronig, The Turning Point, in: Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli, Hrsg. M Fierz und V.F. Weißkopf (New York 1960), S. 22, 25–26.

They have each done more than simply add to mathematics—they have each transformed it.".[6]
Sein Kontrahent *Michael Crowe* hat zehn ‚Gesetze' zum Thema Wandel in der Mathematik aufgestellt, von denen das zehnte lautet: „Revolutions do never occur in mathematics.". Seiner Ansicht nach ist es notwendige Bedingung für eine Revolution, „that some previously existing entity (...) must be overthrown and irrevocably discarded". Weil dies seines Erachtens aber *in* der Mathematik nicht der Fall ist, gibt es für Crowe auch keine Revolution *in* der Mathematik. Auf der Meta-Ebene jedoch sind mathematische Revolutionen für Crowe durchaus möglich, so etwa im Bereich der Symbolsprache oder in der Methodologie.[7]
Caroline Dunmore hat speziell diesen Aspekt von Crowe noch weiter ausgearbeitet und fasst zusammen: Die Evolution der Mathematik „is conservative on the object-level but revolutionary on the meta-level.".[8]

Die Dauben-Crowe-Kontroverse zeigt, dass die Beantwortung der Frage nach Revolutionen in der Mathematik stark von der Definition von Revolution sowie von individuellen Wertungen abhängt. Crowe und Dauben scheinen sich hinsichtlich der Definition relativ einig zu sein, fordern sie doch beide von einer wissenschaftlichen Revolution, die Wissenschaft in ihrem Kern zu erneuern. Die beiden Wissenschaftshistoriker sind sich mit Blick auf die Wissenschaft Mathematik allerdings uneinig, ob es derartige Umwälzungen dort gegeben hat: Dauben spricht sich dafür aus, Crowe dagegen bestätigt dies nur für die mathematische Meta-Ebene.
In der Geschichte der Mathematik finden wir mindestens *drei Fälle*, die das Potential haben, als Revolution bezeichnet zu werden: Die Entdeckung der negativen und der imaginären Zahlen, die Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie sowie die Entdeckung der Inkommensurabilität. Im Folgenden wird die Entdeckung der Inkommensurabilität kurz dargestellt. Möge der Leser selbst urteilen, ob es sich hierbei um eine Revolution handelt!

Es wird behauptet, dass die Pythagoreer mit der *Entdeckung der Inkommensurabilität* in eine mathematische Grundlagenkrise gestürzt sind. Der Geheimbund der Pythagoreer wurde um 530 v. Chr. vom griechischen Gelehrten Pythagoras in Kroton gegründet.[9] Die Phytagoreer widmeten sich vor allem den Zahlen, der Musik und der Astronomie. Sie entwickelten eine elementare Zahlentheorie. Sie pflegten eine Zahlenmystik und gingen davon aus, dass alles Irdische von der Kraft der Zahlen geprägt sei. Der Ausspruch „Alles ist Zahl." wird ihnen nachgesagt. Die Pythagoreer waren davon überzeugt, dass jede Strecke in Bezug zu einer bestimmten Maßeinheit als Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ausdrückbar ist, also als rationale Zahl. Um 450 v. Chr. entdeckten sie jedoch, dass dies nicht immer der Fall ist. So ist beispielsweise die Länge einer Diagonalen eines Einheitsquadrat nicht rational, sondern beträgt $\sqrt{2}$. Ironischerweise ist selbst das regelmäßige Fünfeck im Symbol der Pythagoreer nicht frei von Inkommensurabilität. Die Entdeckung der Inkommensurabiliät hat die Pythagoreer verstört und ihr Weltbild ins Wanken gebracht. Es besteht sogar die Legende, dass sie ihre Entdeckung geheim halten wollten und der Verräter dieses Geheimnisses seine Tat mit seinem Leben bezahlen musste. Infolge der Entdeckung inkommensurabler

[6] Vgl. Gillies (1995), S. 49–82, insbesondere S. 64.
[7] Vgl. Gillies (1995), S. 15–20, insbesondere S. 19.
[8] Vgl. Gillies (1995), S. 209–225, insbesondere S. 223.
[9] Vgl. hier und im Folgenden Bedürftig; Murawski (2010), S. 28ff.

Strecken änderte sich die Sicht auf Zahlen. Die Annahme, es gäbe nur rationale Zahlen, wurde verdrängt. Irrationale Zahlen wurden plötzlich ‚gesehen‘ und akzeptiert.

Handelt es sich hier nun um eine mathematische Revolution? Dauben würde diese Frage sicherlich bejahen, da die Entdeckung der Inkommensurabilität den damaligen Mathematikern eine völlig neue Sicht auf ihre Wissenschaft gegeben hat. Doch handelt es sich auch um eine Revolution im Crowe'schen Sinne? Schließlich *erweitern* die irrationalen Zahlen lediglich den Zahlbereich. Es werden nicht vorher existierende mathematische Gegenstände verworfen, wie es Crowe für Revolutionen *in* der Mathematik fordert. Allerdings verwerfen die Pythagoreer ihre bisher wesentliche Annahme, es gäbe nur rationale Zahlen. Das Verwerfen dieser Ausschließlichkeitsannahme zugunsten eines weiter gefassten Zahlenbegriffs kann durchaus als Revolution auf der mathematischen Meta-Ebene im Crowe'schen Sinne gewertet werden.

