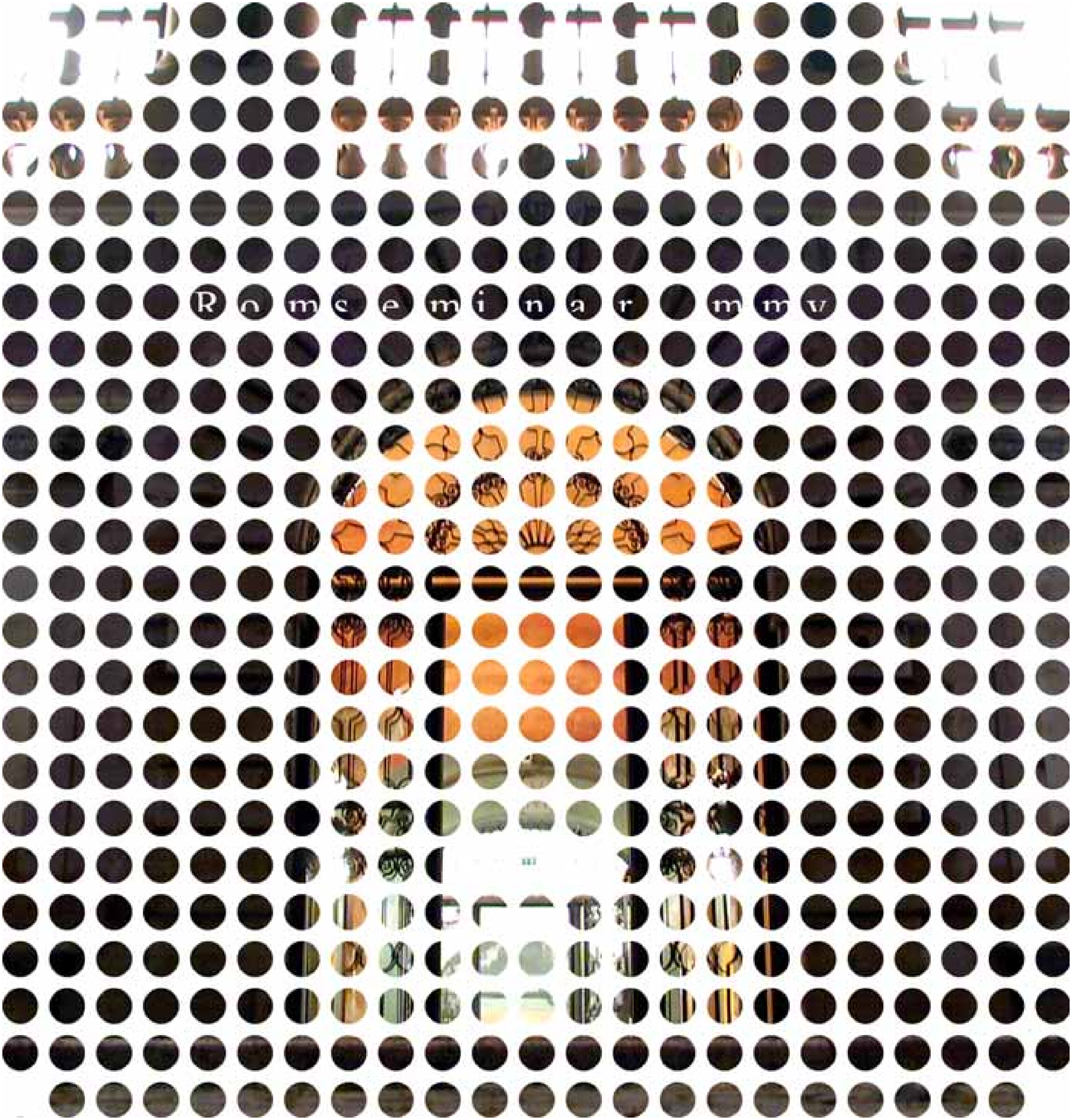

Romseminar mmv

Nickel, Gregor; Pahl, Marc-Oliver (Herausgeber)
Mathesis und die Musen: Mathematik in der Kunst — Kunst in der Mathematik
Das Buch zum Romseminar 2005
Tübingen 2005

Mathematisches Institut
Auf der Morgenstelle 10
72072 Tübingen

1. Auflage 2005

Umschlaggestaltung und Layout: Marc-Oliver Pahl
Fotos: Marc-Oliver Pahl
Druck und Verarbeitung: Eigendruck der AGFA

Das im Titel verwendete Foto zeigt das Eingangstor zur Villa Massimo bei Nacht.

Romseminar mmv

Mathesis und die Musen

Mathematik in der Kunst — Kunst in der Mathematik

Gregor Nickel, Marc-Oliver Pahl

Die Muster des Mathematikers müssen, wie die des Malers oder Dichters,
vor allem schön sein; die Ideen müssen sich, wie die Farben oder die Wörter,
harmonisch zusammenfügen. Schönheit ist das allererste Kriterium.
Auf der Welt ist kein dauerhafter Platz für eine hässliche Mathematik.

Godfrey Harold Hardy (1877-1947)

Romseminar mmv

Mathesis und die Musen

Vorwort

Nach einer ebenso beeindruckenden wie begeisternden Führung durch die Deutsche Kunst-Akademie **Villa Massimo** im Rahmen des Romseminars 2004 stand das Thema für das *neue* Romseminar fest:

„Mathematik in der Kunst — Kunst in der Mathematik“.

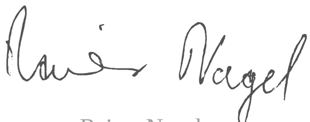
Es war dann ein ganz besonderes Privileg, dass der größte Teil des Seminarprogramms — dem Thema entsprechend — in den Räumen der Villa Massimo stattfinden konnte. Gewünscht, wenn auch nicht erwartet war eine Beteiligung der Stipendiaten der Akademie: Bildende Künstler, Musiker, Literaten. Überraschend und überaus faszinierend war es dann, dass sich mehrere intensive Begegnungen ergaben, bis hin zu den spontanen Beiträgen des Komponisten Rudi Spring für das Seminarprogramm.

Der vorliegende Band enthält die schriftliche Ausarbeitung der Vorträge des Romseminars 2005 und repräsentiert so die Vielfalt der Themen. Eingeleitet wird er durch einen Artikel von Prof. Karl H. Hofmann (Darmstadt), der zusammen mit seiner Frau Isolde als Gast und anregender Diskussionspartner teilgenommen hat. Die Beiträge der ersten beiden Sektionen widmen sich dem Zusammenspiel von Mathematik und verschiedenen Bereichen der bildenden Kunst, speziell dem künstlerischen Einsatz des Computers. Eine durch die Kochsche Schneeflockenkurve angeregte Komposition von Rudi Spring markiert den Übergang zur dritten Sektion: Mathematik und Musik. Es folgt die vierte Sektion, in der „große Fragen“ gestellt werden dürfen, wenn auch nicht beantwortet werden müssen; die philosophische Reflexion ist stets *ein* Anliegen der Romseminare, und so war sie auch dieses Mal als gemeinsame Sprache für eine Verhältnisbestimmung von Mathematik und Kunst hilfreich. Nicht nur *ein* Gang durch die Ewige Stadt mit offenen Augen gehört zu jedem Romseminar, die letzte Sektion gibt davon einen Eindruck. Ein wichtiger Beitrag zum Seminarprogramm lässt sich allerdings in gedruckter Form nicht reproduzieren; die szenische und musikalische Kollage $\mathbb{Q}\mathbb{N}\int\mathbb{T}$ bleibt sicherlich für alle Teilnehmer in lebhafter Erinnerung und soll — als Zwischenspiel in diesem Band — wenigstens durch das gedruckte Programm, einen Beckettschen Monolog und einige photographische Impressionen repräsentiert werden.

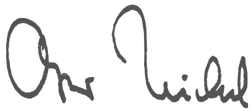
Ein solches Romseminar wäre nicht möglich ohne die uneigennützige Hilfe vieler Freunde in Rom.

An erster Stelle gilt ein ganz besonderer Dank dem Direktor der Villa Massimo, Herrn Dr. Joachim Blüher, der durch seine Gastfreundschaft diesem Romseminar seine spezielle, künstlerische Prägung gegeben hat. Die überaus herzliche Aufnahme durch ihn und das Team in der Villa Massimo — angefangen mit Begrüßungsvortrag und Rundgang sowie anschließendem Buffet bis hin zur bereitwilligen Hilfe bei allerhand technischen Bedürfnissen — waren einzigartig.

Danken möchten wir auch Professor Elmar Salmann für einen fulminanten Vortrag zum Thema „Barock als Alchemistenküche der Moderne“ sowie Prälat Dr. Max-Eugen Kemper für eine eindrucksvolle Führung in die päpstliche Kapelle *Sancta Sanctorum*. Herrn Oliver Lahl danken wir für organisatorische Unterstützung in Vatikanischen Angelegenheiten und der Accademia dei Lincei für die prachtvollen Räumlichkeiten bei der Eröffnungs- und Abschlußsitzung. Für die finanzielle Unterstützung danken wir schließlich dem Universitätsbund in Tübingen sowie dem ,,accordo culturale“ zwischen der Università di Roma und der Università Tübingen.



Rainer Nagel



Gregor Nickel

Inhalt

Karl H. Hofmann

Kann man die von Kochsche Kurve hören? — Chronik einer Romreise

Helge von Koch hat die Konstruktion der nach ihm benannten Kurve 1906 in die Literatur eingeführt [4]. Seine Arbeit erschien in jenen Acta Mathematica, die 1882 von Mittag-Leffler gegründet worden waren und die noch heute jedes Jahr unter den ersten zehn der Zeitschriften in der ISI-Liste aufgeführt werden.

Une méthode géométrique élémentaire. 149

struisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE. Nous aurons une ligne brisée $ACDEB$ formée par 4 segments égaux. Pour fixer le côté vers lequel doit être tourné le triangle, nous conviendrons de regarder une direction (par exemple celle de A vers B) comme positive et de considérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

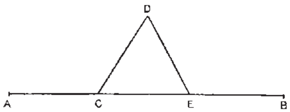


Fig. 1.

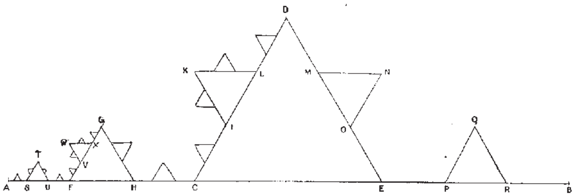


Fig. 2.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Die von Kochsche Kurve ist eines der frühen Beispiele einer stetigen Kurve in der Ebene ohne Tangenten; denjenigen unter uns, die noch die einmal sehr verbreiteten Lehrbücher von von Mangoldt und Knopp [5] zu ihren Anfängervorlesungen gelesen haben, erinnern sich vielleicht, dass sie bald in die didaktische Literatur des Hochschulunterrichts eingegangen war (S. 417ff.). Neue Berühmtheit erlangte diese Kurve mit dem Einzug der Fraktale in die populäre und die technische Literatur der Mathematiker und Informatiker. Aber was soll die Frage im Titel? Das Organ für eine sinnliche Wahrnehmung einer Kurve ist das Auge, keinesfalls aber das Ohr. Indessen, den Ärger über eine absurde Titelfrage werden Mathematiker vielleicht unterdrücken. Sie erinnern sich nämlich daran, dass Marc Kac einmal die Frage aufwarf, ob man den Umriss einer Trommel hören könne [2]; für seinen Artikel erhielt er dann auch im Jahre 1968 den begehrten *Chauvenet* Preis der Mathematical Association of America. Die Spektraltheorie erlaubte es, zu dieser Frage vernünftige Aussagen zu machen. So wird man vorsichtig. Vielleicht gibt es doch jemand, der selbst die von Kochsche Kurve hörbar machen kann?

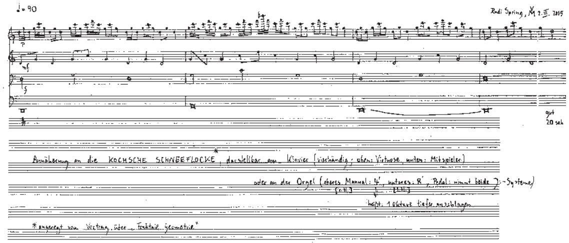
Was die Villa Massimo möglich macht

Gestiftet im Jahre 1910 von dem jüdischen Mäzen Eduard Arnhold (1849–1925) ist die Accademia Tedesca *Villa*

Eingangstor der Villa Massimo.

Massimo, Roma, eine der deutschen Akademien in Rom, ein Ruhepol für Stipendiaten aus den Bereichen der bildenden Künste, der Architektur, der Musik und der Literatur, die in einem jährlichen Zyklus in den schon bei der Gründung erbauten, architektonisch richtungweisend gestalteten Studios frei und ohne irgendwelche Zwänge ihre selbstgewählten Projekte verfolgen. Beredt und begeistert schildert der Direktor der Akademie, der Kunsthistoriker Dr. Joachim Blüher, die Geschichte der Villa und seine Strategien für das Institut. Er empfängt am 1. März 2005 eine Gruppe von sozusagen ,,irregulären“ Besuchern:

Mathematiker—Studenten und Hochschullehrer der Universität Tübingen, die, unter der Leitung von Professor Dr. Rainer Nagel und Privatdozent Dr. Gregor Nickel als Gäste der Akademie das mittlerweile traditionelle Romseminar an der Villa Massimo abhalten dürfen. Das Projekt des diesjährigen Seminars, ,,Mathematik in der Kunst—Kunst in der Mathematik“, hatte Blüher so überzeugt, dass er die Vortrags- und Präsentationsräumlichkeiten der Villa eine Woche lang dem *Romseminar* zur Verfügung stellte. Der Empfang am ersten Nachmittag vermittelt sofort einen Eindruck vom Funktionieren der Villa Massimo. Die Tübinger Mathematiker treffen einige der zehn diesjährigen Stipendiaten, die gerade ihren ersten Monat an der Akademie verbracht haben; daneben aber erlebt man auch unverstellt ein Alltagsereignis, das in seiner ungezwungenen Informalität zur Normalität zu gehören scheint: Einen Blitzbesuch des Vizepräsidenten des Deutschen Bundestags, Dr. Norbert Lammert (CDU), der nicht nur vorbeikam, der Akademie seine Aufwartung zu machen, sondern der sogleich als ausgewiesener Bildungsexperte mit dem Tübinger Seminar (freilich nicht ganz unprovoziert) in voller Bandbreite in Diskussionen verwickelt ist: Von den gegenwärtigen Problemen der deutschen Hochschule bis zur Frage, ob für das Romseminar Seminarscheine ausgestellt werden sollten.

Einer der Stipendiaten der Villa Massimo, der 1962 in Lindau geborene Komponist Rudi Spring, war so fasziniert von der Gegenwart der Mathematiker, dass er in den folgenden Tagen bei fast allen Seminarvorträgen zugegen war. Besonders aber interessierte ihn ein Seminarvortrag von Martin Schuster: ,,Kunst auf Knopfdruck?—Fraktale Kunst“, in welchem die von Kochsche Kurve vorgestellt wurde. Schon in einer der nachfolgenden Abendsitzungen des Seminars meldete er sich zu Wort und trug eine zu jenem Zeitpunkt etwa 20, durch sofortige Wiederholung 40 Sekunden dauernde Komposition am Konzertfügel der Villa Massimo vor, vierhändig, begleitet von Benjamin Löw. Nach Springs einleitenden Worten konnte man die von Kochsche Kurve in Musik hören:

Die Grundstruktur und die nachfolgenden Iterationsschritte (siehe Abbildung 1) sind im mehrstimmigen Satz musikalisch wahrnehmbar gemacht; der Komponist vermittelte dabei dem Hörer einen Eindruck davon, welche Arbeit allein schon in eine kaum eine Minute dauernden Komposition eingeht. Die Öffentlichkeit wird allerdings auf eine Uraufführung einer ausgebauten Komposition noch ein Weilchen warten müssen.

Rudi Spring, Villa Massimo, 2.3.2005.

Das Tübinger Romseminar

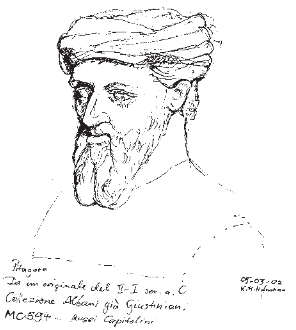
An der Universität Tübingen steht das Romseminar ganz in einer langen Tradition des Studium Generale. Alte Tübinger erinnern sich an den Dies Academicus am Donnerstag; meistens nahm uns das Audimax in der Neuen Aula auf, aber oft musste man schon rechtzeitig kommen, um nicht auf den Stufen hokken zu müssen, wenn Eduard Spranger, Wolfgang Schadewaldt, Helmut Thielecke oder Walter Jens vortrugen. In einem viel diskreteren und kleineren Format wird seit zehn Jahren von Rainer Nagel, einem der prominentesten Schüler Helmut Schaefers, und von Nagels Schüler Gregor Nickel in der Arbeitsgemeinschaft Funktionalanalysis des mathematischen Instituts ein Seminar angeboten, für das es keinen prüfungsrelevanten Seminarschein gibt. Dennoch finden sich jedes Jahr begeisterte Studenten aus allen Fakultäten, die sich mit Feuereifer auf das jeweils gestellte interdisziplinäre Rahmenthema des Seminars stürzen und sich konzentriert auf ihren Beitrag vorbereiten, der dann beim Seminar in Rom vorgetragen wird.

Dieses Jahr (2005) geht es um die Beziehung zwischen Mathematik und Kunst. Die tiefere Ergründung eines solchen Zusammenhangs ist sicher eine Herausforderung; aber dieses Seminar hat sie angenommen und spürte dem Thema in vielen Richtungen nach. Nagels hervorragende Mitarbeiter, allen voran Dr. Gregor Nickel, den man schon seiner Diktion nach als den Typus des „geisteswissenschaftlichen" Mathematikers erkennt, sorgen für die intellektuelle Disziplin in der inhomogenen Gruppe und wehren die Gefahr ab, dass ein so heikles Projekt aus dem Ruder laufen könnte. So aber hielten sich Seminarvorträge zur bildenden Kunst, Musik, Architektur, Philosophie, Mathematik die Wage, wie man aus dem diesjährigen Rombuch [6] (und der einschlägigen Webseite) entnehmen wird, wo auch reichhaltiges Bildmaterial zur Verfügung steht. Rainer Nagel, dessen langjährige Kontakte in Rom vom vormaligen Direktor der Accademia Nazionale dei Lincei, Edoardo Vesentini (einem Funktionalanalytiker der Nagelschen Färbung [1]), über den Direktor der Villa Massimo und Kollegen der Universitá „La Sapienza" bis zu den Kneipenwirten in der Altstadt von Rom reichen, machte es möglich, dass das Seminar in den ehrwürdigen Räumen der Accademia dei Lincei im Palazzo Corsini in Trastevere mit Vorträgen zur Perspektive, zur bildlichen Erfassung vierdimensionaler Objekte und einer mathematischen Diskussion eines graphischen Blattes von Maurits Cornelis Escher eröffnet wurde. Es war eine bemerkenswerte Fügung, dass just zur Zeit des Seminars in den Musei Capitolini die Sonderausstellung „Nell'occhio di Escher", eine Retrospektive über das Gesamtwerk Eschers gezeigt wurde [7]. Das erlaubte selbst Escherskeptikern unter Mathematikern, zu denen der Schreiber dieser Zeilen zu rechnen ist, die Chance wahrzunehmen, sein graphisches Œuvre, in einem hochrangigen Kunstmuseum ausgestellt, gelassen zu betrachten. Sie lernten dabei, dass Escher in den Jahren 1922-1938, zwischen den Kriegen, in Rom lebte und beachtliche Serien realistisch gesehener römischer Veduten und Notturne in Holzschnitten und Holzstichen schuf und seine Wanderungen in der italienischen Landschaft in Zeichnungen und Lithographien festhielt. Freilich sind die stilistischen Anknüpfungspunkte dieser mit außergewöhnlicher handwerklicher Akribie gefertigten Blätter eher im technisch hochentwickelten Buchholzschnitt des 19. Jahrhunderts zu sehen, während Escher sich der genialen Entfaltung des expressionistischen Holzschnittes, für die „die Brücke" repräsentativ ist, völlig zu verschließen schien.

Die römische Ausstellung zeigte aber auch ebenso die zunehmend surrealistischer werdenden Graphiken der Nachkriegszeit, welche die Mathematiker so schätzen; darunter befand sich auch das Blatt „Prentententoonstelling" (1956), welches im Seminarvortrag von Ning Ning Jiang analysiert wurde. Die mit Hilfe einer konformen (natürlich nicht singularitätenfreien) Abbildung des 2-Torus technisch perfekt durchkomponierte Lithographie bewirkt einen Ausdruck der bei Escher so beliebten Selbstreferenz, dem man letztlich eine künstlerische Überhöhung nicht absprechen sollte. Das Zusammentreffen der

Ausstellung mit der Thematisierung von Eschers Werk im Seminar war höchstwillkommen. In der Villa Corsini stieß man auf eine Ausstellung der Zeichnungen Leonardos, z.B. mit dem Blatt, auf dem er sich mit der Quadratur des Kreises herumschlägt. Man konnte sich nicht des Eindrucks erwehren, Nagel und Nickel hätten auch die Ausstellungen organisiert. Aber beide bestreiten dies vehement.

Besonders ehrgeizig waren Vorträge, die zu beantworten suchten, was ohne Scheu in den Fragen formuliert wurde: „Was ist Kunst?“ (Bouchra Oualla-Weimer), „Was ist Mathematik?“ (Dr. Markus Haase); es sei dem Chronisten erlaubt, die Antworten hier nicht zu verraten, sondern dafür auf das „Rombuch 2005" [6] zu verweisen, welches auf Inhalte im Einzelnen eingehen wird.



Faszinierende hochrangige Exkursionen und Vorträge, beschauliche Lesungen, fulminante Spektakel

Profund bereichert wurde das Seminar durch einige besondere Veranstaltungen, die man offenbar wieder den Verbindungen Rainer Nagels und Gregor Nickels in Rom verdankte.

Prälat Prof. Dr. Max-Eugen Kemper, Geistlicher Botschaftsrat an der Botschaft am Heiligen Stuhl der Bundesrepublik Deutschland iR (verabschiedet am 21.6.03 nach 14–jähriger Dienstzeit, Professur für Didaktik und christliche Kunst in Fulda) führte das Seminar auf einer kunsthistorischen Exkursion in die Papstkapelle Sancta Santorum bei S. Giovanni in Laterano und hielt an Ort und Stelle eine Vorlesung über deren Geschichte im Rahmen des römischen Papsttums, ihre Bedeutung als Wallfahrtsort für die Gläubigen, und in Sonderheit über die zum heiligen Jahr 2000 glänzend restaurierten romanischen Fresken der Cavallini-Schule von ca. 1270 in der Kapelle über der berühmten Scala Santa. Die Restauration und Reinigung der Fresken gab schon Anlass zu anhaltenden Diskussionen der Experten, wie nun die römische Freskomalerei des ausgehenden 13. Jahrhunderts und ihr Einfluss auf Giotto und die Arenakapelle in Padua neu zu bewerten seien.

Professor Dr. Elmar Salmann OSB (Professor für Philosophie und Dogmatik an der Päpstlichen Hochschule Sant’Anselmo und an der Päpstlichen Universität Gregoriana) hielt in der Villa Massimo einen rhetorisch wie inhaltlich mitreißenden Vortrag über den Barock „als die Alchimistenküche der Moderne“.

Darin öffnete er den Tübingern die Augen für Rom als die Stadt des Barock, in welcher noch Goethe Barockes achtlos links liegen ließ, um sich an der Antike zu „ergetzen“. Salmann hält zur Zeit eine Vorlesung über die Philosophie des Barock und schöpfte so aus dem Vollen. Er interpretierte den Barock als „Turnübung der künftigen Aufklärung und Romantik“ und zeigte, wie die Stilgebärden unter den postmodernen Medienbedingungen und ihre Allüren direkt im Barock wurzeln. In diesem Sinne vermochte er moderne Medienpolitiker, allen voran Berlusconi, als im Grunde barocke Erscheinungen auszumachen und sah sogar den Papst und seine Biographie als ein barockes Phänomen. Letztlich war der Vortrag selbst ein barocker Gestus; im Seminar konnte man das verstehen, wenn man wollte, denn die Selbstreferenz in Literatur und Kunst war in einem Seminarvortrag zuvor thematisiert worden (Martin Rathgeb).

Die Seminarteilnehmer waren untergebracht im Gästehaus des Istituto Il Rosario (Provincia Italiana delle Suore Carita Domenica della Presentazione), von den Seminaristen kurz „das Kloster“ genannt. In die Mitte der Woche setzte Dr. Gregor Nickel eine Literaturlesung, die „im Kloster“ stattfand und in der das prekäre Dreiecksverhältnis von Mathematik, Theologie und Musik im Mittelpunkt stand. Aus Hermann Hesses Glasperlenspiel las er, was uns Hesse über das Spiel zu erläutern bereit war. Einen gewagten, aber schließlich gelungenen Querschnitt legte er durch Thomas Manns Roman Doktor Faustus, und zuletzt las Dr. Markus Haase einen ganz erstaunlich modern anmutenden Essay von Robert Musil über Mathematik und Dichtung. So kam in dem Seminar über Mathematik und Kunst auch die Literatur zu Wort, in welcher die Spuren der Mathematik von denjenigen zu finden sind, die sie dort suchen.

Mathematik und das Theater: Nicht einmal diese Verknüpfung hat das Tübinger Romseminar vergessen. Am vorletzten Abend wurde in der Villa Massimo das Spektakel „$\mathbb{Q}\mathbb{N}\int\mathbb{T}$ — Mathesis und die Musen“ aufgeführt. Der Prolog war eine derart komprimierte 5-Minuten Vorlesung eines soliden Satzes über positive Operatoren und kompakte abelsche Gruppen auf einer Tafel der Größe eines Quadratmeters, aus der Kreide des Meisters selbst, dass den jüngeren Semestern das Hören und Sehen verging; der Chronist verbürgt sich dafür, dass alles Hand und Fuß hatte, und vertraute Erinnerungen stiegen auf. Das freilich war Mathematik pur! Gleich danach wurde Platons Dialog zwischen Menon und Sokrates in Szene gesetzt, jener Dialog, in welchem Sokrates zeigt, dass im Geiste des unerfahrensten Sklaven schon vorangelegt das Wissen schlummert, wie man ein Quadrat verdoppelt: Man muss nur verstehen, dieses Wissen zu wecken. Und dann ein großer Sprung von der Klassik zum modernen surrealistischen Theater von Samuel Beckett. Der Kurzeinakter von den sechzehn Taschen wurde von Stefano Cardanobile, einem italienischen Teilnehmer des Seminars virtuos dargeboten, bereichert durch eingeschobene blitzschnelle Zusammenfassungen in italienischer Sprache. Das war, irgendwie, umwerfend! Nach der Pause folgte das Pièce de Résistance des Abends, eine computer-assistierte multimediale Collage unter dem Titel impulsi ed impressioni—ein Spaziergang zwischen Musik und Mathematik, pendelnd, wie das Programm es andeutet, zwischen Intuition, Formalisierung, Struktur, Kreativität und Reproduzierbarkeit. Das allein wäre schon eine komplette Seminarleistung des Teams gewesen. Die Seminarleiter waren von dieser Darbietung selbst überrascht worden, denn sie war von den Seminaristen unter der Federführung von Thomas Schröder insgeheim in ausdauernder Gruppenarbeit erstellt worden.

Bildungsreise

Am Konzept der Veranstalter Nickel und Nagel, als Mathematiker den Tübinger Studenten im Bereich interdisziplinärer Studien ein außergewöhnliches pädagogisches Angebot zu machen, stimmt wirklich alles. Ihr Romseminar nützt den genius loci dieser Stadt um Studierende aller Fakultäten zur Kreativität und eigenständiger Arbeit so anzuregen, dass jeder Teilnehmer seine spezifischen Talente und Interessen mit Begeisterung einsetzt, sei es durch musikalische Darbietungen von professioneller Kompetenz, sei es durch Unterweisung im Naturzeichnen (Heino Hellwig). Das manifestierte sich in dieser Reise nach Rom in so vielfältiger Weise, dass sich hier ein erschöpfender Bericht von selbst verbietet. Aber wie kommt der Chronist überhaupt dazu, über diese außergewöhnliche Bildungsreise im gegenwärtigen akademischen Raum etwas mitteilen zu können? Er und seine Leser verdanken dies einer ebenfalls zur Tradition gewordenen Praxis, je nach der Themenwahl des jeweiligen Seminars Gäste zu laden. Zugegen waren diesmal, neben mehreren von Nagels Schülern und Kollegen, die heute in Italien tätig sind, Peter Herfort, der längere Zeit in Tübingen am Institut für Fernstudien arbeitete, heute in Rom lebt und der sich in seinen Veröffentlichungen [2] sachkundig zu Themen des diesjährigen Themas geäußert hat, sowie der Berichterstatter; er verdankt die Einladung wohl nicht nur seiner akademischen Herkunft von der alma mater Tubingensis sondern vermutlich auch seinem Bestreben, als Mathematiker die bildenen Künste im Auge zu behalten, und als Grafiker die Mathematik.

...vinum sit appositum...

Wie es sich für fahrende Scholaren gehört, hat das Romseminar seine Stammkneipe. Sie ist in einem Kellergewölbe der Altstadt Roms nahe dem Campo dei Fiori versteckt, im Lucifero, in einem kleinen Gässchen, der Via dei capellari. Hier saßen sie am Abend des Abschiednehmens zusammen, sangen zu Tische, tafelten und diskutierten. Der Komponist Rudi Spring aus der Villa Massimo saß mitten unter den Tübinger Seminaristen, diskutierte am lebhaftesten und freute sich über das Buch „Was ist Mathematik“, das man ihm, mit Widmung, schenkte. Während er gerade über moderne Kompositionstechniken und über das Verhältnis des kreativen Komponierens und dem Computer dozierte, kritzelte er einige Zeilen auf einen Fetzen Papier, stand auf und verkündete den Zechern, sie hätten ihm die von Kochsche Kurve gegeben, er hätte sich mit seiner Komposition revanchiert, nun hätte man ihn mit einem Geschenk erfreut, wodurch offensichtlich ein Ungleichgewicht entstanden sei, das er nun mit folgenden, in Hexametern schwingenden Versen auszugleichen hoffe:

Mathematik, du unbegreifliche unter den Künsten,
wollest an mir exemplifizieren, wie aus Gedünsten
formelgedämpft nur neues Nicht-Wissen, nur neues Nicht-Können
wächst, doch läss't umso tiefer mich fühlen, läss't stetiger brennen
seliges Sehnen nach Schau, woher die tief 'ren Gesetze
stammen. Stammelnd versammeln sich meine staunenden Sinne,
allzeit bereit, als tumber Tor zu folgen der Minne.–
Uralt sprudeln die Quellen Euch, den Tübinger Weisen!
So schickt ihr mich fortan auf Geistes neueste Reisen.
Habt Dank!

Sprach‘s, setzte sich und fuhr fort im Symposiom.

Seine neueste Arbeit heißt Canto sopra un' idea frattale, möglich und notwendig geworden durch eben jenen „fraktalen Impuls“; eine freiwillige Dreingabe zu einem schon abgeschlossenen Auftrag der Hypobank Bregenz für Fagott und Orgel, in derselben Besetzung, mit demselben vorgesehenen Uraufführungsdatum vom 28. April 2005 im Radiokulturhaus Wien, live übertragen vom österreichischen Rundfunk: Dem Orgelpart liegt als—freilich erweiterte und musikalisch ausdifferenzierte—Grundstruktur jene aus Abbildung 4 bekannte Umsetzung der von Kochschen Kurve zu Grunde, das Fagott erhebt darüber seinen ,,Canto“. Die Länge freilich ist auf drei Minuten angewachsen.

Literatur

1. Engel, Klaus-Jochen, and Rainer Nagel et al, One Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations, Springer-Verlag Berlin usw., 2000, xxi+586pp.
2. Herfort, Peter, and Arnd Klotz, Ornamente und Fraktale—Visualisierung von Symmetrie und Selbstähnlichkeit, Vieweg, Wiesbaden, 1997, xii+273 S.
3. Kac, Marc, Can one hear the shape of a drum? American Mathematical Monthly (1966), 1-23
4. von Koch, Helge, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, Acta mathematica (1906), 145–174
5. Knopp, Konrad, H. v. Mangoldt's Einführung in die höhere Mathematik, II, S. Hirzel Verlag, Leipzig, 1951 [9], xv+634 S. [1]
   ([1]Am Ende des Sommersemesters 1952 wurden Ulrich Dieter, heute Emeritus in Graz, und der Schreiber dieser Zeilen zu Konrad Knopp in seine Wohnung auf dem Apfelberg in Tübingen geladen, um ein handsigniertes Exemplar des Buches von ihm zu empfangen, für gute Noten in den Anfängerübungen, wie es hiess. Das signierte und vergilbte Examplar zählt noch heute zu des Autors geschätzten Sammlerstücken.)
6. Gregor Nickel und Marc-Oliver Pahl, Rombuch 2005: Mathematik in der Kunst—Kunst in der Mathematik, Universität Tübingen, 2005, http://www.fa.uni-tuebingen.de/extern/RomSem/2005/
7. Pirani, Federica, e Bert Treffers, Nell occhio di Escher, L' Espresso, Roma, 2004, 159 pp.

Eine gekürzte Fassung dieses Artikels erscheint in Heft 3 des Bandes 13 (2005) der Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung.

Das Programm in Rom

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

- 1 -

Prof. Dr. Rainer Nagel, PD Dr. Gregor Nickel

Romseminar 2005

Mathesis und die Musen

Mathematik in der Kunst — Kunst in der Mathematik

Accademia dei Lincei und Villa Massimo ROMA

28. Februar bis 6. März 2005

Die Muster des Mathematikers müssen, wie die des Malers oder Dichters, vor allem schön sein; die Ideen müssen sich, wie die Farben oder die Wörter, harmonisch zusammenfügen. Schönheit ist das allererste Kriterium. Auf der Welt ist kein dauerhafter Platz für eine häßliche Mathematik.

GODFREY HAROLD HARDY (1877-1947)

Programm

Sonntag, 27. Februar 2005

Ankunft in Rom, Bezug der Unterkunft

Montag, 28. Februar 2005 — Accademia dei Lincei

9^{00} **Florian Schwerteck:** *Die Wurzeln des projektiven Raumes in der Renaissance.*

10^{00} **Ning Ning Jiang:** *Verborgene Mathematik in Maurits Cornelis Eschers "Prententententoonstelling".*

11^{00} **Pau Carrió Gaspar:** *Mehr als Dimensionen.*

12^{00} **Johannes Nübler, Cordian Riener:** *Symmetrie mit V.*

19^{00} Cena da 'Baffetto', Via del Governo Vecchio.

Dienstag, 1. März 2005

10^{00} **Prälat Dr. Max-Eugen Kemper:**
Die Papstkapelle Sancta Sanctorum bei S. Giovanni in Laterano.
Treffpunkt: Portal S. Giovanni in Laterano.

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

14^{00} **Dr. Joachim Blüher:**
Die Deutsche Akademie Villa Massimo.

16^{30} **Benjamin Löw, Johannes Ruess:** *Johann Sebastian Bach — Mathematiker oder Künstler?*

Mittwoch, 2. März 2005 — Villa Massimo

9^{30} **Martin Schuster:** *Kunst auf Knopfdruck? — Fraktale Kunst.*

10^{30} **Rudi Spring:** *Spiegel in der Musik.*

10^{40} **Michael Rottmann:** *Künstlerische Computergraphik.*

11^{40} **Martin Rathgeb:** *Beispiele für Selbstbezüglichkeit in Literatur und Kunst — Viel Lärm um nichts?*

19^{00} **Gregor Nickel:** *Harmonische Glasperlenspiele — Teuflisch konstruierte Dissonanzen — Leidenschaftliche Genauigkeit: Mathematik und Kunst bei Hermann Hesse, Thomas Mann und Robert Musil.*

Donnerstag, 3. März 2005 — Villa Massimo

9^{30} **Bouchra Oualla-Weimer:** *Was ist Kunst?*

10^{30} **Markus Haase:** *Was ist Mathematik?*

11^{30} **Heino Hellwig:** *Anschauung und Abstraktion — Über Gemeinsamkeiten von Mathematik und Kunst.*

15^{00} **Prof. Elmar Salmann (Rom):** *Zwischen Kniefall und Perücke — Barock als Alchemistenküche der Moderne.*

19^{30} $\mathbb{Q}\mathbb{N}\int T!$
Mathesis und die Musen — Eine Mathematisch-Künstlerische Collage.

Freitag, 4. März 2005 — Accademia dei Lincei / Vatikanische Gärten

9^{30} **Abschlußgespräch:** *Mathesis und die Musen.*

11^{00} **Christina Guschelbauer:** *Rom, San Pietro.*

14^{00} Führung **Petrusgrab** alternativ:

14^{00} **Beate Lohner, Richard Mohr:** *Das Augustusmausoläum.*

20^{00} **Cena sociale** *'Lucifero', Via dei cappellari*

Teil I

Mathematik und Bildende Kunst




Florian Schwerteck

Die Wurzeln des projektiven Raums in der Renaissance

Dieser Artikel stellt einen kurzen Überblick dar über die Entwicklung perspektivischer Malerei in der Renaissance und versucht ein wenig zu deuten, auf welche Weise diese der Mathematik als Inspirationsquelle gedient hat und letztendlich zur „Erfindung“ des projektiven Raumes durch Girard Desargues im Jahre 1639 führte.

Wir beginnen mit einer Aufzählung verschiedener Möglichkeiten, den projekiven Raum zu definieren. Wie man leicht sieht, besitzen sie unterschiedliche Grade von Allgemeinheit. Doch hinter dem Konzept des projektiven Raums steckt sehr viel mehr als nur die Definition. In anschließenden Bemerkungen werde ich daher versuchen, die für uns wesentlichen Aspekte herauszuarbeiten und aufzuzeigen, auf welche Weise sie mit perspektivischer Malerei zusammenhängen.

Definition:

1) Ein projektiver Raum ist die Menge der eindimensionalen Unterräume eines Vektorraums.
2) Auf $\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ sei folgende Äquivalenzrelation definiert: $(x_{0,}\dots,x_n)\sim(y_{0,}\dots,y_n)$, falls ein $\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ existiert mit $y_i=\lambda x_i$ für alle . Die Menge der Äquivalenzklassen wird als (reeller, *n*-dimensionaler) projektiver Raum bezeichnet.
3) Sei eine quadratische Fläche im gegeben. Identifiziert man jeweils die sich diagonal gegenüberliegenden Randpunkte, so erhält man eine randlose differenzierbare Mannigfaltigkeit: den 2-dimensionalen reellen projektiven Raum.
4) Sei ein Quadrat im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Das Innere dieses Quadrates offen und damit homöomorph zum (wir können somitmit dem Inneren des Quadrats identifizieren). Fügt man nun den Rand des Quadrats zumhinzu (diese Randpunkte heißen dann „Unendlichkeitspunkte“), so erhält jede Geraden deszwei zusätzliche Punkte im Unendlichen. Zudem schneiden sich zwei parallele Geraden in genau diesen beiden Unendlichkeitspunkten. Mit der Idee im Hinterkopf, dass Geraden nur einen Schnittpunkt haben sollten, identifizieren wir nun diese beiden Punkte (und dies für jede Gerade). Das Ergebnis nach dieser Identifikation ist wiederum der (2-dimensionale reelle) projektive Raum.

Bemerkungen:

- Es ist leicht einzusehen, dass die zweite Definition nichts anderes ist als die erste Definition (angewendet auf): Eine Äquivalenzklasse ist von der Form $\{(\lambda x_{0,}\dots,\lambda x_n):\lambda\in\mathbb{R}\}$ und stellt somit eine Ursprungsgerade durch $(x_{0,}\dots,x_n)$ dar. Wir betrachten somit die Menge der Ursprungsgeraden. Ursprungsgeraden stellen aber gerade die eindimensionalen Unterräume dar.
- Die dritte Definition kann man sich anschaulich anhand der folgenden Skizze vorstellen:

  Man „verklebt“ die gegenüberliegenden Ränder des Quadrats in umgekehrter Richtung (wer mag, kann das an einem Blatt Papier ausprobieren[1]).

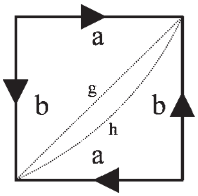


Abb. 1: Der projektive Raum. Die Geraden *g* und *h* sind parallel.

- Die vierte Definition ist im Grunde wieder nichts anderes als die dritte Definition. Denn wenn man sich überlegt, wie Geraden desaussehen, wenn man sie in ein kleines Quadrat hineinquetscht, dann stellt man fest, dass der Abstand paralleler Geraden zum Rand hin immer kleiner wird und sie sich dort im selben Punkt treffen, sowie dass die Geraden immer von einem Randpunkt zum diagonal gegenüberliegenden Randpunkt laufen (siehe wiederum vorige Skizze). Die Identifikation dieser Punkte ist also genau dieselbe wie in Definition 3).

1 und sollte dabei nicht verzweifeln, wenn er es nicht hinbekommt. Es geht nämlich nicht...

Florian Schwerteck, Academia dei Lincei, Rom 28.2.2005.

· Die für unsere Belange ganz wesentlichen und das Konzept des projektiven Raums schon beinhaltenden Aspekte sind somit:

(i) Alle Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

(ii) Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen.

Die obigen Definitionen sind nicht übermäßig kompliziert. Dennoch dauerte es etwa zwei Jahrtausende (ab Euklid), bis Desargues zum ersten Male 1639 in seinem Werk *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* den projektiven Raum einführte und damit zunächst auf keine große Resonanz stieß. Sein bekannterer Zeitgenosse René Descartes, der ebenfalls Bahnbrechendes für die Geometrie leistete, merkt an, dass die Unendlichkeitspunkte, die Desargues einführt, nur als Hilfsmittel zum besseren Verständnis von Zusammenhängen angesehen werden sollten. Doch bei Desargues sind dies keineswegs „Hilfsmittel", er definiert sie trocken und kommentarlos und benutzt sie in seinem Werk gleichberechtigt wie alle anderen Punkte (und kommt dabei zu einigen durchaus tiefen Einsichten). Die Reaktion Descartes' ist symptomatisch für seine Zeit und für viele ähnliche Situationen in der Mathematik: Was es nicht gibt, kann man auch nicht definieren. Und das Unendliche gibt es nicht, denn wo sollte das sein? Doch genauso wenig „gibt" es die Null (denn Null ist nichts und Nichts ist der Inbegriff der Inexistenz) oder negative Zahlen (was sind -3 Liter Milch?), imaginäre Zahlen (man erkennt es schon am Begriff) etc., und doch benutzen wir sie heute mit großem Gewinn und ohne Schwierigkeiten.

War Desargues also ein so großes Genie und ein Visionär, dass er aus dem Nichts und gegen die Vernunft seiner Zeit die Idee des projektiven Raumes schuf? Nun, es mag sein, aber auch Genies haben Quellen zur Inspiration und wir kommen nicht umhin zu bemerken, dass es einen Bereich gibt, in dem es

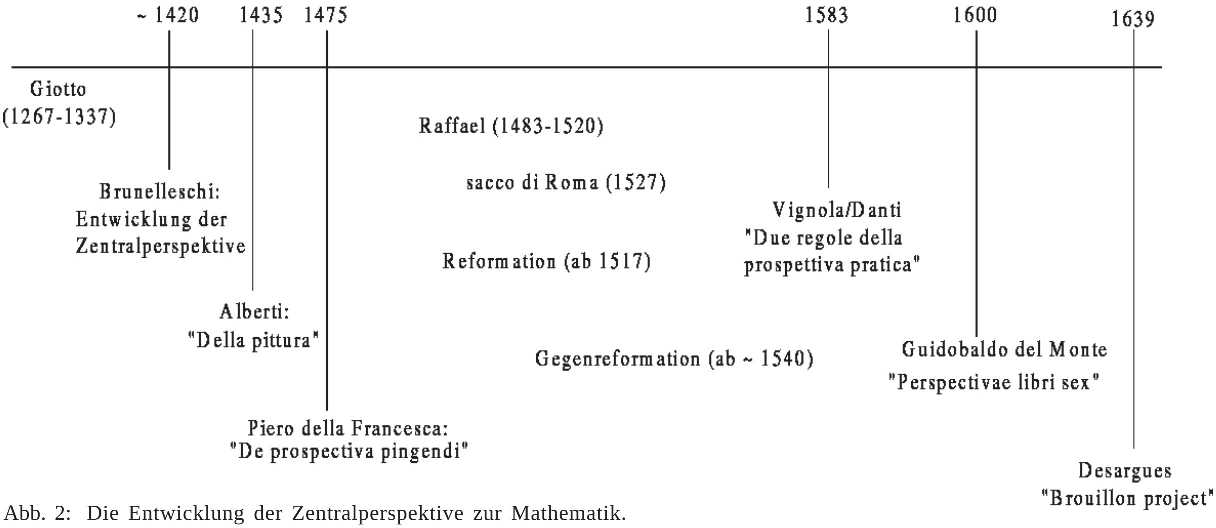


Abb. 2: Die Entwicklung der Zentralperspektive zur Mathematik.

doch Unendlichkeitspunkte und sich schneidende parallele Geraden gibt: in der perspektivischen Malerei. Linien, die senkrecht in das Bild hineinlaufen, schneiden sich bei perspektivisch korrekter Ausführung alle in einem Fluchtpunkt. Dieser stellt gewissermaßen einen Punkt am Horizont, also unendlich weit entfernt dar und somit entspricht er keinem realen Punkt. Doch in dem Moment, in dem der Maler diesen Fluchtpunkt malt (und wenn er es nicht tut, so *könnte* er es doch tun), „gibt" es ihn. Die perspektivische Malerei, mit der Desargues sehr gut vertraut war, da er im Jahre 1636 schon ein Werk über Perspektive veröffentlicht hatte, liefert also eine Lösung für die existenziellen Probleme des projektiven Raums. Die Beziehung geht sogar noch viel tiefer, denn man erhält den projektiven Raum als Ergebnis einer Zentralprojektion des Raumes auf eine Ebene[2], genauso wie ein perspektivisches Bild eine Zentralprojektion des Raumes auf eine Ebene ist.

Wir wollen daher nun genauer untersuchen, wie die perspektivische Malerei entstanden ist und sich entwickelt hat, insbesondere im Hinblick auf ihre theoretische Beschreibung, da diese von Natur aus mathematische Züge besitzen muss, und dadurch eine Brücke zur „reinen" Mathematik geschlagen wird.

2 Man kann dies aus Definition 2) ableiten, dies würde hier allerdings zu weit führen. Für Interessierte sei hier auf das Buch von G. A. Jennings: *Modern Geometry with Applications* verwiesen.