Schlussbetrachtungen

Revolution oder Evolution: Was prägt die Wissenschaft Mathematik? – Der vorliegende Beitrag hat hoffentlich den Leser angeregt, sich hierzu eine eigene Meinung zu bilden. Abschließend geklärt werden wird diese Frage wohl nie. Dennoch kann es sich lohnen, sich mit ihr auseinanderzusetzen. Denn dabei erfahren wir mehr über den Charakter der Mathematik und unser Verhältnis zu ihr.
Ist es nicht vielleicht so, dass wir selbst durch unser Studium der Mathematik – in der Schule oder in der Uni – bereits verblendet worden sind? Die meisten von uns werden z.B. gelernt haben, dass $0,999\ldots$ gleich 1 ist, doch sagt uns unsere Intuition nicht etwas anderes? Wieso unterdrücken wir hier unsere Zweifel und passen uns der Mainstream-Mathematik an? Bei vielen Menschen treffen hier sicherlich zwei Gründe zu. Zum einen das Vertrauen darauf, dass die gelehrte Mathematik, die sich schon so lange in vielerlei Hinsicht bewährt hat, so ihre Richtigkeit hat. Zum anderen eine Art Gleichgültigkeit: Mit solchen Grundsatzfragen sollen sich die großen Mathematiker beschäftigen. Hoffentlich gibt es diese, wenn die Mathematik wieder einmal in eine Krise gerät. Bis dahin werden sicherlich noch einige Romseminare stattfinden, bei denen ähnliche und andere mathematisch-philosophische Fragen diskutiert werden.

Literatur

[BM10] Bedürftig, T., Murawski, R., *Philosophie der Mathematik*, de Gruyter, Berlin (u.a.), 2010.

[BP49] Bruner, J. S., Postman, L., *On the Perception of Incongruity: A Paradigm*, Journal of Personality, XVIII, S. 206–223, 1949.

[Gil95] Gillies, D. (Hrsg.), *Revolutions in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[Kuh12] Kuhn, T. S., *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen*, 23. Auflage, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 2012.

[Orm12] Ormrod, J. E., *Essentials of Educational Psychology. Big Ideas to Guide Effective Teaching*, Pearson Education Inc., Boston, MA, 2012.

KUNST-fehler

—

- Fehler oder Absicht in der Malerei -

Claudia Bergmann

KUNST-fehler
- Fehler oder Absicht in der Malerei -

Abbildung 1: Grabkammer des Menna

Fehler, Irrtümer und Widersprüche in der Kunst? ALLES eine Frage der Definition oder der Betrachtung! Für Plinius d. Ä. (1.Jh.) war die Natur das Maß, mit dem er die Kunst und die Künstler in seiner Naturalis Historia verglich.

Abbildung 2: Christus übergibt Petrus den Schlüssel

Die naturtreue Abbildung eines Motivs gelang mit Entdeckung der Perspektiven, sowie Beherrschung von Licht, Schatten, Farben, ...

Aber was dann?

Sind die Steigerungsmöglichkeiten ausgeschöpft, wenn man die scheinbare Perfektion erreicht hat? Fehler sind also hier das Nicht-erreichen der Perfektion der Natur

Abbildung 3: Femme au Chapeau dans un fauteuil

Johann Georg Sulzers (18. Jh.) gibt uns einen anderen Ansatz, Fehler in der Kunst zu definieren. In seiner Allgemeiner Theorie der Schönen Künste sieht er Fehler in Werken nur dann, wenn der Zweck, den sich der Künstler gesetzt hat, verfehlt wird.

Zwischen den Werken der alten Ägypter, von Leonardo da Vinci, Jan Vermeer, Derain oder Picasso gibt es viele offensichtliche Unterschiede. Die Künstler verfügten über verschiedene Kenntnisse und ihre Werke verfolgen unterschiedliche Ziele. Und je nach Definition der NORM bzw. der Abweichung von dieser, können wir Fehler in den Werken erkennen - oder eben Absicht.

Abbildung 4: Kühe

„KUNST-fehler“ ist für mich ein Beispiel, dass man die Definition, was genau ein Fehler ist, nicht immer so streng abgrenzen kann oder sie eben gerade eine Definitionsfrage und Ansichtssache bleibt – Ganz im Auge des Betrachters, genau wie die Kunst selbst!

[Claudia Bergmann, 2013]

Rom - einmal hin und dann ...
HIN & WEG

Das Romseminar war eine tolle Abwechslung, nicht nur vom grau-weißen Winterwetter in Deutschland und vom Alltag, der einen viel zu schnell wieder ein hatte ... Sondern auch in sich eine spannungs- und abwechslungsreiche Woche: Das Spektrum der Vorträge, die Vortragsarten, die Führungen, Gespräche, Eis-, Pizza- & Pastasorten... ach, Ihr wart doch auch da, wozu also schwärmen ;-) Dass es die sogenannten „Wiederholungstäter“ beim Seminar gibt, ist verständlich und wenn sich die Möglichkeit nochmal bietet ... man sieht sich bekanntlich immer 2x!

„Natur ist überall, in uns und außer uns;
es gibt nur etwas, das nicht ganz Natur ist,
sondern vielmehr ihre Überwindung und Deutung: die Kunst.“
Franz Marc

„Wir wissen alle, daß Kunst nicht Wahrheit ist.
Kunst ist eine Lüge, die uns die Wahrheit begreifen lehrt,
wenigstens die Wahrheit, die wir als Menschen begreifen können.
Der Künstler muß wissen, auf welche Art er die anderen von der
Wahrhaftigkeit seiner Lügen überzeugen kann.“
Pablo Picasso

„Des Künstlers Gefühl ist sein Gesetz.“
„Der Maler soll nicht bloß malen, was er vor sich sieht,
sondern auch was er in sich sieht...“
Caspar David Friedrich