Die Entwicklung der Zentralperspektive (vgl. Abb. 2) ist eines der hervorstechendsten Merkmale der Malerei der Renaissance und wird üblicherweise dem Florentiner **Filippo Brunelleschi** (1377-1446) zugeschrieben. Interessanterweise war Brunelleschi gar kein Maler, sondern gelernter Goldschmied, praktizierender Ingenieur und Architekt. Sein bekanntestes Werk ist der Dom in Florenz. Doch weder hat Brunelleschi schriftliche Werke hinterlassen, noch hat ein Zeitgenosse seine Leistungen festgehalten. Es ist daher nicht mit letzter Sicherheit festzustellen, was Brunelleschi tatsächlich erfunden hat und wann. Doch Brunelleschi war als Architekt naturgemäß interessiert daran, den Sehprozess zu ergründen und erforschen, wie räumliche Objekte im Auge wahrgenommen werden. Im Laufe dieser Untersuchungen fertigte er zwei Bilder von höchster perspektivischer Perfektion an, die leider nicht mehr erhalten sind: Eines vom Baptisterium in Florenz, von einem Punkt aus dem Portal des Doms heraus gesehen, das andere vom (heutigen) Palazzo Vecchio. Um die Perfektion zu demonstrieren, griff Brunelleschi zu einem Trick: In die Rückseite des Bildes bohrte er ein Loch, durch das man das Bild betrachten sollte, indem man einen Spiegel davor hielt. Wenn man also vom Portal des Doms durch das Loch auf das Baptisterium schaute und wechselweise den Spiegel davor hielt oder nicht, so konnte man wechselweise das gemalte oder das echte Baptisterium erblicken. Da Brunelleschi zudem den Himmel nicht gemalt, sondern eine Silberschicht aufgetragen

Abb. 3: Giotto: *Joachim und Anna treffen sich auf der goldenen Brücke.*

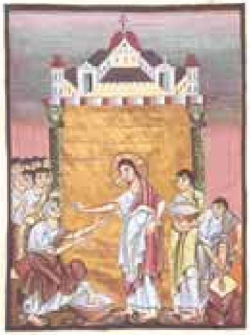


Abb. 4: Mittelalterliche Kunst.

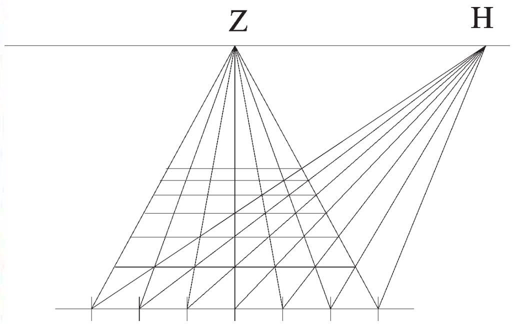


Abb. 5: Konstruktion eines Pavimento nach Alberti.

hatte, auf der sich der echte Himmel spiegelte, soll die Ähnlichkeit verblüffend gewesen sein. Das zweite Bild war im Prinzip ähnlich, nur hatte Brunelleschi hier für seinen „Himmeleffekt“ das Bild am oberen Rand abgesägt.

Wenn also Brunelleschi die mathematisch richtige Methode der Zentralperspektive erfand, so heißt dies dennoch nicht, dass man nicht schon vorher perspektivisch gezeichnet hat. Betrachten wir ein Bild von Giotto (vgl. Abb. 3), so sehen wir, dass er auch schon den Raum darstellt (im Gegensatz zur mittelalterlichen Kunst, siehe Abb. 4, nur ist dieser eben nicht sehr wirklichkeitsgetreu. Andere Maler des „Trecento“ machten dies zum Teil genauer, wenn auch nie völlig richtig. Diese Künstler waren wohl auch nicht an einer mathematisch korrekten Methode interessiert, solange „ihre“ Methode ebenfalls gute Resultate produzierte. So ist es denn auch nicht verwunderlich, dass erst ein „Externer“ die korrekte Methode entdeckte.

Aufgrund der traditionellen mündlichen Überlieferungsweisen ist es auch nicht verwunderlich, dass der erste, der diese Methode niederschrieb, ebenfalls ein Externer war: der Humanist **Leon Baptista Alberti** in seinem 1435 erschienenen Werk *Della pittura*. Alberti interessierte sich sehr für Architektur und war später auch als Architekt bedeutender Gebäude in Rom tätig. Im Laufe seiner Studien war Alberti sicherlich mit Brunelleschi zusammengekommen und hatte von ihm dessen Methode gelernt. Wir wollen nun nachvollziehen, wie sie funktioniert (vgl. Abb. 5).

Alberti beschreibt, wie man ein „Pavimento“, also ein Parkett mit quadratischen Kacheln zeichnet: Man unterteile eine horizontale Linie in regelmäßige Teilstücke, und zeichne von dort aus gerade Linien zu einem Punkt *Z*, dem Fluchtpunkt. Diese Linien stellen parallele Geraden dar. Um die horizontalen Geraden im richtigen Abstand einzuzeichnen, wähle man einen Hilfspunkt *H* auf gleicher Höhe mit *Z* (der Abstand von *H* zu *Z* regelt den Abstand des Betrachters zur Bildszene) und von dort zeichne man gerade Linien zu den Fußpunkten der Geraden. Durch die Schnittpunkten dieser Schrägen mit den Geraden zeichne man die Horizontalen und fertig ist das Pavimento.

Ausgehend von dieser Basiskonstruktion lassen sich im Prinzip sämtliche noch so komplizierten räumlichen Objekte darstellen. Doch das ist natürlich leichter gesagt als getan. Es war daher nur eine Frage der Zeit, bis jemand eine ausführlichere Anleitung zum perspektivischen Malen schreiben würde. Dass dies fast 40 Jahre dauern sollte, obwohl das Wissen und die Technik sich in Italien rasch verbreiteten, lässt sich wohl wieder durch die (bis heute andauernde) Vorliebe der Italiener zur mündlichen Kommunikation erklären. Die Ehre gebührt **Piero della Francesca**, der um 1475 gewissermaßen das Referenzwerk der Renaissance für perspektivische Malerei schrieb: De prospectiva pingendi. Es ist so gut, dass der Mathematiker Danti über ein Jahrhundert später im Vorwort zu seinem eigenen Werk (wir kommen später noch darauf zurück), schreibt, dass es das Beste sei, was man über Perspektive finden könne. Allerdings wurde „De prospectiva pingendi“ nie gedruckt, sondern zirkulierte nur in einigen wenigen Manuskripten.

Das Besondere an Piero della Francescas Werk ist, dass es nicht nur eine minutiöse und akribische Schritt-für-Schritt-Anleitung darstellt, die mit ganz einfachen Konstruktionen

Abb. 6: Piero della Francesca: *Geißelung Christi.*

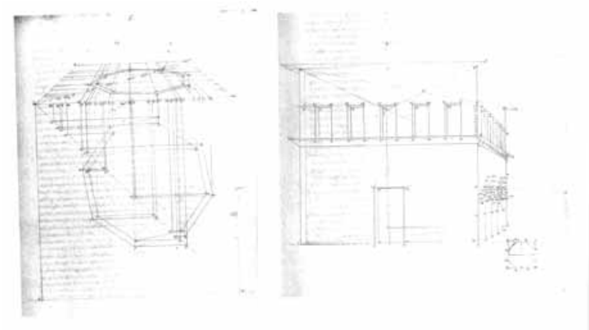


Abb. 7: Konstruktionen aus Piero della Francesca: *De prospectiva pingendi.*

beginnt, am Schluss aber auch nicht vor den kompliziertesten Herausforderungen wie der Darstellung menschlicher Figuren zurückschreckt, sondern seine Methoden auch noch auf ein solides mathematisches Fundament stellt. Er untersucht insbesondere, wie Größenverhältnisse sich unter perspektivischen Abbildungen verhalten. Einer der ersten Sätze, die er dabei beweist, ist zum Beispiel der Strahlensatz.

Nach diesem gewaltigen Werk kommt lange Zeit nichts wesentlich Neues dazu. Es werden zwar viele Werke über Perspektive veröffentlicht, doch sie sind allesamt von geringerem Umfang und tendieren dazu, die schwierigeren Konstruktionen durch Benutzung von Hilfsmitteln zu vereinfachen. Die auf Piero della Francesca folgende Zeit wird daher nicht von revolutionären Neuerungen geprägt, sondern von einer zunehmenden Verbreitung und Verfeinerung der entsprechenden Techniken. Die Verbreitung findet vor allem im restlichen Europa statt, z.B. unternimmt Dürer um das Jahr 1500 herum eine große Reise nach Italien, um perspektivisches Zeichnen zu lernen. Bei der Verfeinerung sind dagegen die italienischen Künstler federführend: Ebenfalls um die Jahrhundertwende erstellt der erst 21-jährige Raffael die *Vermählung mit Maria (vgl. Abb. 8),* die die Leichtigkeit, mit der Raffael perspektivische Konstruktionen von der Hand gehen, eindrucksvoll belegt. Die technische Perfektion, die Raffael in die Wiege gelegt zu sein scheint, lässt ihn zum Wegbereiter zweier Tendenzen werden, die die Hoch- und Spätrenaissance prägen. Die eine ist das Verschwinden der vielen geraden Linien, die alle zum gemeinsamen Fluchtpunkt streben oder orthogonal dazu verlaufen. Gerade Objekte sind natürlich einfacher darzustellen als krummlinige. Raffael stellt sich der Herausforderung, Personen in natürlichen Landschaften darzustellen, wobei immer noch alles perspektivisch korrekt gemalt ist. Die Harmonie, mit der dabei die Bildelemente zueinander platziert werden, lässt die technischen Schwierigkeiten, die bei der Bildentstehung sicherlich vorhanden waren, völlig vergessen. Man fühlt sich an einen Akrobaten erinnert, der selbst bei den anstrengendsten Übungen immer noch ein Lächeln auf sein Gesicht zaubert. Eines solcher Werke ist z.B. die *Auferstehung*, die man im Original in den Vatikanischen Museen bewundern kann.

Eine weitere Spezialität Raffaels sind „Trickbilder“: Bilder, die dem Betrachter etwas vorgaukeln, was nicht vorhanden ist, wie Säulen oder Vorsprünge, Gewölbe, wo keine sind, oder flache Decken, wo Gewölbe sind. Alles dies erfordert eine hohe technische Perfektion, die Raffael als einer der ersten erreichte. Doch die letztere Art von Bildern bedeutet schon einen gewissen Missbrauch der Idee perspektivischer Malerei. Und auch die erste Form bedeutet eine Abkehr von der zentralen Stellung der Perspektive bei der Bildkonstruktion. Gerade durch seine hohe Meisterschaft leitet Raffael somit den Niedergang der Bedeutung der Perspektive ein.

Nach Raffaels Tod werden die Zeiten zudem zunehmend turbulenter: Im Jahre 1527 plündern deutsche Landsknechte Rom (was die Produktivität danach allerdings eher erhöht), die Reformation übt – vorwiegend im Norden – starke Einflüsse auch auf die Kunst aus, während in den katholischen Gebieten die Gegenreformation wieder zu einer stärkeren Hinwendung zum Geistlichen führt.

Abb. 8: Raffael: *Die Vermählung mit Maria.*

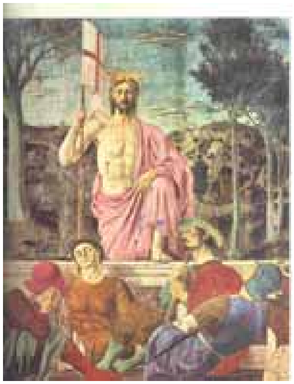


Abb. 9: Raffael: *Auferstehung.*

Doch in dem Maße, in dem die Praktiker das Interesse an der Perspektive verlieren, nimmt das Interesse der Theoretiker daran zu. Im Jahre 1585 ist erstmals ein Mathematiker an einem Werk über Perspektive beteiligt, der schon erwähnte **Egnazio Danti**. Er schreibt Kommentare (mathematische und naturwissenschaftliche) zu einem Werk des Architekten **Vignola** und veröffentlicht diese nach Vignolas Tod unter dem Namen *Due regole della prospettiva pingendi*.

Es gibt weitere Mathematiker, die sich mit Perspektive beschäftigen, doch ich will nur einen herausgreifen: **Guidobaldo del Monte**. Er schreibt sechs Bücher über Perspektive (*Perspectivae libri sex*, 1600) und beweist darin das bemerkenswerte Resultat, dass jede Menge von parallelen Geraden auf ein und denselben Punkt zulaufen, wenn man sie perspektivisch abbildet. Für senkrecht ins Bild hineinlaufende Geraden war das natürlich vorher schon klar, aber es gilt eben auch für beliebige andere Richtungen. Doch dieser Satz ist im Grunde nichts anderes als die Konstruktion des projektiven Raums! Del Monte hätte nur noch die Axiome des projektiven Raumes hinschreiben müssen. Leider hat er seine Chance verpasst, und es blieb **Girard Desargues** vorbehalten, diesen letzten Schritt zu tun. Aber wir sehen: Aus mathematischer Sicht war die Zeit reif für den projektiven Raum, war die Mathematik schon in dessen Nähe gekommen. Aus psychologischer Sicht war sie dagegen noch nicht reif. Es sollte nach Desargues noch über ein Jahrhundert dauern, bis der projektive Raum die Bedeutung erlangte, die er heute in allen Gebieten der Geometrie innehat. Doch das ist eine andere Geschichte.

Literatur:

Field, Judith Veronica, *The invention of infinity: mathematics and art in the Renaissance*, Oxford University Press, 1997

Field, Judith Veronica; Gray, Jeremy, *The geometrical work of Girard Desargues*, Springer, New York, 1987

Kemp, Martin, *optical themes in western art from Brunelleschi to Seurat*, Yale University Press, New Haven, Conn. , 1990

Ning Ning Jiang

Maurits Cornelis Eschers „Prententententoonstelling“

Jeder kann sich gut vorstellen, was es bedeutet, wenn ein Bild gedreht und um einen gewissen Faktor vergrößert oder verkleinert werden soll. Wir sind solche Drehungen und Streckungen sogar so gewohnt, dass wir auf Anhieb sagen würden: „Das ist ja dasselbe Bild!“

Wer mathematische Kenntnisse besitzt, kann denselben Vorgang auch so ausdrücken: Ein (Schwarz-Weiß-)Bild ist eine Funktion der komplexen Zahlenebene in eine zweielementige Menge. Das gedrehte und gestreckte Bild entspricht der induzierten Funktion, wenn die Zahlenebene eine lineare Transformation erfährt. Oder kürzer: Sei $f:\mathbb{C}\to\{0,1\}$, mit für ein . Dann existiert ein eindeutiges mit $f=\tilde{f}\circ T$. (Der Beweis ist klar: $\tilde{f}=f\circ T^{-1}$). Oder er malt folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

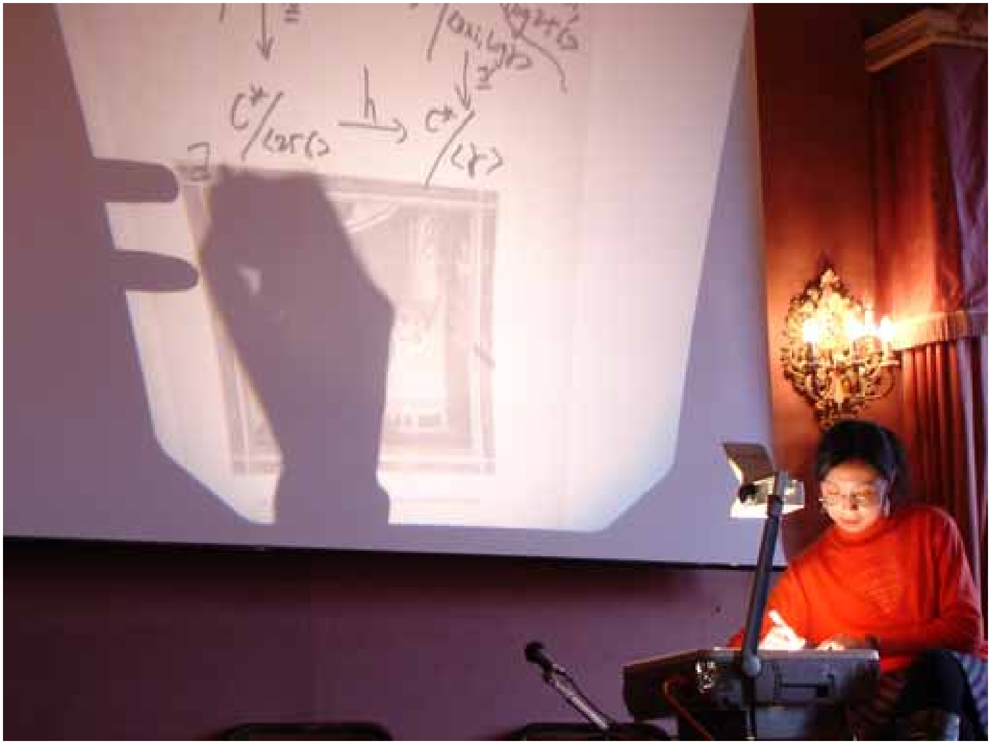
Man kann dagegen einwenden, dass ein Bild stets endliche Ausdehnung besitzt, die komplexe Zahlenebene dagegen unendliche. Den Mathematiker stört dieser Einwand weniger; er behauptet entweder, dass außerhalb der Bildfläche alles Weiß sei (bzw. 0, f ist also eine Funktion mit kompaktem Träger), was der Maler natürlich nicht darzustellen braucht. Oder er behauptet, falls das vorliegende Bild Parallelogrammform hat, dass sich das Bild wiederholt, d.h. man muss sich die Ebene mit Kacheln bedeckt vorstellen, die alle ein identisches Bild zeigen. Natürlich muss der Maler dann nur eine Kachel malen. Mathematisch heißt das in diesem Fall, dass wir ein $f:\mathbb{C}/\langle a,b\rangle\to\{0,1\}$ haben, wobei nicht auf einer Gerade liegen sollen (siehe Bild 6). Ein solches heißt auch *komplexer Torus*, denn in der „Kachel“ werden diagonal gegenüberliegende Randpunkte miteinander identifiziert und wenn man das mit einem Stück Papier nachmacht, so erhält man eben einen Torus.

Man sieht also, dass die Mathematik eine unangemessen komplizierte Beschreibung eines anschaulich so einfachen Vorgangs liefert. Doch die Mathematik hat immer dann ihre Stärken, wenn die Anschauung (zunächst) versagt. Nehmen wir doch nur eine kleine Veränderung vor: Wir können mittels der Exponentialfunktion nach abbilden. Gibt es dann eine der Multiplikation entsprechende Transformation von und wie sieht dann ein solchermaßen transformiertes Bild aus?

Nun, so:

Dieses Bild heißt „Prententententoonstelling“ (Bildergalerie) und wurde von dem holländischen Künstler Maurits Cornelis Escher angefertigt. Was sieht man auf dem Bild?

Wir sehen einen Jungen in einer Bildergalerie, der ein Bild betrachtet, auf dem eine Stadt zu sehen ist. In dieser Stadt befindet sich eine Bildergalerie, in der exakt obengenannter Junge ein Bild betrachtet, auf dem exakt die gleiche Stadt zu sehen ist, mit einer Bildergalerie, in der wieder eben dieser Junge ein Bild betrachtet …



Ning Ning Jiang, Academia dei Lincei, Rom 28.2.2005.

In der Mitte ist überdies ein rundes Loch, in dem Escher seine Signatur untergebracht hat.

Wir haben also zwei Fragen:

1. Inwiefern entspricht „Prententententoonstelling“ einem verdrehten und gestreckten Bild?
2. Hat das Loch in der Mitte nur den Zweck, Platz für Eschers Unterschrift zu schaffen, oder gibt es dafür einen tieferen Sinn?

Zunächst einmal die Antworten in umgekehrter Reihenfolge:

2. In dem Loch müsste sich das Bild eigentlich wiederholen, und zwar verkleinert (Faktor 22) und verdreht (um -160 Grad). Natürlich ist dann darin wieder ein „Loch“, in dem sich das Bild nochmals verkleinert und weiter verdreht wiederholt, usw. Die Mühe, das auszuführen, hat Escher sich also gespart, denn spätestens für die dritte Wiederholung des Bildes hätte er wohl ein Mikroskop gebraucht und mikrometergroße Linien zeichnen müssen. Die findigen Mathematiker B. de Smit und H.W. Lenstra von der Universität Leiden haben sich die Mühe gemacht und dies für ihn nachgeholt. Das Ergebnis sieht man in Bild 1.

Abb. 1: Vergrößerter Bildausschnitt des vervollständigten „Prententententoonstelling“.

1. Wie bekannt ist, gilt stets : Die exponentielle Entsprechung der Multiplikation ist also das Potenzieren. Wie schon oben angedeutet entsteht „Prententententoonstelling“ aus einem Ursprungsbild auf $\mathbb{C}^*$ durch die Transformation . Das Ursprungsbild wiederholt sich in seinem Inneren um den Faktor 256 verkleinert. Es sieht ausschnittsweise so aus:

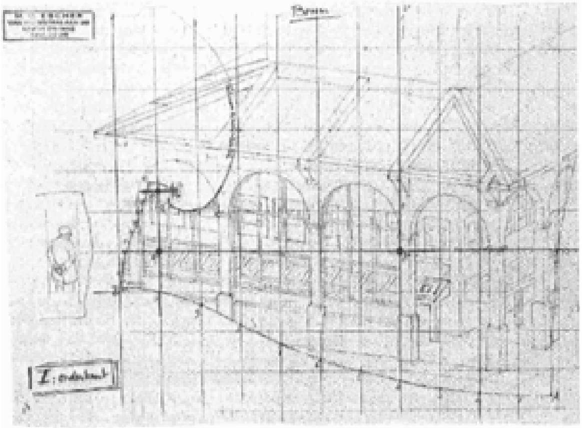


Abb. 2: Vorstudie für „Prententententoonstelling“.

Mathematisch präziser kommt man zu dem folgenden Ergebnis: Zu dem vorliegenden (Prententententoonstelling) mit $\gamma = \exp(\frac{-4\pi^2}{2\pi i + \log 256})$ gibt es ein $f : \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle \to \{0,1\}$ (das Ursprungsbild) und ein , so dass , wobei $T(w) = w^\alpha$. Es gilt $\alpha = \frac{2\pi i}{2\pi i + \log 256}$ und ist damit eine wohldefinierte Abbildung von

$$\mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle \to \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle.$$

Beweis: Dieser Teil wird nun ziemlich mathematisch, da man mit Anschauung nicht so weit kommt, es sei denn jemand hätte ein Vorstellungsvermögen wie Escher selbst. Dieser hat sein Bild nicht berechnet, wie wir das im Nachhinein tun werden, sondern nach Gefühl mit einer gewissen Zielvorgabe gezeichnet. Das Ergebnis ist dabei fast identisch, was das Genie Eschers wieder einmal beweist.

Escher führte auf seinem ursprünglichen, geraden Bild (s.o.) ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein; er tat das, indem er ein Gitter darüber legte, das wir im folgenden „klassisches Gitter“ nennen werden. Dieses verformte er zu einem verdrehten Gitter (wir wollen es „Escher-Gitter“ nennen), so dass die Gitterlinien, wenn man im Uhrzeigersinn von einer Ecke zur anderen läuft, sich um den Faktor 4 auseinanderspreizen:

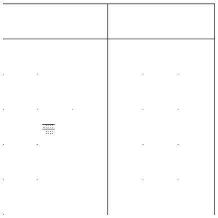


Abb. 3: schematisiertes klassisches Gitter.

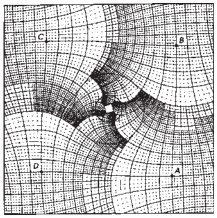


Abb. 4: Escher-Gitter.

Escher konstruierte sein neues Gitter so, dass „Quadrate ihre quadratische Form behalten“ (letzteres wird sich als entscheidende Eigenschaft erweisen). Nun übertrug er sein Bild Quadrat für Quadrat auf das verdrehte Gitter.

Was musste Escher dabei beachten? Wir analysieren dazu das Escher-Gitter: Wir wählen einen Punkt und laufen von diesem aus 7 Schritte nach oben. Dann biegen wir um 90 Grad nach links, laufen wieder 7 Schritte, 90 Grad nach links, 7 Schritte, 90 Grad nach links, 7 Schritte. Wir erhalten dadurch einen Punkt A' (siehe Abb. 5).

$\mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle$

Im ursprünglichen Gitter waren und A' derselbe Punkt (und A' haben dasselbe Urbild). Dementsprechend müssen beim Einfärben und A' dieselbe Farbe erhalten. Genau dasselbe können wir für jeden anderen Punkt machen. Wir stellen fest, dass die Abbildung $P \mapsto P'$ eine Kontraktion ist, daher gibt es nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt. Wir definieren diesen als Ursprung der komplexen Ebene und stellen dann fest (gemessen), dass der Quotient konstant ist. Wir nennen diesen Faktor $\gamma \in \mathbb{C}$. Messungen im Gitter ergeben etwa: , .

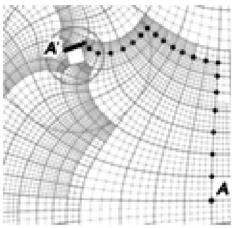
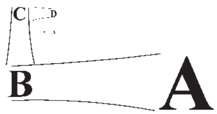


Abb. 5: Ein (ursprünglich geschlossener) Weg von nach A'.

Als Zwischenergebnis halten wir fest: Ein auf das Escher-Gitter übertragenes Bild ist eine Funktion oder anders ausgedrückt: „Prentenentoonstelling“ wiederholt sich im Innern um verkleinert und verdreht. Damit ist die zweite Frage schon einmal beantwortet.

Umgekehrt können wir im Escher-Gitter einmal im Uhrzeigersinn um den Ursprung herum von nach laufen. Wenn wir den entsprechenden Weg im klassischen Gitter laufen, stellen wir allerdings fest, dass der Endpunkt nicht mit dem Anfangspunkt zusammenfällt, da wir dort immer kürzere Strecken laufen. In ähnlicher Weise wie gerade eben erhalten wir, dass das ursprüngliche Bild sich ebenfalls im Innern wiederholen muss, und zwar um den Faktor 256 verkleinert und nicht verdreht. Das ursprüngliche Bild ist also eine Funktion $\mathbb{C}^*/\langle 256\rangle \to \{0,1\}$.

Der Übergang vom geraden zum verdrehten Bild wird also durch eine invertierbare Funktion induziert. Wir führen diesen ganzen Vorgang zunächst einmal an einem einfachen Beispiel vor, allerdings mit Faktor 2 statt mit Faktor 4, weil man sonst nichts mehr sieht:



Dies sei unser ursprüngliches Bild (ohne die Hilfslinien). Im Innern wiederholt es sich selbst um den Faktor $2^4 = 16$ verkleinert. Nun nehmen wir den eingezeichneten Streifen vom großen A zum halb so großen B und übertragen ihn gemäß Escher-Technik. Dabei wird das B um den Faktor 2 vergrößert, es ist nun also genau so groß wie das A. Dann nehmen wir den Streifen von B nach C, das C ist hinterher so groß wie das B und somit wie das A. Das D wird ebenfalls genau so groß. Nun nehmen wir den Streifen vom D zum verkleinerten A. Das A wird dann so groß wie das D, das C, das B, und wie das A vom Anfang! Dank unseres geschickt gewählten Bildes deckt sich das Bild des verkleinerten A’s exakt mit dem des großen A’s. Das setzt sich dann fort, d.h. das entstehende Escher-Bild ist wohldefiniert: (siehe nächste Seite)

$$\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ & \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{array}$$

Die große Frage ist nun: Was für eine Funktion von hat Escher eigentlich benutzt? Lässt sie sich in vernünftiger Form schreiben?

Wir erinnern uns, dass Escher gefordert hatte, dass Quadrate bei der Transformation ihre quadratische Form beibehalten sollten. Was Escher damit mit intuitivem Verständnis meinte, ist, dass die gesuchte Abbildung winkelerhaltend sein soll (man sieht im Escher-Gitter in Bild 4 ganz gut, dass die Gitterlinien sich immer noch im rechten Winkel schneiden). Nun sagt die Mathematik (wir wollen das hier nicht beweisen), dass solche Abbildungen genau die sind, die holomorph, also komplex differenzierbar, sind. Wir können unsere gesuchte Abbildung also „Isomorphismus von komplexen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten" oder (komplexen) „Diffeomorphismus" nennen. Solche Objekte sind in der Mathematik gut untersucht und wir können in der Tat gewisse Ergebnisse weiter ausnutzen und kommen zu einem wichtigen Zwischenergebnis:

Satz: Sei $h:\mathbb{C}^*/\langle 256\rangle \to \mathbb{C}^*/\langle\gamma\rangle$ ein komplexer Diffeomorphismus. Dann ist von der Form $h(w)=w^{\alpha}$ für ein gewisses $\alpha\in\mathbb{C}$.

Beweis: Faktorgruppen von sind in der Literatur kaum untersucht, weil man sie, so wie wir das gleich tun werden, auf (additive) Faktorgruppen von zurückführen kann. Und für diese gibt es eine ganze Reihe von schönen Ergebnissen.

Die Exponentialfunktion definiert für einen (Gruppen-)Isomorphismus von der additiven Faktorgruppe (Torus) in die multiplikative Faktorgruppe , der zudem auch ein Diffeomorphismus ist. h lässt sich somit zurücktransportieren zu einem Diffeomorphismus $\tilde{h}:\mathbb{C}/\langle 2\pi i,\log 256\rangle \longrightarrow \mathbb{C}/\langle 2\pi i,\log\gamma\rangle$.

Ein bekanntes Resultat über komplexe Tori (siehe J. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Kapitel VI, Satz 4.1) sagt aus, dass es ein $\alpha\in\mathbb{C}$ gibt mit . Wir haben somit folgendes kommutative Diagramm:

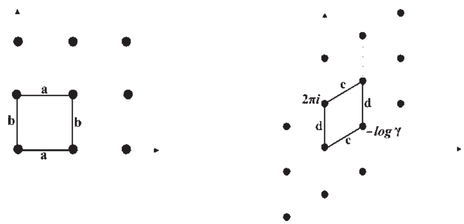
$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & \{0,1\} \end{tikzcd}$$

Daraus folgt sofort, dass . Wir müssen nun nur doch die komplexen Zahlen α und bestimmen.

Wir erhalten etwa durch

für ein beliebiges . Welches sollen wir wählen?

Seien und $G_E:=\langle 2\pi i,\log\gamma\rangle$ die zwei Gitter[1], die die komplexen Tori $\mathbb{C}/\langle 2\pi i,\log 256\rangle$ und bestimmen.



1 In diesem Fall bedeutet Gitter: diskrete Untergruppe. Leider entsteht etwas Konfusion, da wir das Wort Gitter damit mit zwei verschiedenen Bedeutungen belegen.

Nun betrachten wir in den Weg , also den Weg von 0 nach $2\pi i$. Dieser wird durch zu einem Kreis im Escher-Gitter abgebildet (klar, da einen Kreis parametrisiert):

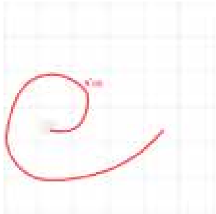


Abb. 8: Urbild des Kreises: eine Spirale.

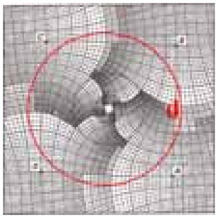


Abb. 9: Weg „d“ im Eschergitter: ein Kreis.

Läuft man diesen Kreis ab (im mathematisch positiven Sinn, also gegen den Uhrzeigersinn!), so stellt man fest, dass dabei immer größere Strecken zurückgelegt werden, der Kreis entspricht also im ursprünglichen, geraden Gitter, einer Spirale nach außen, mit Startpunkt in 1 und Endpunkt in 256. Diese Spirale ist im Grunde dasselbe wie[2] ein gewöhnlicher Kreis (entspricht Weg im Torus $\mathbb{C}/\langle 2\pi i, \log 256\rangle$), gefolgt von einer geraden Strecke von 1 nach 256 (entspricht Weg). Die Abbildung ist also so, dass der Endpunkt von , also $2\pi i$, das Bild des Endpunktes von , also , ist. Wir erhalten somit

$$\log\gamma = -\alpha 2\pi i = \frac{(-2\pi i)^2}{2\pi i+\log 256}$$

$$\gamma = \exp\left(\frac{-4\pi^2}{2\pi i+\log 256}\right).$$

Ganz analog können wir feststellen, dass $-\log\gamma$ das Bild von ist, wir erhalten damit

Wir haben $\mathrm{Arg}(\gamma) = 157{,}6^\circ$ und , was natürlich nicht exakt, aber doch erstaunlich gut mit den gemessenen Werten übereinstimmt.

□

2 wer sich mit Fundamentalgruppen auskennt, der sollte hier einsetzen: „ist homotop zu“

Quellen:

B. de Smit und H. Lenstra: Artful Mathematics: The Heritage of M. C. Escher. In: *Notices of the AMS* Band 50, No. 4 (April 2003).

Diesen Artikel und viele weiteren sehenswerten Informationen findet man auf der Internetseite *http://escherdroste.math.leidenuniv.nl*.

Johannes Nübler, Cordian Riener

Symmetrie und Vasarely — Brechung durch Färbung

1 Symmetrie - Beispiel einer Abstraktion

Da die mathematische Fassung des Begriffes der Symmetrie zum Einen nicht besonders schwierig ist und zum Anderen deswegen in populärwissenschaftlicher wie mathematischer Literatur weidlich ausgeschlachtet wurde, wollen wir hier keine Einführung in dieses Thema geben. Um uns aber doch vor der eigentlichen Arbeit ab Abschnitt 2 etwas an diesen Begriff zu gewöhnen, zeigen wir im ersten Abschnitt an dem einfachen Beispiel der Symmetrie, wie Abstraktion geschieht.

Wir nehmen ab Abschnitt 2 als bekannt an, dass Symmetrien durch Gruppen beschrieben werden. Wem etwa der Begriff einer Gruppe oder einer Äquivalenzrelation unbekannt ist, wird trotzdem fast alles verstehen können.

1.1 Vom anschaulich-geometrischen ...

Obwohl das aus dem Griechischen stammende Wort Symmetrie ursprünglich etwa „Ebenmaß“ und „Wohlproportioniertheit“ bedeutete [weyl], ist der Begriff im heutigen Alltagsverständnis der in der Mathematik gebräuchlichen Version deutlich näher. Als einfachsten, sofort einleuchtenden Fall machen wir folgende

Erste, geometrische Definition: Eine Figur besitzt *bilaterale Symmetrie*, wenn sie bei Spiegelung an einer Achse in sich selbst übergeht.

Beispiele sind die Buchstaben Y, M, M, E, T, I, E ..., ein Auto oder Fahrrad von oben oder vorne gesehen, in etwas weniger perfekter Ausführung ein menschliches Gesicht und tausende weitere, einfach zu findende, Beispiele. Was aber ist mit dem Buchstaben S oder Z, einem gleichseitigen Dreieck oder Siebeneck? In nur leichter Verallgemeinerung und immer noch geometrisch orientiert zitieren wir hier einen der ersten in mathematischer Literatur vorkommenden Annäherungsversuche, nämlich

Möbius’ Definition: Eine Figur soll symmetrisch heißen, wenn sie einer ihr gleichen Figur auf mehr als nur eine Art gleich gesetzt werden kann. [möbius]

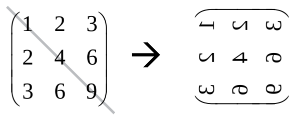
Sie schließt alle (euklidisch-) geometrischen Transformationen ein, wie die Drehung um 180 Grad um einen festen Punk, die die Buchstaben S und Z ‘sich selbst gleich setzen’, und die Drehungen um Siebentel einer ganzen Drehung, die ein regemäßiges Siebeneck in sich selbst überführen.

1.2 ... über leichte Verallgemeinerungen ...

In der Mathematik ist für ein rechteckiges Zahlenschema der Ausdruck Matrix gebräuchlich. Eine Matrix wie

heißt „symmetrische Matrix“. Wird man gefragt, wieso diese Matrix symmetrisch sein soll, so bekommt man gewöhnlich als Antwort, die Matrix sei „symmetrisch bezüglich Spiegelung an der Diagonalen“ (gemeint ist die Diagonale von links oben nach rechts unten), was denn auch jedem sofort einleuchtet: Der Eintrag oben in der Mitte ist gleich dem in der Mitte links, der Eintrag oben rechts ist der gleiche wie der links unten, und so weiter.

Dabei ist aber fast unbemerkt schon ein Schritt Abstraktion geschehen, denn niemand denkt bei der „Spiegelung an der Diagonalen“ wirklich an eine *geometrische* Spiegelung an der Diagonalen, bei der folgendes geschehen würde:



Die Matrix geht unter einer echten Spiegelung *nicht* in sich selbst über. Legte man also die geometrische Definition zu Grunde, wäre diese Matrix eben nicht symmetrisch. Wenn wir auch diese Art von Matrizen symmetrisch nennen wollen, müssen wir die *Definition verallgemeinern*. Um herauszufinden, wie wir das tun müssen, suchen wir nach weiteren Dingen, die für uns intuitiv eine gewisse Symmetrie besitzen.

$$\text{Transponieren}: Mat^{n,n} \to Mat^{n,n}$$
$$(a_{i,j}) \mapsto (a_{j,i})$$

Johannes Nübler, Cordian Riener, Academia dei Lincei, Rom 28.2.2005.

Hier ein Beispiel, das die Abstraktion nur ein klein wenig mehr strapaziert: Die Einträge der Matrix seien komplexe Zahlen $a+ib$ mit Realteil und Imaginärteil . Irgendeine Art von Symmetrie hat doch eine Matrix wie $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 27 \end{pmatrix}$ sicher! Aber auch die gerade eben zugelassene etwas lockere Auffassung von einer „Spiegelung" an der Diagonalen reicht nicht ganz aus, denn das Ergebnis wäre $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 27 \end{pmatrix}$. Man muss zusätzlich noch jeden Eintrag durch seinen komplex konjugierten Wert ersetzen. Eine solche Matrix, die sich bei kombinierter Anwendung von Transposition und komplexer Konjugation nicht ändert, heißt „selbstadjungiert".

1.3 ... zu einer abstrakten Fassung

Wir wollen uns also von der geometrischen Vorstellung von Symmetrie lösen. Wir haben mehrfach festgestellt, dass wir ein Objekt dann als symmetrisch empfinden, wenn wir mit ihm etwas anstellen können, und es danach noch genauso aussieht wie vorher. Wir greifen diese Beobachtung auf, und betrachten die Menge von Transformationen, unter denen ein Objekt sich nicht verändert. Transformationen *dürfen* natürlich auch geometrische Abbildungen wie Spiegelungen und Drehungen sein, *müssen* aber nicht. Im Falle unserer „symmetrischen Matrix" ist die Transformation die, die aus dem Eintrag in der i-ten Zeile und -ten Spalte den in der -ten Zeile und -ten Spalte macht:

Ebenso ist die Transformation, unter der eine selbstadjungierte Matrix unverändert bleibt, einfach anzugeben:

$$\text{Adjungieren}: Mat^{n,n} \to Mat^{n,n}$$
$$(a_{i,j}) \mapsto (\overline{a_{j,i}})$$

So kommen wir schließlich zu einer

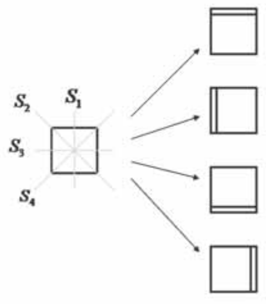
Abstrakten Definition: Symmetrie ist die Invarianz von „Etwas“ unter einer Menge von „Transformationen“.

2 Auf wieviele Arten kann Symmetrie gebrochen werden?

2.1 Der Weg zur Formel

Den Begriff der Symmetriebrechung machen wir uns am besten an einem Beispiel klar. Dazu betrachten wir ein Quadrat. Seine Symmetriegruppe G ist die Gruppe $D_4 = \{id, R, R^2, R^3, S_1, S_2, S_3, S_4\}$, bestehend aus der Identität und drei Rotationen, sowie vier Spiegelungen. Die Rotation um 90 Grad ist mit R bezeichnet, der Exponent zwei (drei) bedeutet, dass die Operation zweimal (dreimal) hintereinander ausgeführt werden soll.

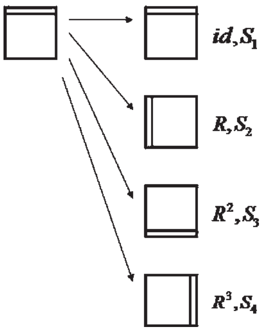
Wir *brechen* nun die Symmetrie des Quadrates, indem wir den Strich einer seiner Seiten verdoppeln. Wenn wir den oberen Strich nehmen, folgen wir dem obersten der vier Pfeile in der Zeichnung. Das Ergebnis hat nicht mehr alle Symmetrien des Quadrates: Die Drehung um 90 Grad beispielsweise macht aus dem Doppelstrich oben einen Doppelstrich links. Dieses Verlorengehen von Symmetrie bezeichnet man als *Symmetriebrechung*.



Frage: Auf wieviele Arten kann eine bestimmte Symmetriebrechung erfolgen?

Anschaulich ist uns klar, dass es hier genau die vier in der Zeichnung dargestellten Arten gibt. Wir suchen aber keine Antwort in Prosaform, sondern eine *Formel* für die Anzahl der Arten. Um die Frage mathematisch zu beantworten, muss sie sicher präzisiert werden. Da wir aber noch nicht wissen wie das geht, versuchen wir eine Antwort an unserem Beispiel herauszubekommen.

Zumindest für den Zugang, den wir uns überlegt haben, ist der Schlüssel zu einer Antwort folgende Beobachtung. Wendet man eine Transformation der alten Symmetriegruppe auf den Zustand gebrochener Symmetrie (von jetzt an mit ZGS bezeichnet) an, also auf das Quadrat mit Doppelstrich, so entsteht - möglicherweise - eine andere Realisierung des Zustandes gebrochener Symmetrie. Wenn wir beispielsweise auf das Quadrat mit Doppelstich *oben* das Element R der alten Symmetriegruppe anwenden, so erhalten wir ein Quadrat mit Doppelstrich *links*. Das gleiche geschieht, wenn wir die Spiegelung S_2 anwenden. Wenden wir aber das Element R^2 an, so erhalten wir ein Quadrat mit Doppelstrich unten und bei der Spiegelung S_1 an der Senkrechten passiert gar nichts: Hier erhalten wir keine neue Realisierung des ZGS. In der Zeichnung haben wir auf das Quadrat mit Doppelstrich oben nacheinander alle Transformationen der alten Symmetriegruppe D_4 angewendet und nach dem erhaltenen Ergebnis sortiert. Zusammenfassend notieren wir die



Beobachtung: Die verschiedenen möglichen ZGS gehen durch Anwendung der Operationen der alten Symmetriegruppe G ineinander über. Es gibt jedoch möglicherweise verschiedene Gruppenelemente, die die gleiche Wirkung auf den ZGS haben: $g_1 \neq g_2$, aber .

Mindestens in unserem Beispiel ist die alte Symmetriegruppe in gleich mächtige Klassen (mit je zwei Elementen) zerfallen. Die Klasse, die den ZGS invariant lässt, ist natürlich seine übriggebliebene Symmetriegruppe. Sie wird im folgenden mit H bezeichnet. Wir können also die Frage jetzt so formulieren:

Frage: Wie viele Klassen von gibt es, die einen ZGS in einen anderen überführen?

Auch diese Frage ist noch nicht direkt mathematisch beantwortbar. Denn da wir bisher noch keinen mathematischen Begriff dafür haben, was ein Zustand gebrochener Symmetrie sein soll, haben wir die Einteilung in Klassen nur nach Anschauungsgründen vorgenommen. Wenn wir wissen wollen, wieviele Klassen es gibt, müssen wir die Frage beantworten, wann

(1)

gilt. Es reicht offensichtlich nicht, die angewendeten Gruppenelemente zu vergleichen. Denn in einigen Fällen sind diese verschieden, und das Gleichheitszeichen stimmt, in anderen Fällen sind sie verschieden, und Gleichheit ist nicht der Fall. (Anhand des Quadrates mit Doppelstrich suche man nochmals nach Beispielen für beide Fälle, um sich das Problem klar zu machen.)

Wir müssen eine Eigenschaft des ZGS ausnutzen, um formalisieren zu können, wann Gleichheit gilt. Und welche Eigenschaft wird das sein, wenn nicht seine *verbleibende Symmetrie*? Ein Element h der verbleibenden Symmetriegruppe H können wir sicher einschieben, denn diese haben ja gerade die Eigenschaft, den ZGS invariant zu lassen: $ZGS = h(ZGS)$. Damit haben wir also

G $g \in G$ $g_2 h$ $g_1(ZGS) \overset{?}{=} g_2(ZGS)$ $g_1(ZGS) = g_2 h(ZGS)$

Vielleicht führt es zum Ziel, wenn wir jetzt einfach die beiden Vorfaktoren vergleichen? Wir führen also folgende (Besuchern einer Algebra-Vorlesung wohlbekannte) *Relation* ein:

$g_1 \sim g_2 \quad \Leftrightarrow \quad$ es existiert ein $h \in H$, so dass $g_1 = g_2 h$.

Dass es sich in der Tat um eine *Äquivalenzrelation* handelt, ist einfach nachgerechnet. Die Menge aller Elemente, die zu einem gegebenen in Relation stehen, wird mit hey, sowas bezeichnet, und heißt die *Äquivalenzklasse* von g_1.

Wir können also unsere Frage endlich mathematisch fassen:

Frage: Gegeben eine Symmetriegruppe G und eine Untergruppe H. Wie viele Äquivalenzklassen gH gibt es?

Die Antwort darauf kennt jeder Besucher der Vorlesung Algebra I als den *Index* der Untergruppe H in G. Wir wollen sie deswegen auch hier nur angeben. Sie lautet: Teile die Anzahl der Elemente der alten Symmetriegruppe durch die Anzahl der Elemente der neuen Symmetriegruppe, also $\# = \frac{|G|}{|H|}$. (Das Zeichen # bedeutet „Anzahl“) [armst]

Bevor wir das Ergebnis noch einmal zusammenfassen, ist eine Ungenauigkeit zu beseitigen. Wir haben gezeigt: *Wenn* es ein $h \in H$ gibt, so dass , so dass dann das Gleichheitszeichen in Gleichung 1 richtig ist. Aber ist es auch *falsch*, wenn es *kein* solches gibt? Spätestens jetzt müssen wir endlich sagen, was ein Zustand gebrochener Symmetrie eigentlich sein soll. Und wie Mathematiker das so tun, definieren wir so, dass *mathematisch gesehen* alles passt:

Definition: Gegeben sei ein Objekt mit der Symmetriegruppe . Ein *Zustand gebrochener Symmetrie* ist eine Untergruppe H von G.

Nun müsste man sich wieder fragen, ob denn jede Untergruppe einer gegebenen Symmetriegruppe überhaupt als verbleibende Symmetriegruppe eines Zustandes, der aus dem alten durch eine Symmetriebrechung hervorgeht, auftreten kann. Diese Frage wollen wir nicht angehen.

Statt dessen fassen wir zusammen:

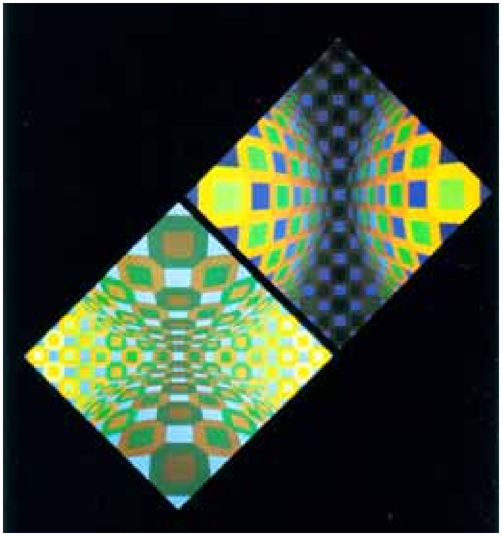
Ergebnis: *Die Anzahl der Möglichkeiten auf die eine Symmetriebrechung erfolgen kann, berechnet sich wie folgt: Teile die Anzahl der Elemente der Symmetriegruppe des ungebrochenen Zustandes durch die Anzahl der Elemente der verbleibenden Symmetriegruppe des neuen Zustandes:*

$$\# = \frac{|G|}{|H|} \qquad (2)$$

2.2 Ein Beispiel

Wir wollen die gefundene Formel am Beispiel der beiden Bilder *Ondocto-Re* und *Octo-Biss* von Victor Vasarely überprüfen. In jedem der beiden Bilder scheint das Muster zu jeweils zwei Ecken hin die zweidimensionale Fläche zu verlassen und sich dem Betrachter entgegenzuwölben, als würden unter einem gemusterten Tuch Luftballons aufgeblasen.

Wir stellen uns vor, wir würden „aus den Luftballons die Luft herauslassen“, so dass die dreidimensionale Wirkung verschwindet und in jedem der beiden Bilder einfach eine gleichmäßig gemusterte Fläche vor uns liegt. Außerdem wollen wir vorerst von allen Farben absehen und nur das *Muster* betrachten. Jedes der beiden Bilder hätte dann als Symmetriegruppe die D_4, die gleiche Gruppe wie das Quadrat unseres nicht künstlerischen Beispiels oben.



Durch „Aufblasen der Ballons“ wird nun diese vierzählige Symmetrie gebrochen, und jedes der beiden Bilder hat als Symmetriegruppe nur noch die D_2: Die Identität, eine Drehung um 180 Grad und Spiegelungen an der Horizontalen und der Vertikalen. Anschaulich ist uns auch hier sofort klar, dass diese Art der Symmetriebrechung auf genau die zwei Arten erfolgen kann, die Vasarely gemalt hat: Die beiden „Luftballons“ oben und unten oder links und rechts zu platzieren. Wollen wir nun sehen, ob die Mathematik das auch liefert.

Die Symmetriegruppe vor der Brechung war die D_4, und hat 8 Elemente. Der Zustand gebrochener Symmetrie ist die Untergruppe $D_2 \subset D_4$, diese hat   Elemente.

$$D_4 \rightarrow D_2$$

2.3 Symmetrieteilung statt Symmetriebrechung?

Als Ergebnis des Abschnittes 2.1 haben wir Formel 2 erhalten. Sie sagt uns, auf wieviele Arten eine bestimmte Symmetriebrechung erfolgen kann. Diese Anzahl rechnet man aus, indem man die Anzahl der Symmetrien vor der Brechung durch die Anzahl der Symmetrien nach der Brechung teilt. Geht aber bei der Brechung denn wirklich Symmetrie verloren? Auf eine Art sicher, denn ein Zustand gebrochener Symmetrie hat eben oft weniger Symmetrien als vorher, daher der Name.

Andererseits haben wir ja bereits bei der Mathematisierung des Problems die schließlich zur Lösung führende Bemerkung gemacht, dass das Anwenden der alten, auf den ersten Blick nicht mehr vorhandenen Symmetrieoperationen nicht irgendetwas Beliebiges mit dem Zustand gebrochener Symmetrie anstellt, sondern ihn in eine der anderen möglichen Realisierungen eben dieses Zustandes überführt. In diesem Sinne ist die Symmetrie also noch vorhanden!

Stellt man Formel 2 um, so erhält man:

$$|G| = \#|H|$$

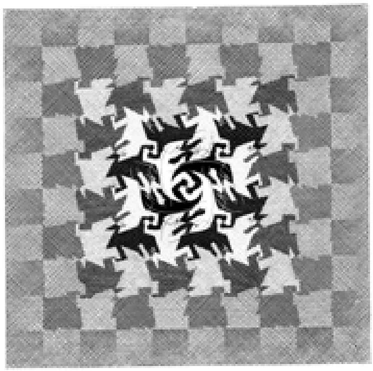
Die ursprüngliche Anzahl an Symmetrien ist also das Produkt aus zwei Dingen: der Anzahl der noch vorhandenen Symmetrien und der Anzahl der Möglichkeiten, diese zu realisieren. Aus diesem Grunde sagen Ian Stewart und Martin Golubitzky in ihrem Buch „Denkt Gott symmetrisch“ [stew], dass *Symmetrieteilung* der bessere Ausdruck sei.

Betrachten wir nochmals das Beispiel der beiden Bilder von Vasarely aus Abschnitt 2.2. Die *acht* Symmetrien des „gemusterten Tuches ohne Luft in den Ballons“ werden hier *aufgeteilt* auf die *zwei* Bilder mit jeweils *vier* Symmetrien.

3 Farbsymmetrie - Symmetriebrechung durch Farbgebung

Bilder sind oft bunt. Vasarely setzt die Farbgebung seiner geometrischen Werke gezielt ein, um optische Effekte zu erreichen. In der Tat war er der Ansicht, Form und Farbe gebe es überhaupt nicht von einander getrennt. [joray] Man habe es immer mit einer Kombination beider zu tun, einer „Form-Farbe“. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie geometrische Symmetrie durch Farbgebung gebrochen werden kann, und wieder berechnet werden, auf wieviele Arten das geschehen kann. Wir werden sehen, dass wir die oben abgeleitete Formel wörtlich übernehmen können, auch wenn Farbe im Spiel ist. Das gute an Mathematik ist eben, dass einmal angestellte Überlegungen auch dann noch richtig sind, wenn die konkrete Realisierung plötzlich eine ganz andere ist. In der Tat hatten wir, als wir unseren Beitrag zum Rom-Seminar vorbereiteten, beim Herleiten der Formel noch nicht vorgehabt, uns überhaupt mit Farbe zu beschäftigen.

Da jedoch alle Theorie grau ist, wollen wir selbige anhand nur schwarz-weißer Bilder entwickeln und zwar bietet sich Eschers Holzschnitt *Entwicklung I* dafür an. [ernst]



$C_4 = \{id, R, R^2, R^3\}$

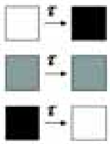
3.1 Graue Theorie

3.1.1 Die geometrischen Symmetrien ...

Um Farbgebung als *Brechung* von Symmetrie verstehen zu können, stellen wir uns vor, Eschers Bild sei statt teils schwarz, teils weiß nur in dem einheitlichen Grauton gemalt, der am Rand herrscht. Nur die Umrisse der Formen seien irgendwie kenntlich gemacht, z.B. als Linien. Die Symmetrien eines Bildes in diesem gedachten Grau bezeichnen wir als die *geometrischen Symmetrien.* Sie beachten nur die verwendeten Formen, und lassen deren Farbgebung außer Acht. Die geometrische Symmetriegruppe von *Entwicklung I* besteht aus der Identität und den Drehungen um 90, 180 und 270 Grad. Diese Gruppe heißt die „zyklische Gruppe der Ordnung vier“ oder auch . Sie enthält im Vergleich zur schon oft vorgekommenen D_4 keine Spiegelungen.

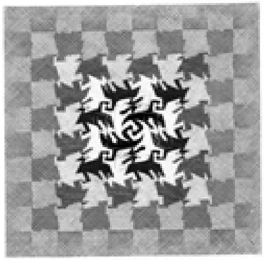
3.1.2 ... und ihre Brechung durch Farbgebung

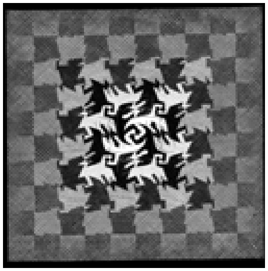
Da wir später Teile des Bildes schwarz, andere weiß färben werden, führen wir den Operator „Grauwert tauschen“ ein, und bezeichnen ihn mit τ. Schwarz wird weiß, weiß wird schwarz und grau bleibt grau.



Ist nun das Bild im Einheitsgrau eingefärbt, so ist das Anwenden des Operators eine Symmetrieoperation. Sie lässt das Bild unverändert. Wir können jede geometrische Symmetrieoperation anwenden, entweder indem wir den Grauwert lassen wie er ist, oder indem wir hell gegen dunkel tauschen; denn „grau wird grau“ und grau ist ja die einzige Farbe. Die vollständige Symmetriegruppe des nur grau eingefärbten Bildes ist also die aus 8 Elementen bestehende Gruppe

Nun wird das Bild so eingefärbt, wie Escher es getan hat. Die Operation (die Rotation um 90 Grad ohne Austauschen von Schwarz gegen Weiß), die vor der Färbung eine Symmetrieoperation war, verändert jetzt das Bild: Die Reptilien mit Körperachse in horizontaler Richtung sind im Original schwarz, nach der Drehung aber weiß. ist also *keine* Symmetrieoperation mehr.





Auch die Operation , die das Bild geometrisch lässt wie es ist, aber schwarz und weiß vertauscht, ist keine Symmetrieoperation mehr. Diese Operation lässt sich mit einem Bildbearbeitungsprogramm einfach durchführen. Das Ergebnis ist hier neben Eschers Original abgebildet.

Die Symmetrie wird gebrochen - *aber nicht geometrisch, sondern durch die unterschiedliche Färbung.* (Bemerkt? In diesem Beispiel haben die beiden Operationen (nur drehen) und (nur invertieren) exakt das gleiche Ergebnis.)

3.1.3 Die Mathematik spielt auch hier mit

Untersuchen wir, was die nach der Färbung verbleibende Symmetriegruppe ist! Von den rein geometrischen Symmetrien ist nur die Drehung um 180 Grad übriggeblieben. Aber das ist nicht alles! Wenn wir das Bild um 90 Grad drehen, müssen wir zusätzlich hell gegen dunkel tauschen, also anwenden. Auch diese Operation - bezeichnet mit - war ein Element der alten Symmetriegruppe . Entsprechendes gilt für die Drehung um 270 Grad. Auch hier müssen wir zusätzlich hell gegen dunkel tauschen, damit das Bild in sich selbst übergeht. Wir haben also folgende Situation:

Mathematisch unterscheidet sich die hier vorliegende Situation nicht von der, in der die Symmetriegruppen nur aus geometrische Symmetrien bestanden. Gruppen sind Gruppen, und wir wenden also unsere Formel für die Anzahl der Möglichkeiten an, die Symmetriegruppe *G* zur Untergruppe *H* zu brechen, und erhalten

$$\# = \frac{|G|}{|H|} = \frac{8}{4} = 2$$

Möglichkeiten. Und wieder gilt auch unsere in 2.1 gemachte Beobachtung, dass verschiedene Zustände gebrochener Symmetrie (von denen es nur zwei gibt, wie wir gerade ausgerechnet haben) durch Anwenden der alten Symmetrieoperationen ineinander übergehen. Die zweite der beiden Möglichkeiten erhielten wir ja oben z.B. durch Anwenden der Operation $id \otimes \tau$.

3.2. Die Fondation Vasarely in Aix-en-Provence

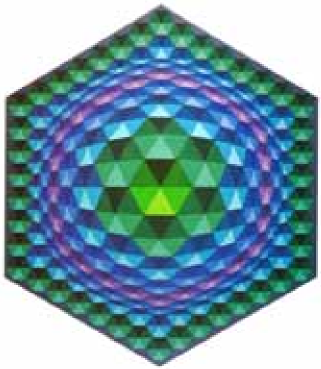
In Aix-en-Provence, wo Vasarely lange Zeit lebte, hat er die Fondation Vasarely bauen lassen. Die Pläne für das Gebäude und das Geld stammen von ihm selbst. Es ist ein Komplex aus Sechsecken mit je 16 Metern Durchmesser, an deren jeder Wand ein entsprechend großes Werk von Vasarely hängt. Auch die Aussenansicht des Gebäudes ist durchdacht und für uns hier interessant. Das *Muster* ist symmetrisch unter Spiegelung an der Senkrechten. Durch die Farbgebung geht diese Spiegelsymmetrie jedoch verloren.

Wir stellen uns statt der Schwarz-Weiß-Färbung alles in Grau vor. Dann besitzt die Fassade folgende Symmetrien: Spiegelung an der Senkrechten und - sieht man von den unteren vier Metern ohne Aluminiumverkleidung ab - Spiegelung an der Horizontalen sowie Drehung um 180 Grad. Das alles mit oder ohne Tauschen von hell gegen dunkel. Die Symmetriegruppe ist also . Durch die Farbgebung gehen einige Symmetrien verloren. Die Spiegelung an der Horizontalen bleibt, man darf sie aber jetzt nur noch ohne Tausch von hell gegen dunkel anwenden. Die Spiegelung an der Vertikalen und die Drehung sind nur noch in Verbindung mit dem Tausch von Hell gegen Dunkel erlaubt.

Die andere der zwei Möglichkeiten, die Symmetrie auf diese Art zu brechen wäre gewesen, das was jetzt weiß ist schwarz zu färben, und das was jetzt schwarz ist weiß.

3.3 Tetcie-II

Nun kommt endlich wieder Farbe ins Spiel. Das Bild *Tetcie-II* (1975) von Victor Vasarely ist äußerst farbenfroh und verdankt seine Wirkung sicher auch der Farbgebung.



Die *geometrische Symmetriegruppe* des Bildes ist die D_6, die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Sechsecks. Bei einer Drehung um 60 Grad beispielsweise geht das *Muster* wieder in sich selbst über.

Um zu verstehen, was farblich passiert, betrachten wir das mittlere Sechseck. Es besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, die alle grün sind, aber unterschiedlich hell. Und zwar werden die Grüntöne nach oben immer dunkler, nach unten heller. Man kann sich ein neutrales, mittelmäßig helles Grün vorstellen, das genau in der Mitte liegt. Das gleiche gilt für alle sechseckigen Waben des Bildes. Manche sind bläulich, manche rosa, aber immer sind die dunklen Töne oben, die hellen unten. Diese Art der Verteilung der Helligkeit bricht die Symmetrie! Wenn wir das Bild um 60 Grad nach links drehen, geht zwar das Muster in sich über, aber das Bild eben nicht. Nach der Drehung sind die jeweils dunkelsten Dreiecke einer jeden Wabe oben links und die hellsten unten rechts, statt wie vorher genau oben bzw. unten. Auf wieviele Weisen konnte eine derartige Symmetriebrechung erfolgen?

Dazu müssen wir feststellen, was der Operator τ machen soll. Er soll in jedem Sechseck den Helligkeitswert der Farbe des Sechsecks an dem gedachten mittleren Ton spiegeln. Die hellen Töne gehen in die dunklen über, und umgekehrt.

Nun also ran an die Formel. Wir bestimmen die Symmetriegruppe vor Brechung durch die ungleiche Helligkeitsverteilung. Es ist die Symmetriegruppe des Sechsecks, wobei man jede Operation entweder mit oder ohne Anwendung von τ ausführen darf. Die D_6 hat 12 Elemente, die Symmetriegruppe $G = D_6 \otimes \{id, \tau\}$ also 24. Nun zählen wir die Symmetrien des Zustandes gebrochener Symmetrie. Die Identität und die Spiegelung an der Senkrechten sind immer noch erlaubt. Desweiteren darf man das Bild an der Horizontalen spiegeln sowie es um 180 Grad drehen, wenn man zusätzlich noch helle Töne gegen dunkle tauscht. Es bleibt also die Symmetriegruppe $H = \{id, S_v, R_\pi \otimes \tau, S_h \otimes \tau\}$, die vier Elemente aufweist. Unsere Formel ergibt also

$$\# = \frac{|G|}{|H|} = \frac{24}{4} = 6$$

Möglichkeiten. Es ist auch klar „an welche Möglichkeiten die Mathematik dachte“: Das jeweils dunkelste Dreieck eines jeden Sechsecks hätte jedes der sechs Dreiecke sein können.

Quellen

[armst] M. A. Armstrong - Groups and symmetry, Springer (1988)
[ernst] Ernst, Bruno - Der Zauberspiegel des M. C. Escher, Taco Verlagsgesellschaft (1986)
[joray] Joray, Marcel - Vasarely, Editions du Griffon (1976)
[möbius] Baltzer, R. (Ed.) Möbius, F. A. Gesammelte Werke. Leipzig, Germany: S. Hirzel, 1885-1887
[stew] Stewart, Ian und Golubitsky, Martin - Denkt Gott symmetrisch?, Birkhäuser (1993)
[weyl] Weyl, Hermann - Symmetrie, Birkäuser (1955)

Pau Carrió Gaspar

Mehr als Dimensionen

In diesem Aufsatz wird der Begriff der „Dimension“ untersucht. Zuerst werden verschiedene mathematische Definitionen von „Dimension“ eingeführt. Danach werden einige Beispiele von Kunstwerken beschrieben. Das Ziel ist, verschiedene Darstellungen und Interpretationen von ‘Dimensionen’ zu zeigen.

Wenn man in mathematischen Büchern nachschlägt, so findet man unterschiedliche Definitionen von „Dimension“. Alle Definitionen ordnen einer Menge eine positive reelle Zahl zu. Sie unterscheiden sich bezüglich der Mengen, die betrachtet werden, und nach den Methoden, die benutzt werden, um die positive reelle Zahl zu bestimmen. Zum Beispiel wird in der Topologie eine „Dimension“ definiert, indem man untersucht, wie die Menge den Raum füllt. Eine allgemeine Methode, um die Dimension einer Familie von Mengen zu bestimmen, ist, die Überdeckungseigenschaften zu untersuchen. Zum Beispiel : „Ein topologischer Raum X hat Lebesgue-Überdeckungs-Dimension m, falls es für jede offene Überdeckung von X eine feinere offene Überdeckung gibt, so dass jeder Punkt höchstens in m+1 Elementen der Überdeckung enthalten ist“. In der Algebra gibt es andre Definitionen, z. B. „Die Zahl der Elemente einer Basis von einem Vektorraum hisst die Dimension von V.“ Weitere Beispiele sind in entsprechenden mathematischen Büchern zu finden.

Was versteht man unter „Dimension“ in der Kunst?

Wir beschränken uns auf die Frage: Was ist „Dimension“ in der europäischen Kunst der letzten tausend Jahre?

In der Kunst werden neben den räumlichen Dimensionen andere Interpretationen von Dimension, wie etwa Zeit, Gott, Unbewusstsein, Irrationalität etc. untersucht. Sie werden in der Kunstgeschichte verschieden verstanden, interpretiert und dargestellt. Gründe dafür sind das Weltbild und die verfügbaren Techniken und Materialien der jeweiligen Zeit.

Im Mittelalter waren die Bilder zweidimensional: Die Figuren waren flach, und hatten alle eine ähnliche Größe. Nur die Figuren, die wichtig sind, werden größer dargestellt. Auch hat man im Mittelalter „alles“ dargestellt. Ein Grund dafür ist, dass Gott der Betrachter des Bildes ist. Weil Gott mehr Dimensionen gleichzeitig schauen kann, können wir nicht zwischen Vorder- und Hintergrund im Bild unterscheiden.

Ein Beispiel gibt Abbildung 1 mit dem Teppich von Bayeaux, auf welchem die Geschichte der Schlacht von Hastings erzählt wird. Da es sich um eine Geschichte handelt, ist die zeitliche Dimension auch zu finden.

Abb. 1: Teppich von Bayeaux.

In der Renaissance wurde Gott auf eine andere Stufe gestellt. Der Mensch wurde in das Zentrum des Weltbilds gerückt. Die Technik der Perspektive ermöglichte eine „realistische“ Darstellung des dreidimensionalen Raums. Im Gegensatz zum Mittelalter werden Teile von Personen, Gebäuden etc. nicht gemalt. Als Beispiel sehen wir Abbildung 2, die „Città Ideale“ (ca. 1475) von Piero della Francesca. In Città Ideale sehen wir eine Stadt; Teile der Stadt - etwa das Hintere des Gebäudes - sind vor dem Betrachter versteckt, so wie ein menschlicher Betrachter es sehen würde. Ein weiteres Merkmal dieses Bildes ist, dass es kein sakrales Bild des Zweiten Jerusalem ist, sondern ein Bild irgendeiner Stadt. Hier erobert man die dritte Dimension.

Abb. 2: Piero della Francesca, In Città Ideale.

Pau Carrió Gaspar, Academia dei Lincei, Rom 28.2.2005.

Während des XIX. Jahrhunderts werden neue Geometrien entwickelt. Neben den Mathematikern begannen Künstler die Geometrie der Wahrnehmung und der Darstellung mit anderen Methoden zu untersuchen. Auch Schriftsteller interessierten sich hierfür, z. B. Edwin Abbot mit Flattland (1844) und Claude Bragdon mit Man in the Square: A Higher Space Parable (1912). Hier begann man andere Raumdimensionen zu untersuchen.

Als radikale Alternative zur Renaissance erscheint der Kubismus. Der Kubismus forderte neue Sprachregeln im Gegensatz zu vorigen plastischen Konventionen und Themen. Hinsichtlich der Themen fordert der Kubismus Antinaturalismus, Antitradition, Entmenschlichung; zusammenfassend: eine Kunst, in welcher der Künstler die Elemente seines Werkes auf seine subjektive Wahrnehmung gründet. Deswegen muss der Raum ganz anders verstanden werden. Um ein dreidimensionales Objekte zu erfassen, war es nötig, Schnitte oder verschiedene Blicke auf das Objekt darzustellen. Juan Gris (Abbildung 4), Jacques Villon und George Braque waren Kubisten, die von der Mathematik beeinflusst waren. Mit dem Kubismus stellte man dreidimensionale Objekte in zwei Dimensionen dar, indem man mehrere Projektionen zugleich auf die Leinwand malte. Darin lag die Neuigkeit in der Darstellungsform.

Eine andere Interpretation der Dimension kam mit der Entdeckung der Relativitätstheorie durch Albert Einstein. Einstein veröffentlichte die spezielle Relativitätstheorie 1905 und die allgemeine Relativitätstheorie 1916. Schon in den zwanziger Jahren wurde die „vierte Dimension" fast nur als Zeit verstanden. Um die Zeit darzustellen, interessierten sich Künstler für die Bewegung. Die italienischen Futuristen forderten in ihrem Manifest von 1909 Modernität, Industrialismus, Technologie und Dynamismus. In Abbildung 3 sehen wir Unique Forms of Continuity in Space (1931) von Umberto Boccioni. In diesem Werk zeigt Boccioni Geschwindigkeit und Kraft in Skulpturform. Die Figur zeigt zwei Bewegungen: eine Bewegung nach vorne und die Bewegung ihrer Haut, die ihren Körper übersteigt und

Abb. 3: Umberto Boccioni, Unique Forms of Continuity in Space (1931).

sich wie eine Fahne, die vom Wind modelliert wird, bewegt. In Abbildung 5 sehen wir Nude Descending a Staircase, No. 2 (1912) von Marcel Duchamp, wo Schnitte einer Frauenfigur übereinander dargestellt sind. Dieses Werk wurde inspiriert durch die Photos von Eadweard Muybridge.

Die Dimensionen wurden aber auch anders verstanden als Raum und Zeit beziehungsweise Bewegung. Für einige Künstler waren die Dimensionen oberhalb von drei die Welt der platonischen Ideen, der Mystizismus oder die Irrationalität. 1936 veröffentlichte der Maler Tamkó Sirató Károly das „Manifeste dimensioniste“. Dieses sagte, dass die Dichter und Schriftsteller die Fläche erobern müssten (siehe Abbildung 6), dass die Malerei die Fläche verlassen und den Raum füllen müsse, und dass die Skulptur „den geschlossenen, unbeweglichen und toten Raum verlassen“ müsse; das heißt ,der dreidimensionale euklidische Raum sollte durch den vierdimensionalen Raum von Minkowski ersetzt werden. Weiterhin erklärte Sirató die vierte Dimensionen als Raum des Geistigen und als Zeit. Das Manifest wurde von verschiedenen Künstlern, wie Calder, Huidobro, Miro, Arp ,Duchamp, Kandinsky, Delaunay unterschrieben , aber es hatte keine große Wirkung in den 30er Jahren.

Andre Breton kombinierte in seiner surrealistischen Theorie die raum-zeitlichen Dimensionen mit Dimensionen, in denen Irrationales und Unterbewusstsein stehen. Das beeinflusste Max Ernst und Salvador Dali in „La persistencia de la memoria (1931)“ und „Corpus Hypercubicus“(1954)- hier ist auch der abgewickelte vierdimensionale Würfel zu betrachten.

Auch in der jüngsten Zeit arbeiten Künstler mit Dimensionen. Manfred Mohr hat sich für die rationelle Herstellung von Kunst und die Systematisierung des Bildbaus interessiert, um eine Bildsprache, die ästhetische Zusammenhänge rational nachvollziehbar macht, zu finden. In seinem Werk Counterpoint finden wir Projektionen von Kanten sechsdimensionaler Würfel, die aleatorisch gewählt werden. Für eine vollständige Erklärung beachte man http://www.emohr.com.

Auch haben einige Künstler wie Vik Muniz das Manifest von Sirató so verstanden, dass sie an Stelle der für die Plastik üblichen, festen Materialien wie Marmor, Eisen, Bronze beweglichere und flüchtigere Medien verwenden, wie etwa Wasserdampf oder Seifenblasen.

Nicht nur in der Malerei und Plastik werden Dimensionen untersucht oder verwendet: in der modernen Literatur - vor allem in der Scince-Fiction-Literatur - gibt es verschiedene

Abb. 4: Juan Gris, Man in the Cafe (1912).

Abb. 5: Marcel Duchamp, Nude Descending a Staircase, No. 2 (1912).

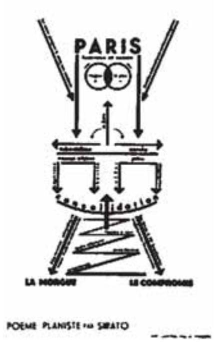


Abb. 6: Charles Sirato, Le Planisme (1936).

Abb. 7: Salvador Dali, Corpus Hypercubicus (1954).

Abb. 8: Vik Muniz, En el Cielo (2001).

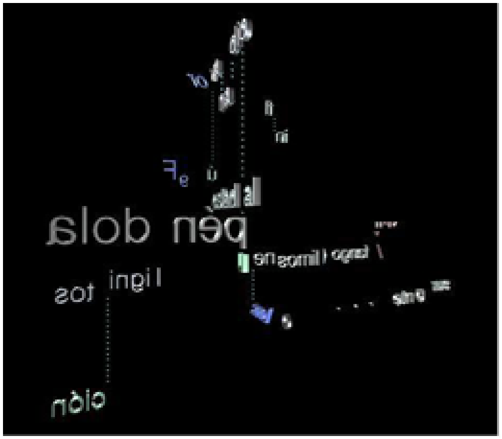


Abb. 9: Vpoemas von Antoni Muntadas.

Bücher, in denen vierdimensionale Würfeln erwähnt werden. „And He Built a Crooked House“ (1940) von Robert Heinlein etwa handelt von einem Haus, das als ein Netz eines nicht gefalteten vierdimensionalen Würfels gebaut wurde und abstürzt. Nach dem Absturz wird es zu einem wirklichen vierdimensionalen Würfel. In Alex Garland’s Roman „The Tesseract“ gibt es einen abgewickelten vierdimensionalen Würfel als Metapher für die Unfähigkeit der Personen, die Ursachen zu verstehen, die hinter den Ereignissen ihres Lebens stehen.

Einige Dichter benutzen die hyper-links im Internet um „vierdimensionale“ Gedichte zu schreiben. Sie erreichen es indem sie links zwischen verschiedene Wörter anlegen; dies heißt „virtuelle“ oder „elektronische“ Dichtung. Die Gedichte können in vier Richtungen gelesen werden: links-rechts, oben-unten , vorne-hinten, und in Richtung der Hypertext-Verbindungen. Eine wichtige Eigenschaft ist, dass die Lektüre des Gedichts nicht vom Dichter vorgeschrieben wird, sondern vom Zufallsweg, den der Leser nimmt, abhängt. Als Beispiel sehen wir Abbildung9; es stellt das Gedicht Vpoemas von Antoni Muntadas dar.

So wie in der Mathematik, hängt der Sinn von „Dimension“ in der Kunst vom Kontext ab. Allerdings versucht man in der Kunst die menschliche Wirklichkeit besser auszudrücken, anstatt einer Menge eine Zahl zuzuordnen.

Links- und Bibliographie

http://alem3d.obidos.org/en/
http://artling.tripod.com/id11.html
http://www.emohr.com/index.shtml
http://boek861.com/padin/br_dic/o.htm
http://www.ics.uci.edu/%7Eeppstein/junkyard/highdim.html
Aragon, Louis: Escritos de arte moderno, Editorial: Síntesis
Mantiewicz, Richard: Historia de las matemáticas, Editorial: Paidós

Teil II

Computerkunst

Michael Rottmann

Künstlerische Computergrafik I — Die frühen Jahre der Computerkunst

Einleitung

Das Jahr 1965 gilt im Allgemeinen als das Geburtsjahr der Computerkunst. Damals fanden die ersten Ausstellungen digitaler Computergrafiken in Stuttgart und New York statt, es wurden also Bilder ausgestellt, die mit Hilfe eines digitalen Computers, eines „Elektronengehirns" angefertigt wurden. Im Jahr 2005 wird deshalb der 40. Geburtstag der Computerkunst gefeiert und gleichzeitig werden Ausstellungen eröffnet und Symposien gehalten, welche sich um die Darstellung der Anfänge der Computerkunst bemühen und deren Auswirkung auf die Kunst beleuchten: am Zentrum für Kunst und Medien (ZKM) in Karlsruhe „Die präzisen Vergnügen" mit frühen Arbeiten von Frieder Nake im Rahmen der Ausstellung „Die Algorithmische Revolution", die Bitforms Gallery in New York zeigt die Ausstellung „Scratchcode", eine Retrospektive der frühen Computerkunst und im Digital Art Museum Berlin war die Ausstellung „Nordic Pioneers", frühe Schwedische Computerkunst, im Zusammenhang mit der Transmediale05 zu sehen.

Diese kleine Auswahl zeigt bereits, dass es ein reges Interesse an der Geschichte der Computerkunst gibt. Das Wissen um die Entwicklung dieser Kunstgattung hilft die heutige Medienkunst besser zu verstehen, denn die Medienkunst ging vor allem aus der Videokunst und der Computerkunst hervor, die beide in den sechziger Jahren als eigenständige Gattungen entstanden sind.

Die ersten Computerkunst-Ausstellungen wurden noch kritisch diskutiert und rezensiert und wie immer stand die Frage nach der Kunst im Raume, aber mittlerweile hat sich die Medienkunst etabliert und es gibt Hochschulen und Museen, die sich der Produktion, Präsentation und Konservierung[1] dieser Kunstform widmen.

Computergrafiken sind digitale, also gerasterte und quantifizierte Bilder, die per se rechenbar sind. Eine Eigenschaft, welche die Gestaltung nach mathematischen Regeln erleichtert oder erst ermöglicht und welche die Bilder somit in das Blickfeld der Mathematik rückt.

Darüber hinaus waren es zunächst vor allem Mathematiker, Physiker oder Elektrotechniker mit künstlerischen Ambitionen, welche den Computer für die Produktion zweckfreier ästhetischer Bilder einsetzten und dabei häufig mathematische Verfahren für die Gestaltung der ästhetischen Objekte, wie sie selbst ihre Arbeiten in bewusster Abgrenzung zur Kunst bezeichneten, verwendeten.

Etymologie des Begriffes Computergrafik

Der Begriff „Computergrafik" ist sehr jung. Ein Kunstwort, das aus dem bereits vorhandenen Begriff „Graphik" (griechisch „*graphein*" für „*schreiben, ritzen, zeichnen*") und dem Begriff „Computer" zusammengesetzt wurde. Es handelt sich also um Grafiken, die unter Verwendung eines Computers entstehen.

Heute versteht man unter „Computergrafik" zum einen die Erzeugung, Verarbeitung und Analyse von Bildern mit Hilfe eines Computers. Dies bestätigt auch ein Blick in den Duden Informatik, der folgende Beschreibung liefert: „*Computergaphik (engl. computer graphics) [...] (graphische Datenverarbeitung): Disziplin innerhalb der Informatik, die sich mit der Erfassung, Speicherung, Verarbeitung und Ausgabe graphischer Darstellungen befasst.*"[2]. Diese Beschreibung deckt sich auch mit der amerikanischen Bezeichnung „computer graphics", worunter man die Darstellung von Bildern mit Hilfe eines Rechners, also auch Bilder aus dem Bereich der angewandten Graphik, zum Beispiel für Werbezwecke, technische oder wissenschaftliche Bilder versteht.

Zum anderen ist der Begriff „Computergrafik" aber auch eine „*Bezeichnung für grafische Objekte (auch komplette Gemälde) aus dem Bereich der bildenden Künste, die mit Hilfe von Computern erzeugt werden*", so das Bertelsmann Lexikon für Informatik, EDV und Computertechnik.[3]

[1] Vgl. Hans Dieter Huber, Collecting and Conserving Code, Vortrag gehalten auf dem Symposium „Entschwinden die Bilder? Ins Universum der digitalen Kunst!", Kunsthalle/ Universität Bremen 2005

[2] Duden Informatik, Herausgegeben von der Dudenredaktion, 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, Dudenverlag, Mannheim u.a. 1993

[3] Bertelsmann Lexikon - Informatik - EDV - Computertechnik, Herausgegeben vom Bertelsmann Lexikon Institut, Bertelsmann Lexikon Verlag, Gütersloh 1994


Michael Rottmann, Villa Massimo, Rom 2.3.2005.

Schon Anfang der sechziger Jahre etablierte sich der Begriff der Computergrafik, neben dem Begriff der Videokunst. Der deutsche Kritiker *Günter Pfeiffer* äußert in seinem Zeitungsartikel „Die Programmierung des Schönen" in der Frankfurter Allgemeinen Zeitung aus dem Jahre 1969, dass der Begriff der Computergraphik in den frühen sechziger Jahren durch *William A. Fetter* eingeführt wurde.[4] Fetter war in den sechziger Jahren Grafik Designer in der Entwicklung der Boeing Company und erstellte technische Zeichnungen am Computer. Zu diesem Zeitpunkt war der Begriff noch nicht unbedingt im Zusammenhang mit künstlerischen Arbeiten zu sehen.

Im deutschen Sprachgebrauch wurde der Begriff Computergrafik im Zusammenhang mit Computerkunst seit den ersten öffentlichen Ausstellungen von *Michael Noll*, *Georg Nees* und *Frieder Nake* im Jahr 1965 verwendet. Das Jahr 1965 wird deshalb als Geburtsjahr der Computerkunst angesehen.

Die künstlerische Computergrafik ist also, mathematisch gesprochen, eine Teilmenge der so genannten Computerkunst, wobei die frühe bildende Computerkunst im wesentlichen Computergrafik war. Der Begriff „Computerkunst" hat sich mittlerweile etabliert, ist aber recht unscharf. Eine unscharfe Bezeichnung deshalb, da der Begriff lediglich einen Hinweis auf das verwendete Medium liefert.[5] Die entstehenden Arbeiten sind zwar durch die medienspezifischen Eigenschaften des Computers bestimmt, aber dies lässt keinen direkten Rückschluss auf die Ausgestaltung der künstlerischen Arbeiten zu. Wie bei dem Begriff der Malerei, handelt es sich nicht um einen Stilbegriff mit dem eine gewisse Stilrichtung beschrieben wird. Dennoch lassen sich Computergrafiken in bestimmte Bildarten einteilen, was sich durch die jeweils erweiterten Gestaltungsmöglichkeiten ergibt, die mit der Weiterentwicklung des Computers und seiner Peripherie einhergingen. Heute wird der Begriff der Computerkunst häufig unter dem Begriff der Medienkunst subsumiert.

[4] Pfeiffer Günter, „Die Programmierung des Schönen". In: Frankfurter Allgemeine Zeitung Nr. 255, 3.11.1969, S.31

[5] Es wäre dasselbe, wenn man zum Beispiel von Ölmalkunst sprechen würde.

Entwicklungsgeschichte der (künstlerischen) Computergrafik

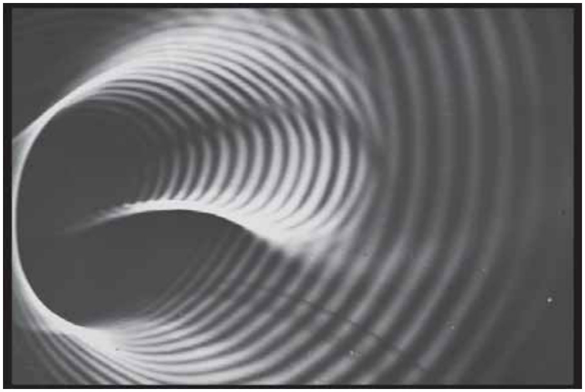
Die Entwicklung der Computergrafik beginnt etwa 1950 und ist im Zusammenhang mit den technischen Entwicklungen des Computers und seinen Peripheriegeräten zu sehen. Denn Computergrafiken müssen auf einem Peripheriegerät ausgegeben werden, damit sie für das kognitive System des Menschen sinnlich erfahrbar sind und dafür standen zunächst Plotter oder Zeichentische, später Bildschirme zur Verfügung. Die Geschichte der Computerkunst und damit der Computergrafik ist also immer auch eine Geschichte des Mediums Computer und da sie mit dieser eng gekoppelt ist, befindet sie sich immer noch in der Entwicklung.

Die frühe Computerkunst lässt sich, wenn man so will, auf die apparative analoge Kunst der fünfziger und früherer Jahre zurückführen. Bereits damals wurde mit frühen mechanischen Zeichen-, Projektions- und Fotoapparaten experimentiert und es wurden erste zweckfreie Bilder angefertigt.

Die 1950er Jahre

Elektronische Grafiken als Vorläufer der Computergrafik

Als eigentliche Vorläufer der (digitalen) Computergrafik gelten die sogenannten „Oscillons" oder „Oszillographien" oder auch „Oszillogramme", die man als eine Art „elektronische Grafiken" bezeichnen kann. Es handelt sich dabei um



Herbert W. Franke, Oszillogramm 1956.

analoge Grafiken, die mit Hilfe eines Analogrechners auf einem Kathodenstrahl-Oszillograph ausgegeben und für Reproduktionszwecke abfotografiert wurden. Im Unterschied zu den digitalen Grafiken war es verhältnismäßig schwer das gleiche Bild mehrmals zu erzeugen, da es viele verschiedene Parameter gab, die in Übereinstimmung gebracht werden mussten. Die Erzeugung des Bildes auf dem Bildschirm war eine andere, wie wir sie heute kennen: Der Elektronenstrahl wurde durch zwei Ablenkplatten horizontal und vertikal ausgelenkt und erzeugte direkt die gewünschte Leuchtspur auf dem fluoreszierenden Bildschirm. Es gab also keinen zeilenweise wandernden Elektronenstrahl wie in dem uns bekannten konventionellen Fernsehgerät.

Als Wegbereiter gelten vor allem *Herbert W. Franke* (geb. 1927) und der Amerikaner *Ben F. Laposky* (1914-2000). Franke wurde 1927 in Wien geboren, wo er auch Physik, Mathematik und Elektrotechnik studierte. Er fertigte seit 1956 Oszillogramme an, bei denen er ein Grundelement, zum Beispiel eine Spannungsform im Stil einer Sinuskurve, von einem Analogrechner verrechnen ließ. In der Ausstellung „Elektronische Graphik" wurden diese Arbeiten bereits 1959 im Museum für Angewandte Kunst in Wien gezeigt.

Laposky war Mathematiker und Künstler aus Cherokee Iowa. Seine „Oscillons" oder auch „Electronic Abstractions" wurden 1953 im Rahmen der ersten Ausstellung von Computergrafik im Sanford Museum von Cherokee gezeigt.

Diese elektronischen Grafiken beruhten unter anderem auf der Überlagerung von Schwingungen zeitabhängiger Funktionen. Die ersten monochromen Grafiken erzeugte *Laposky* 1952 mit Hilfe eines Analogrechners und schon 1956 produzierte er die ersten farbigen Analoggrafiken, indem beim Abfotografieren rotierende Farbfilter vor den Monitor gesetzt wurden.

Der erste bildschirmfähige Rechner „Whirlwind"

Der erste Computer mit Bildschirm hieß „Whirlwind" und wurde von 1945 bis 1949 am MIT als Großrechner entwickelt und im Dezember 1951 das erste mal der Öffentlichkeit in Edward R. Murrows´s bekannter Fernsehshow „*See it now*" vorgestellt. Die Zuschauer konnten sehen, wie auf dem Bildschirm der Gruß „*Hello, Mr. Murrow*" blinkte. Die Rechenanlage wurde im Rahmen des ASCA (Aircraft Stability and Control Analyzer) Projektes, das von der US Navy getragen wurde, als Flugsimulator entwickelt. Eines der ersten Programme, das für Whirlwind erstellt wurde, simulierte die Bewegung eines springenden Balls, der durch die Schwerkraft bedingt an Höhe verlor. Bei dem Bildschirm handelte es sich um eine Kathodenstrahlröhre (CRT=Cathode Ray Tube), in der ein Elektronenstrahl zeilenweise von der linken oberen Ecke des Bildschirms zur rechten unteren Ecke wanderte und dabei die gewünschten Bildpunkte aktivierte. Diese Bewegung wird, je nach eingestellter Bildwiederholfrequenz, immer wieder schnell hintereinander durchgeführt. Der erste Rechner mit grafikfähigem Bildschirm war nun als Prototyp entwickelt, aber es dauerte noch einige Jahre bis der Bildschirm als Ausgabegerät weit verbreitet war.

Die 1960er Jahre - Inkunabeln der künstlerischen Computergrafik

In den sechziger Jahren wurden die gestalterischen Möglichkeiten des Mediums ausprobiert und erweitert, so dass man von einer experimentellen, expansiven Phase sprechen kann. Der Einsatz des Computers brachte es mit sich, dass die neuen Möglichkeiten des Mediums häufig erst von Wissenschaftlern[6], etwas später dann von Wissenschaftlern mit künstlerischen Ambitionen und erst dann von Künstlern genutzt wurden. Dafür gibt es mindestens zwei Gründe: zum einen waren in den Anfangsjahren der Computertechnologie nur Forschungseinrichtungen oder große Unternehmen in der Lage die sehr kostspieligen Rechenanlagen zu entwickeln, zu bauen oder zu erwerben. Privatpersonen hingegen waren schlicht und einfach nicht in der Lage die teuren Apparate zu kaufen. Damit war in dieser Zeit vor allem Wissenschaftlern und Mitarbeitern an Forschungseinrichtungen oder in Unternehmen der Zugang zu den Rechnern möglich. Zum anderen gab es zunächst keine Standardsoftware für die Gestaltung am Computer und schon gar keine interaktive Grafiksoftware, mit der eine einfache Gestaltung am Bildschirm (den es ja ebenfalls noch nicht überall gab) möglich gewesen wäre. Es war also notwendig den Rechner zu programmieren, um ihm überhaupt irgendwelche Grafiken abzuringen. In späteren Jahren arbeiteten Künstler häufig in Teams mit Computerexperten zusammen, was aber den Arbeitsvorstellungen der Künstler nicht besonders entgegenkommt.

[6] Vor allem Mathematiker, Physiker, Kybernetiker, Elektrotechniker und Ingenieure.

Frieder Nake, Matrizenmultiplikation Serie 31, 1967.

Es dauerte also eine geraume Zeit, bis der Computer für künstlerische Zwecke und von Künstlern genutzt wurde.

Einen wichtigen Impuls lieferte der im August des Jahres 1963 von der Zeitschrift „Computers and Automation“ ausgeschriebene Wettbewerb für die schönste Computergrafik. Dies führte dazu, dass vorhandene Grafiken eingereicht und zusammengetragen wurden, von denen bis dato viele als Nebenprodukte entstanden waren und in den Schubladen von Forschungseinrichtungen oder Unternehmen lagerten.

Die Bewertung der Computerbilder wurde hierbei nicht nach mathematisch-technischen Kriterien vorgenommen, sondern alleine aufgrund der „Schönheit“ der Bilder. Die Urheber der Bilder hatten dabei in der Regel keine künstlerischen Intentionen. Dies zeigt sich auch daran, dass in den ersten beiden Jahren 1963 und 1964 das Echo spärlich war und zunächst Grafiken des US Army Ballistic Research Laboratories ausgezeichnet wurden. Die Bilder mit den Titeln „Slatter Pattern“ (1963) und „Flugbahn eines Querschlägers“ (1964) sind eher als Nebenprodukte der militärischen Forschungsarbeit zu betrachten. In den beiden Folgejahren wurden dann zweckfreie Arbeiten prämiert. Zum einen die Arbeit „Computer Composition with Lines“ von A. Michael Noll (1965) und „Komposition mit Quadraten“ von Frieder Nake (1966).

Erste Ausstellungen von Frieder Nake und Georg Nees und Michael Noll

Georg Nees präsentierte im Januar 1965 Digitalgrafiken aus dem Großrechner Siemens 2002 in der Studio-Galerie der Universität Stuttgart, der damaligen Technischen Hochschule. Die Ausstellung war die erste weltweit, die digitale Computergraphik zeigte, noch bevor im April 1965 in der New Yorker Howard Wise Gallery die Arbeiten von *Michael Noll* und anderen auf der „Weltausstellung der Computergraphik“ gezeigt wurden.

Im November 1965 folgte dann eine gemeinsame Ausstellung von Computergrafiken von *Frieder Nake* und *Georg Nees* in der Galerie *Wendelin Niedlich* in Stuttgart, mit dem Titel „Computer-Grafik-Programme“. Die Ausstellung wurde hitzig diskutiert und die Stuttgarter Zeitung schrieb „*Ein Heinzelmann macht´s möglich, daß der moderne Bilderfabrikant sich nicht mehr handwerklich zu strapazieren braucht.*“[7] Der Computer spuckt also auf Knopfdruck die Kunstwerke aus und in der ganzen Aufgeregtheit wurde vergessen, dass es doch auch hier nicht ohne geistigen Autor geht. Der Künstler delegiert handwerkliche Fähigkeiten an die Maschine. Es wurde aber befürchtet, dass in naher Zukunft die Maschine auch die geistigen Fähigkeiten übernimmt und dann den Künstler vollständig ersetzt und damit überflüssig macht. Insofern ist auch die ablehnende Haltung vieler Künstler zu verstehen.

Die ersten digital errechneten Computergrafiken von *Frieder Nake*, *Georg Nees* und *Michael Noll* aus der Zeit um 1963 bis 1965 waren zumeist geometrisch-konstruktive Bilder, die häufig lineare schwarz-weiß oder monochrome Strichzeichnungen, Polygonzüge oder Flächen zeigten. Für die Gestaltung einiger Arbeiten wurden mathematische Gesetzmäßigkeiten benutzt, bei anderen Arbeiten spielt die Verwendung des Zufalls eine Rolle.[8] Einige der Künstler versuchten auch mit ihren Programmen Werke aus der Kunstgeschichte zu imitieren. So gibt es Arbeiten von *Michael Noll*

[7] Skasa-Weiß, Ruprecht: „Künstliche Kunst“. In: Stuttgarter Zeitung Nr. 262, 11.November 1965, S. 31

[8] Frieder Nake (geb.1938) studierte neben Mathematik, Physik und Elektronik auch Philosophie und war in den Jahren 1961 bis 1967 Mitarbeiter am Rechenzentrum der Universität Stuttgart Er beschäftigte sich seit 1964 mit Wahrscheinlichkeitstheorie und promovierte 1967 zu einem Thema der Stochastik.

Charles Csuri, Aging Process, 1968.

und *Frieder Nake*, die sich auf Arbeiten von *Piet Mondrian*, *Paul Klee* oder auch *Bridget Riley* beziehen.

Eine gewisse Ähnlichkeit der Arbeiten der Pioniere ist auffallend, ergibt sich aber sicherlich durch die technischen Möglichkeiten der Computer und der Peripheriegeräte. Die Rechenleistung war begrenzt und somit war an eine realistische Darstellung, wie wir sie heute kennen nicht zu denken. Bevor die grafikfähigen Bildschirme entwickelt wurden und Verbreitung fanden, wurden Grafiken in der Regel auf Matrixdruckern, später dann auch auf Plottern ausgegeben. Die Ausgabe gerade verlaufender Linien auf einem Plotter war 1965 möglich, gleichmäßige Kurven hingegen konnten erst etwas später ausgegeben werden. Flächen mussten aus Linien zusammengesetzt werden, indem man eine entsprechende Anzahl von Linien aneinanderfügte.

Die errechneten Bilder wurden also in der Regel auf Papier gedruckt und ausgestellt, denn zu diesem Zeitpunkt existierten bereits Computer mit grafikfähigen Bildschirmen, aber diese waren wenig verbreitet und darüber hinaus waren die Rechenanlagen nicht so kompakt, dass man sie in eine Galerie hätte stellen können. Netzkunst wäre denkbar gewesen, denn das ARPA Net des amerikanischen Militärs war bereits installiert, aber es hatte noch niemand die Netzkunst erdacht. So blieb für die Ausstellung von Computergrafiken eigentlich nur die Möglichkeit der Hardcopy, also des Ausdruckes des errechneten, später dann am Monitor angezeigten Bildes.

[9] Bereits 1959 wurde das erste Computer Zeichnungssystem DAC-1 (Design Augmented By Computers) von General Motors und IBM entwickelt, aber erst 1964 bei der JointComputer Conference in Detroit vorgestellt.

Für den Ausdruck gab es immer wieder Verbesserungen: 1959 wurde der erste digitale Plotter *CalComp Plotter* entwickelt und im Jahr 1964 brachte die Zuse AG den *Graphomat Z64* auf den Markt, zu einem Preis von damals ungefähr 98.000 DM. Es handelte sich dabei um einen 1400 Kg schweren Zeichenautomat in Tischform mit schnellem beweglichen Zeichenkopf, der mit einer Genauigkeit von 1/20 mm arbeitete und die Verwendung von verschiedenen Stiften, Tuschen und Papiersorten erlaubte. Nun war es möglich geworden farbige Tinten und Stifte mit unterschiedlich starken Minen auf verschiedenen Papiergrößen zu verwenden. Dies machte sich auf der Ausstellung „Cybernetic Serendipity“ bemerkbar, die 1968 in London statt fand und international Beachtung fand.

Interaktive Gestaltung

Ein wichtiger Schritt war die Entwicklung einer interaktiven Grafiksoftware „Sketchpad“ , die mit Hilfe eines Lichtstiftes, eines neuen Eingabegerätes bedient werden konnte. *Ivan Sutherland* entwickelte von 1961-1963 als Doktorand am MIT eine erste Grafiksoftware, die als Mutter aller Paintsysteme gesehen werden kann. Mit dieser Software war die interaktive Arbeit am Rechner möglich und es konnten die Bildelemente mit Hilfe eines „Lichtgriffels“, dem so genannten „Lightpen“, gezeichnet und manipuliert werden. Dies war auch die Grundlage für die Entwicklung der CAD (Computer Aided Design) Systeme, mit denen auch *William A. Fetter* (1928-2002) bei Boeing gearbeitet hat. Er erstellte bereits ab 1960 bei der Firma Boeing Konstruktionsstudien mit dem Computer. Dies könnte man als die Geburtsstunde des Com-

[10] englisch „Pixel“ für „picture element“ oder französisch „Pel“ für „point elementaire“

puter Aided Design (CAD) bezeichnen.[9] Für den praktischen Einsatz bestand ein Interesse an realistischen, figürlichen Zeichnungen (Nachahmung der Natur), was erst mit technischen Neuerungen, mit qualitativer Verbesserung der Software und Hardware möglich wurde. Für ergonomische Studien zur Optimierung der Arbeitssituation der Piloten, fertigte er unter anderem Zeichnungen des menschlichen Körpers in verschiedenen Positionen im Cockpit eines Flugzeuges an. Erste figürliche Grafiken von *William A. Fetter* stammen aus dem Jahr 1967.

Die 1970er Jahre

Erweiterte Gestaltungsmöglichkeiten

In den siebziger Jahren fanden einige technische Entwicklungen statt, welche die Gestaltungsmöglichkeiten erweiterten und die Arbeitsbedingungen wesentlich veränderten.

Die Rastergrafik oder auch Pixelgrafik[10] wurde entwickelt und ersetzte zunehmend die bis dahin vorhandene Vektorgrafik. Man unterscheidet die digital statischen Bilder in so genannte Pixelgrafiken und Vektorgrafiken. Bei Pixelgrafiken kann jeder Bildpunkt adressiert und diesem ein Farbwert zugewiesen werden. Bei der Vektorgrafik werden die Bildelemente in geometrische Elemente zerlegt und deren mathematische Eigenschaften gespeichert. Dies war bis dato wegen der begrenzten Speicherkapazität die einzige Möglichkeit grafische Daten zu verarbeiten und flächige Darstellungen, wenn es sich nicht gerade um monochrome Rechtecke handelte, waren nur mühsam zu realisieren. Es gibt deshalb verschiedene Repräsentationsformen von digitalen Bildern. Die Rastergrafik erlaubte den Künstlern die flächige und damit malerische Gestaltung mit einer hohen Anzahl von Farben. Die Anzahl der Farben erhöhte sich Ende der siebziger Jahre von maximal 16 auf über eine Million. Denn das amerikanische Militär hatte 1974 festgestellt, dass die Auswertung von Satellitenbildern mehr als 16 Farben erforderte und sich deshalb intensiv um die Entwicklung von Computerkomponenten bemüht, mit denen man mehr Farbwerte verarbeiten konnte.

Der Mikroprozessor wurde entwickelt und die ersten Personalcomputer waren auf dem Markt verfügbar. Der Computer wurde kompakter und zum Industrieprodukt und damit setzte die Verbreitung ein. Schließlich war auch die erste Grafiksoftware auf dem Markt erhältlich. Das erste Paint-System „Aurora“ wurde schon zu Beginn der siebziger Jahre von der Firma Aurora von *Alvy Ray Smith* und *Richard Shoup* in San Francisco entwickelt. Die Benutzer eines Computers kamen nun ohne Programmierkenntnisse aus und konnten einfacher mit dem Rechner als Gestaltungswerkzeug arbeiten. Die Grafikprogramme erlaubten aber nur die Erstellung und Manipulation von zweidimensionalen Grafiken. Grafikprogramme, die 3D-Grafiken verarbeiten konnten, wurden erst in den 80er Jahren entwickelt. Die Anzahl der Künstler vergrößerte sich in den 70er Jahren immens, da die Zugangshürden geringer wurden. Die Akzeptanz des Computers unter den Künstlern stieg, wozu auch die Ausstellung von Computergrafiken auf der Biennale 1970 in Venedig beitrug. Zunehmend fanden die traditionell ausgebildeten Künstler Interesse an und Zugang zu den Computern.

Erste figürliche Zeichnungen, Morphing und eine Malmaschine

Charles Csuri war ausgebildeter Künstler und arbeitete mit *James Shaffer*, einem Programmierer und Mitarbeiter an der Ohio State University zusammen. Im Team fertigten sie gegenständliche Bilder an und veröffentlichten 1967 die erste figürliche Zeichnung „Sine Curve Man“ in der bereits erwähnten Zeitschrift „Computers and Automation“. Die Zeichnung unterschied sich in ihrer Erscheinung und Machart erheblich von den eher drahtfigurartigen Darstellungen *Fetters*. Ein besonderes Interesse von *Csuri* war die Verfremdung von gegenständlichen Bildern. Häufig überführte er verschiedene Portraits einer Person ineinander, indem er ein Ausgangsbild mit dem Computer umrechnete. Dabei entstanden Abfolgen von veränderten ineinander übergehenenden Bildern, die als Vorläufer des *Morphing* verstanden werden können. Diese Sequenzen führten zum Film und als die Rechenleistung es zuließ schufen *Csuri* und *Shaffer* den Film „Hummingbirds“. Eine kurze Episode in der ein Kolibri zu sehen ist. *Csuri* war sehr innovativ in seinen Projekten und wurde schließlich 1989 und 1990 auf der Ars Electronica in der Kategorie Computergraphik ausgezeichnet.

Ein anderes interessantes Projekt verfolgte der Engländer *Harold Cohen*. *Cohen* war ebenfalls ausgebildeter Künstler und eignete sich die nötigen Computerkenntnisse autodidaktisch an. Seit 1972 entwickelte er ein Programm, das er „AARON“ nannte und dessen Funktion es war selbständig Bilder zu zeichnen. Cohens Ziel war es also auch die geistigen Aktivitäten des Künstlers an die Maschine zu delegieren. Dazu speiste er der Maschine die Regeln seines eigenen künstlerischen Schaffens ein. AARON konnte selbständig einfache Figuren zeichnen und kompositorische Probleme lösen. *Joan Truckenbroad*, neben *Vera Molnar* eine der wenigen Frauen in den Anfangsjahren der Computerkunst, führte neue Materialien als Bildträger ein. Sie druckte ihre Arbeiten auf Baumwollstoffe um ihren Vorstellungen entsprechend eine stärkere Bindung an die Natur herzustellen.

Die Bilder wurden in den siebziger Jahren farbiger und flächiger. Vor allem in den frühen siebziger Jahren gab es immer noch viele lineare monochrome Bilder, häufig nach mathematischen Gesichtspunkten berechnet, die aber zunehmend durch die mehrfarbigen, flächigen Bilder verdrängt wurden. Einige Künstler arbeiteten auch mit Mischformen, indem sie zum Beispiel die Konturen der Zeichnung plotteten und anschließend die Formen von Hand ausmalten.

Ausblick

In den folgenden Jahren verbesserten sich immer wieder die technischen Gegebenheiten der Rechner. Die Prozessoren wurden schneller und damit stieg die Rechenleistung. Die Erhöhung der Rechengeschwindigkeit war eine wichtige Grundlage für die Verschmelzung von verschiedenen Medien, wie Text, Bild und Ton. Vor allem die bewegten Bilder, Animationen und digitaler Film sind sehr rechenintensiv und waren in den Anfangsjahren der Computerkunst undenkbar. Heute gibt es das Zusammenspiel verschiedener Kanäle, bekannt unter dem Stichwort „Multimedia“. Darüber hinaus war es nun möglich geworden interaktiv zu arbeiten, das heißt die Rechenzeiten waren so kurz geworden, dass sie den instantanen, schnellen Dialog mit dem Programm erlaubten. Die Bauteile der Computer wurden zunehmend kleiner und damit konnten die Komponenten und Geräte kompakter werden. All dies waren wichtige Grundlagen für die Entstehung der Medienkunst.

Literatur

Duden Informatik, Herausgegeben von der Dudenredaktion, 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage, Dudenverlag, Mannheim u.a. 1993

Bertelsmann Lexikon - Informatik - EDV - Computertechnik, Herausgegeben vom Bertelsmann Lexikon Institut, Bertelsmann Lexikon Verlag, Gütersloh 1994

Dress Andreas, Jäger Gottfried, Visualisierung in Mathematik, Technik und Kunst, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden 1999

Franke Herbert W., Helbig Horst, Die Welt der Mathematik – Computergrafik zwischen Wissenschaft und Kunst, VDI Verlag, Düsseldorf 1988

Franke Herbert W., Jäger Gottfried, Apparative Kunst – Vom Kaleidoskop zum Computer, DuMont, Köln 1973

Franke Herbert W., Computergraphik – Computerkunst, Bruckmann Verlag, München 1971

Grau Oliver, Virtuelle Kunst in Geschichte und Gegenwart: visuelle Strategien, Reimer Verlag, Berlin 2002

Guminski Karin, Kunst am Computer, Ästhetik Bildtheorie und Praxis des Computerbildes, Reimer Verlag, Berlin 2002

Pias Claus, Computer Spiel Welten, Sequenzia Verlag, München 2002

Piehler Heike, Die Anfänge der Computerkunst, dot Verlag, Frankfurt am Main 2002

Rottmann Michael, analoge & digitale Bilder, Staatsexamensarbeit, Stuttgart 2002

Steller Erwin, Computer und Kunst, Programmierte Gestaltung: Wurzeln und Tendenzen neuer Ästhetiken, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim u.a. 1992

Sutherland Ivan, Sketch pad a man-machine graphical communication system, AFIPS Conference, Volume 23, 1963

Zeitschriften / Zeitungen / Kataloge

Nake Frieder, Stoller Diethelm (Hg.), Algorithmus und Kunst, Ausstellungskatalog: Die präzisen Vergnügen, Sautter + Lackmann, Hamburg 1993

Skasa-Weiß Ruprecht: „Künstliche Kunst“, in: Stuttgarter Zeitung Nr. 262, vom 11.11.1965, S.31

Pfeiffer Günter, „Die Programmierung des Schönen“, in: Frankfurter Allgemeine Zeitung Nr. 255, vom 3.11.1969, S.24

Ausstellungskatalog Computerkunst, IBM Deutschland GmbH Öffentlichkeitsarbeit (Hg.), Stuttgart 1978

Martin Schuster

Kunst auf Knopfdruck? — Fraktale Kunst

Einleitung

Der Gedanke an Computerkunst ist für die meisten Menschen nicht mehr besonders neu. Ebensowenig sind für den Mathematiker Fraktale etwas sonderlich ausgefallenes — ganz im Gegenteil, in der Mathematik werden Fraktale bereits als weitgehend erforscht betrachtet.

In der Kunst jedoch, vor allem im Internet, sind Fraktale so beliebt und verbreitet wie zu jenen Zeiten, als ein Computer noch einen ganzen Tag brauchte, um die Mandelbrotmenge in schwarz-weiß auf gelochtes Endlospapier zu drucken. Eine aktive Gemeinde von Fraktalkünstlern bringt regelmäßig neue Bilder heraus, jedes davon anders als die anderen und auf seine eigene Weise bestechend.

Nun fragt man sich allerdings, speziell als Mathematiker, wo darin denn die Kunst liegt. Jedes einzelne Bild ist letzten Endes durch einen Satz von Formeln eindeutig definiert und kann von jedem beliebigen anderen Fraktalkünstler auf der ganzen Welt exakt reproduziert, ja sogar in besserer Auflösung, Farbtiefe usw. realisiert werden — in der „analogen“ Kunst wäre das ein Ding der Undenkbarkeit.

Genau dieser Frage, der Frage nach der Kunst in den Fraktalen, wollen wir hier genauer nachgehen.

„Etwas tiefer rein, bitte“ - Was sind Fraktale?

„Ein Fraktal“ ist, um genau zu sein, eine sehr grobe Generalisierung — treffend könnte man es vielleicht als „ein Objekt aus der fraktalen Geometrie“ bezeichnen.

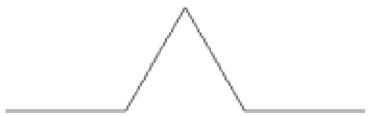
Man sollte meinen, dass diese Definition uns nicht viel weiter bringt – aber das Adjektiv „fraktal“ ist um einiges leichter zu erklären als das Substantiv „ein Fraktal“. „Fraktal“, als Adjektiv, bedeutet so viel wie „gebrochen“ – in diesem Fall eine Referenz auf die nicht ganzzahlige Dimension fraktaler Kurven. (Siehe dazu auch Peitgen/Saupe)

Doch die Dimension soll uns in diesem Zusammenhang nicht weiter beschäftigen — die charakteristische Eigenschaft der fraktalen Geometrie, die für den künstlerischen Gebrauch von Bedeutung ist, und in der sich die fraktale von der euklidischen Geometrie unterscheidet, ist die Selbstähnlichkeit in allen Skalierungen.

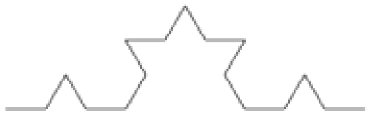
Was bedeutet das nun? In der euklidischen Geometrie ist die Größe bzw. Skalierung eines Objektes eine charakteristische Größe. In begrenztem Maß kann man ein Objekt der euklidischen Geometrie skalieren und es immer noch als selbstähnlich erkennen — allerdings lässt ein Ausschnitt des gesamten Objektes nicht zwangsläufig Rückschlüsse auf das Objekt selbst zu.

Wie kann das in der fraktalen Geometrie anders aussehen? Als Beispiel möchte ich hier die Kochsche Schneeflocke anführen — nach einer endlichen Anzahl von Iterationen noch ein euklidisches Objekt, das dann allerdings bei einer unendlichen Anzahl von Iterationen zur fraktalen Geometrie übergeht.

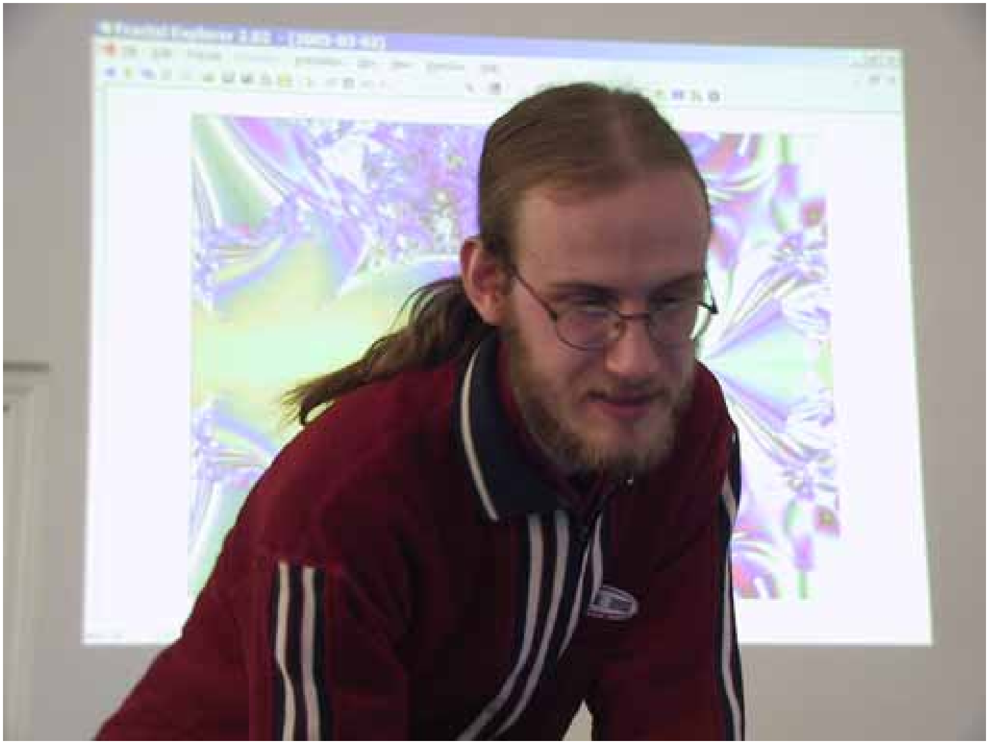
Der Ausgangszustand (gewissermaßen die nullte Iteration) der Kochschen Schneeflocke ist eine gerade Linie. Nun werden mit jeder Iteration sämtliche Strecken im Ergebnis der vorigen Iteration gedrittelt und ihr mittleres Drittel durch ein gleichseitiges Dreieck ersetzt. Nach der ersten Iteration haben wir also folgendes Bild:



Und nach der zweiten Iteration:

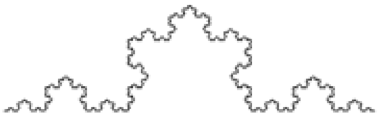


Dieser Vorgang lässt sich beliebig oft fortsetzen. Dabei verändert sich die Kurve gewissermaßen immer weniger (obwohl ihre Länge über alle Grenzen wächst) und nähert sich immer mehr einem geometrischen Gebilde an, das ungefähr so



Martin Schuster, Villa Massimo, Rom 2.3.2005.

aussieht:

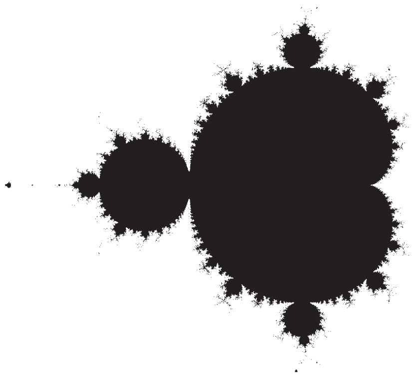


Dieses geometrische Objekt, eine Kurve von unendlicher Länge, heißt zu Ehren ihres Erfinders Helge von Koch (1870 – 1924) auch die Kochsche Kurve oder Schneeflocke.

Auf den ersten Blick ist wahrscheinlich anschaulich nicht klar, welche grundlegende Veränderung hier aufgetreten ist, die uns von der euklidischen in die fraktale Geometrie befördert hat. Vergrößert man allerdings einen beliebigen Bildausschnitt auf die Größe des ursprünglichen Bildes, so erhält man (evtl. nach Drehung) etwas, das von dem ursprünglichen Bild (oder einem normalgroßen Ausschnitt davon) nicht mehr zu unterscheiden ist. Tatsächlich können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen und werden immer wieder die gleiche Selbstähnlichkeit erhalten. Ihre fraktale Dimension beträgt ungefähr 1,26. Somit ist die charakteristische Skalierung der euklidischen Geometrie verloren gegangen und durch die fraktale Selbstähnlichkeit ersetzt worden.

In der Praxis arbeiten Fraktalkünstler allerdings zumeist mit etwas komplexeren, weniger symmetrischen Strukturen als der Kochschen Schneeflocke. Einen Typ davon will ich im Folgenden näher beschreiben.

Die Mandelbrotmenge



Formal definiert ist die Mandelbrotmenge einer Folge $z:=(z_n)_n$ die Menge all jener komplexen Zahlen c, für die die Folge z beschränkt ist. Das c fließt hierbei im Normalfall in irgendeiner Weise in die Iterationsvorschrift ein, mittels der man z_{n+1} aus z_n berechnet.

In der bekanntesten Mandelbrotmenge zum Beispiel, dem sogenannten „Apfelmännchen", ist die Folge $(z_n)_n$ rekursiv definiert durch:

$$z_0 = 0$$
$$z_{n+1} = (z_n)^2 + c$$

Dieses abstrakte Gebilde lässt sich auf der Ebene der komplexen Zahlen hervorragend visualisieren — im obigen Bild sind sämtliche Punkte der Mandelbrotmenge von z^2+c schwarz eingefärbt, ihr Komplement weiß. Der Rand der Mandelbrotmenge ist eine fraktale Kurve — man kann an einer beliebigen Stelle beliebig weit hineinzoomen, ohne dass die Kanten jemals eine regelmäßige geometrische Struktur annehmen. Sie behalten bis in unendliche Vergrößerung hinein ihre zerklüftete fraktale Struktur bei.

Selbstverständlich ist das Apfelmännchen bei weitem nicht die einzige Mandelbrotmenge — andernfalls würde Fraktalkünstlern trotz unendlichem Zoom irgendwann das Material ausgehen. Es existiert eine schier unerschöpfliche Menge an Formeln, deren Mandelbrotmengen interessant anzusehen sind. Als Beispiele seien hier lediglich die Mandelbrotmengen von $z^a + c$ genannt, die zusätzlich zur Spiegelsymmetrie des Apfelmännchens noch eine (a-1)zählige Drehsymmetrie aufweisen.

Das Aussehen der Mandelbrotmenge selbst, egal von welcher Formel, lässt sich noch zusätzlich variieren, indem man den Startwert der Iteration verändert (z.B. $z_0 = |c|$) oder c selbst in der Iterationsvorschrift transformiert (z.B. $z_{n+1} = (z_n)^2 + \sin(c)$). Das Ergebnis solcher Transformationen sieht der ursprünglichen Mandelbrotmenge oftmals in keinster Weise ähnlich.

Für die Anwendung ist nun, nachdem Hintergründe und Variationsmöglichkeiten geklärt sind, noch von Interesse, wie man eine solche Mandelbrotmenge tatsächlich graphisch erzeugt.

Die meistverwendete Methode ist relativ simpel. Der Computer erhält eine maximale Anzahl an Iterationen und einen gewissen Schrankenwert M (beim Apfelmännchen ist dies meist 2). Nun überprüft der Computer für alle Punkte des sichtbaren Bildausschnittes den Betrag von z_n bis zur maximalen Anzahl an Iterationen. Ist der Betrag kleiner oder gleich M, so wird der Punkt als zur Mandelbrotmenge gehörig eingestuft und schwarz eingefärbt, andernfalls bleibt er weiß.

Dem Ganzen kann man nun noch etwas Farbe verleihen, und tatsächlich sind auch die meisten fraktalen Kunstwerke der Gegenwart farbig. Auch die Koloration kann man bei Fraktalen dem Computer überlassen, und alles, was dazu benötigt wird, ist eine geringfügige Modifikation des obigen Algorithmus.

Statt einfach nur binär zwischen „zur Mandelbrotmenge gehörig“ und „nicht zur Mandelbrotmenge gehörig“ zu entscheiden, stellt der Computer fest, ab der wievielten Iteration der Betrag eines Punktes die Schranke M überschreitet und färbt diesen Punkt entsprechend einer vorher festgelegten Farbpalette ein, die jeder Iteration einen Farbton zuordnet.

Wenn man nun also die Mandelbrotmenge von einem Computer erzeugen und Iteration für Iteration anzeigen lässt, so kann man sehr anschaulich beobachten, wie der schwarze Bereich immer kleiner wird, während sich um ihn herum ein immer feiner werdender Farbverlauf aufbaut.

Auch die Farbpalette lässt sich, ähnlich wie die äußere Form der Mandelbrotmenge, weiter transformieren indem die einzelnen Farbkanäle auf einem Punkt c abhängig vom Wert von c modifiziert werden.

Abschließend sollte noch erwähnt werden, dass Mandelbrotmengen bei weitem nicht die einzigen Fraktale sind, für die sich Fraktalkünstler interessieren. Die meisten anderen Möglichkeiten, fraktale Bilder zu erzeugen (beispielsweise die sogenannten Integrierten Funktionensysteme, IFS) sind allerdings derart komplex, dass ein eigener Vortrag nötig wäre um sie darzustellen, und sie werden hier aus Platzgründen vernachlässigt.

Fraktale Kunst — wo ist sie nun?

Nachdem jetzt klar ist, wie fraktale Bilder entstehen, wollen wir die eingangs gestellte Frage nach der Kunst wieder aufgreifen.

Mit Handwerkskunst wie in Malerei oder Bildhauerei hat sie offensichtlich nichts zu tun — Fraktale werden schließlich nicht „von Hand“ gemacht. Auch intellektuelle Innovation ist nicht zwangsweise ein Kriterium — im Internet sind genügend Programme zu finden, die für den ambitionierten Fraktalkünstler geschaffen sind, einfach zu bedienen und mit einem ungeheuer großen Formelschatz ausgestattet.

Wo steckt dann also die Kunst in Fraktalen? Schließlich kann man ja, selbst ohne die geringsten mathematischen Vorkenntnisse, durch bloßes Herumklicken ohne allzu große Schwierigkeiten ein ansehnliches Bild zustande bringen, das dann fix und fertig berechnet aus dem Computer springt.

In gewisser Weise würde ich die fraktale Kunst mit der Photographie vergleichen. In den heutigen Tagen von Digitalkameras und technischen Hilfsmitteln wird, wenn man bereit ist, ein wenig mehr Geld auszugeben, nicht mehr allzu viel Handwerkskunst benötigt, um ein brauchbares Foto zu machen.

Die wahre Kunst liegt dann m.E. in erster Linie darin, ein geeignetes Motiv zu finden, es im geeigneten Blickwinkel darzustellen, eine passende Umgebung zu wählen und so weiter. Was also von Bedeutung ist, ist die Komposition, die Zusammenstellung der einzelnen Elemente des Bildes. Keine handwerkliche Herausforderung also, sondern eine intellektuelle oder gar emotionale.

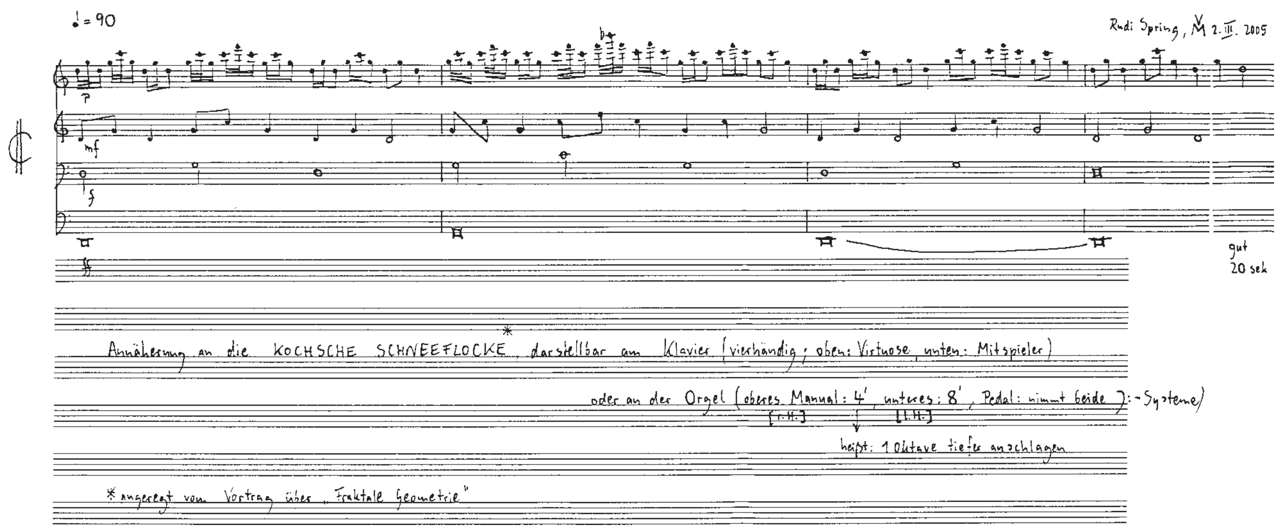
Und genau so verhält es sich mit der Fraktalkunst — wichtig ist nicht nur, sich irgend etwas zusammenzuklicken, das dann schön aussieht, sondern eine Idee zu haben. Einen Gedanken, eine treibende Kraft in ein Bild zu fassen, und so lange nach dem passenden Bild, den passenden Transformationen, dem passenden Filter zu suchen, bis man das Bild hat. Oft genügt dafür ein einfaches Fraktal nicht — es braucht Nachbearbeitung, Retusche, oftmals sogar die Vereinigung mehrerer Fraktale, oder von Fraktalen mit Bildern anderer Art.

Die Kunst, bei Fraktalen nicht anders als in den meisten anderen Kunstformen, liegt also nicht im Endprodukt, das der Betrachter sieht. Sie liegt in dem, was der Betrachter nur erahnen oder vermuten kann, wenn er das Ergebnis sieht: in dem Weg dorthin.

Literatur:

Heinz-Otto Peitgen, Dietmar Saupe (Hrsg.): „The science of fractal images“, Springer Verlag 1988
Dietmar Hermann: „Algorithmen für Chaos und Fraktale“, Addison-Wesley 1994

Der Komponist Rudi Spring und Benjamin Löw bei der Uraufführung der ersten musikalischen Approximation an die Kochsche Schneeflockenkurve für Klavier vierhändig — angeregt durch die Abbildung aus dem Vortrag über Fraktale Kunst, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.


♩= 90
Rudi Spring, M 2.III. 2005
p
mf
f
gut
20 sek
Annäherung an die KOCHSCHE SCHNEEFLOCKE*, darstellbar am Klavier (vierhändig; oben: Virtuose, unten: Mitspieler)
oder an der Orgel (oberes Manual: 4', unteres: 8', Pedal: nimmt beide 𝄢-Systeme)
[r.H.]
[l.H.]
heißt: 1 Oktave tiefer anschlagen
* angeregt vom Vortrag über „Fraktale Geometrie"

Teil III

Musik und Mathematik

Johannes Rueß

Bach — Mathematiker oder Künstler? I. Das Problem der Temperierung

Vorwort

Dieser Aufsatz ist aus dem Vortrag 'Bach - ein Mathematiker oder Künstler?' entstanden, welchen ich gemeinsam mit Benjamin Löw am Romseminar 2005 hielt.

Beim Erarbeiten unseres Themas stießen wir auf Bachs Werk 'Das Wohltemperierte Klavier'. Der Titel des Werkes deutet eine Problematik des Stimmens an, die uns, je mehr wir uns mit dieser beschäftigten, immer mehr faszinierte. Sie nahm schließlich so viel Raum ein, dass wir den ersten Teil unseres Vortrages ausschließlich dem Problem des Temperierens widmeten. Aus diesem Teil ging der vorliegende Aufsatz hervor.

Geschrieben habe ich diesen Aufsatz während meines Auslandssemesters an der Scuola Normale Superiore di Pisa. Danken möchte ich Dr. Markus Haase, der mir immer wieder in Fragen der Sprache, des Stiles, des Inhaltes und der Literatur geholfen hat.

Wir werden in Kapitel 1 einzelne Töne und deren Aufbau betrachten, um anschließend in Kapitel 2 Mehrklänge und deren Eigenschaften zu verstehen. In Kapitel 3 werden wir die Probleme des Temperierens kennenlernen und diese auf fundamentale Probleme der Mathematik zurückführen. Der Absatz zum Thema des Halbierens ist ein kleiner Ausflug in die Mathematik. Einen konstruktiv entwickelten Überblick über die verschiedenen Temperierungen findet man in Kapitel 4 während Kapitel 5 einen Einblick in die Geschichte des Temperierens liefert.

Einleitung

Eines der bekanntesten Werke Bachs[1], 'Das Wohltemperierte Klavier'[2], macht im Titel auf ein zentrales Problem der Instrumentenbauer und Stimmmeister aufmerksam: Die Stimmung eines Instrumentes.

Bei Tasteninstrumenten ist die Tonhöhe aller spielbaren Töne für ein ganzes Konzert festgelegt. Es ist notwendig, diese Instrumente zu stimmen. Dass diese Festlegung unerwartet schwierige Probleme erzeugt, wollen wir im Folgenden verstehen. Unser Ziel wird sein, diese Probleme bestmöglich zu lösen. Dabei werden wir die wohltemperierte Stimmung kennenlernen, auf die sich Bach im Titel seines Werkes bezieht.

1 Der Ton

Zu definieren, was Musik ist, ist schwierig und ist nicht Thema dieses Aufsatzes. Dennoch ist klar, dass Musik wesentlich aus 'musikalischen Tönen' besteht. Was ein musikalischer Ton ist, ist abhängig von Kultur und Zeit und zuallererst vom Komponisten selbst. So kann jedes beliebige Geräusch in einem Musikstück verwendet werden und dadurch den Charakter eines musikalischen Tones erhalten. Wir wollen uns auf das Verständnis konzentrieren, das sich in der westlichen Musiktradition entwickelt hat.

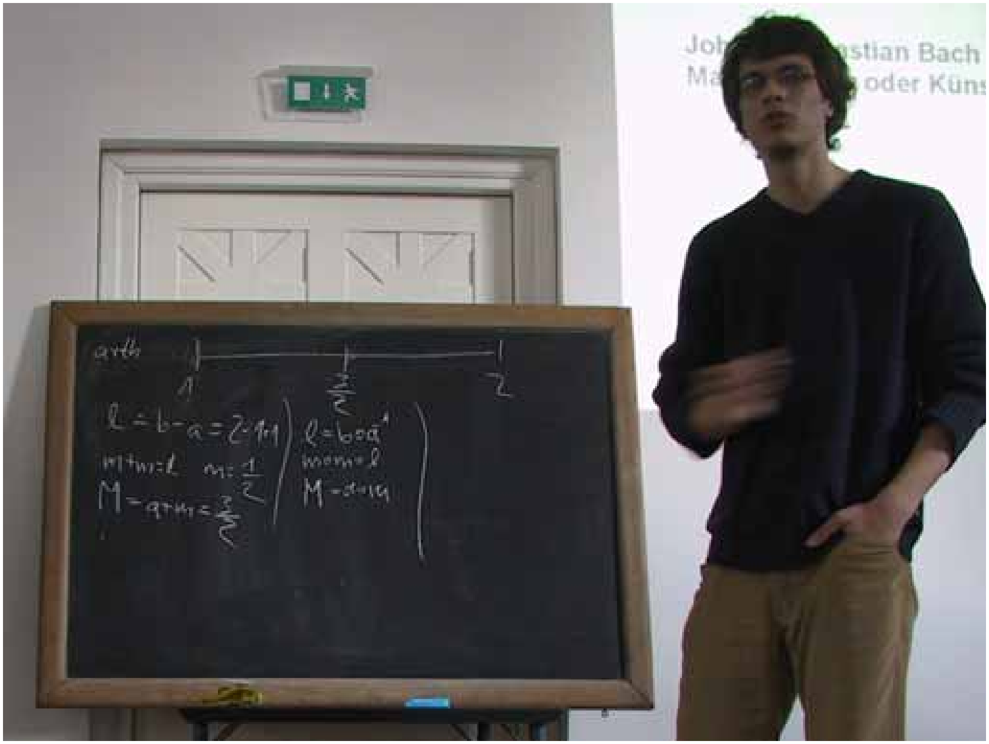
Grundlegend wird zuallererst unterschieden zwischen Ton und Geräusch. Während ein Geräusch immer direkt mit seinem Ursprung identifiziert wird (wie das Zwitschern eines Vogels, das Quietschen einer Türe,...) haben Töne unabhängigen Charakter. Obwohl Töne durch ihre Quelle bestimmt werden (Violinton, Klavierton, Posaunenton,...), haben sie Eigenschaften, die ihnen Unabhängikeit verleihen. Sie werden durch Tonhöhe, Klangfarbe, Lautstärke und Dauer bestimmt.

Instrumente, die Töne erzeugen, sind diejenigen, welche periodisch vibrieren. Dabei bestimmt die Frequenz der Vibration die Tonhöhe. Je größer die Frequenz ist, umso höher nehmen wir den Ton wahr. Die Stärke, also die Amplitude der Vibration, bestimmt die Lautstärke. Die Gesamtheit aller Vibrationen erzeugt die Klangfarbe. Die Tondauer wird logischerweise durch die Dauer der Vibration bestimmt.

Alle diese Eigenschaften kann man aus dem Schwingungsschaubild der Vibrationen (Ausschlag der Vibration pro Zeiteinheit) ablesen. Die Vibrationen selbst lassen sich mathematisch als Lösungen von Differentialgleichungen beschreiben. Die mathematischen Grundlagen hierzu finden sich zum Beispiel in [SS03, Kapitel 1, Absatz 1.1].

[1] Johann Sebastian Bach, geb. 21. März 1685 in Eisenach; gest. 28. Juli 1750 in Leipzig

[2] 'Das Wohl temperierte Clavier oder Praeludia, und Fugen durch alle Tone und Semitonia...' (abgek¨ urzt: WK) ist der Titel einer zweiteiligen Sammlung von Johann Sebastian Bach (Teil 1: BWV 846 - 869, ab 1722; Teil 2: BWV 870 - 893, 1744)



Johannes Rueß, Villa Massimo, Rom 1.3.2005.

Einmal in Schwingung gebracht, erzeugt ein Instrument räumliche Druckwellen, die sich in der Luft (oder auch anderen Medien) fortpflanzen. Diese Druckwellen kann unser Ohr 'hören'.

Als Beispiel wollen wir in diesem Aufsatz nur 'einfache Sinustöne' betrachten. Die Töne, welche wir im Konzertsaal hören, sind wesentlich komplizierter aufgebaut. Schon ein einzelnes Instrument erzeugt zusätzlich zur Grundschwingung eine Vielzahl weiterer Schwingungen, die man auch als Obertöne bezeichnet und welche den für ein Instrument charakteristischen Klang erzeugen. (Weitere Informationen zum Thema Obertöne findet man in [Spi03, Seiten 35, 99 und folgende] oder [Roe75, Seite 95].)

Im Laufe der Musikgeschichte hat sich in den verschiedenen Kulturen das 'Tonsystem', die Menge der verwendbaren Töne, unterschiedlich entwickelt und häufig gab es verschiedene Systeme zugleich.

Als entscheidendes Intervall hat sich für das Schaffen eines geeigneten Tonsystems die Oktave (Frequenzverhältnis Zwei zu Eins) herausgestellt, die auf unerklärbare Weise als aus einem einzigen Ton bestehend wahrgenommen wird. Die Oktave wurde je nach Zeit und Kultur in verschiedene Intervalle unterteilt. In unserer westlichen Kultur verwenden wir 'die' chromatische Tonleiter (Unterteilung der Oktave in zwölf Halbtöne), wobei dieses 'die' so nicht richtig ist und in Wirklichkeit sich im Laufe der Zeit ständig verändert hat, wie wir im Folgenden sehen werden.

Das Festlegen der einzelnen Töne eines Instrumentes auf eine bestimmte Tonhöhe, also das Festlegen des auf dem Instrument spielbaren Tonsystems, ist der Vorgang des Stimmens oder auch Temperierens. Der Tonvorrat, den man mit einem gestimmten Tasteninstrument ausschöpfen kann, ist dann fest vorgegeben.

2 Harmonie

In Musik kann man eine horizontale und eine vertikale Struktur feststellen. Die vertikale Struktur ist die zeitliche Abfolge der Töne, und wird als Melodie bezeichnet, während die horizontale Struktur das gleichzeitige Klingen mehrerer Töne ist und Harmonie genannt wird. Häufig wird der Begriff der Harmonie auch weiter gefasst und auf ganze Zeitspannen angewendet. Die Harmonie, also das gleichzeitige Spielen mehrerer Töne und die Effekte, die damit verbunden sind, ist eine junge Erfindung, die nicht in allen Kulturen zu finden ist.

Wesentlich unterscheidet man bei Harmonien zwischen dissonanten und konsonanten Harmonien. Konsonanz kann man definieren als den Fundus an Tonkombinationen, der von Theoretikern der jeweiligen Zeit akzeptiert wurde, Ruhe zu implizieren. Im Gegensatz dazu ist ein dissonantes Intervall ein Intervall, welches Dynamik in die Musik bringt. (Mit der zunehmenden Untersuchung des Einflusses von Musik auf Gefühle, werden die Begriffe 'konsonant' und 'dissonant' seit dem 19. Jahrhundert immer wieder mit Gefühlen in Verbindung gebracht, was zu Verwirrung führen kann.) (Siehe [Britannica, Music, The Arts of, S.524].)

Im Laufe der europäischen Musikgeschichte, hat sich ein Verständnis entwickelt, welches Intervalle mit 'einfachem' Frequenzverhältnis als eher konsonant auffasst, während Intervalle mit 'kompliziertem' Frequenzverhältnis als dissonant betrachtet werden. Insbesondere werden Intervalle mit einem einfachen rationalen Frequenzverhältnis eher als konsonant wahrgenommen. Als gleich gelten Intervalle, wenn sie dasselbe Frequenzverhältnis aufweisen. Damit spielt die Höhe des Grundtones keine Rolle. So ist zum Beispiel der konsonante Charakter der Quinte (Frequenzverhältnis $\frac{3}{2}$) unabhängig vom Grundton.

Dass Intervalle mit einfachem Frequenzverhältnis als konsonant empfunden werden, ist keine zufällige Festlegung, sondern basiert auf dem reflexgleichen Akzeptieren bestimmter Intervalle durch das menschliche Ohr. Es gibt viele Theorien, die versuchen, diesen Vorgang des 'reflexgleichen Akzeptierens' zu erklären, oder zu definieren, wann ein Intervall konsonant klingt. Ein Versuch, die Eigenschaft 'konsonant' mathematisch zu beschreiben, stammt von Leonhard Euler[3] und wird in diesem Artikel weiter unten (Absatz 2.1) erläutert. Eine sehr bekannte Theorie zum Beschreiben von 'konsonant' wurde schon 1863 von Hermann von Helmholtz[4] in seinem Buch 'Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik' [Hel63] formuliert. (Eine schöne Erläuterung zur Problematik der Konsonanz findet man in [Spi03, Kapitel 4, Harmonie].)

Folgende Intervalle haben einfache Frequenzverhältnisse und werden daher häufig verwendet, wobei sich Quarte, kleine Terz, kleine Sext aus den Intervallen Quinte, große Terz, große Sext (durch multiplizieren und dividieren) konstruieren lassen. (Immer wieder wird nicht nur das Frequenzverhältnis mit dem entsprechenden Namen bezeichnet, sondern auch ein Ton

[3] Leonhard Euler, 1707 - 1783

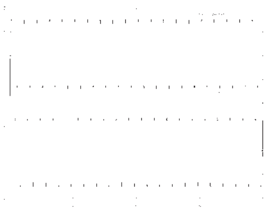
[4] Hermann von Helmholtz, 1821 - 1894

selbst. So wird zum Beispiel der Ton b , der zum Ton a ein Frequenzverhältnis von $\frac{3}{2}$ aufweist, als die Quinte zum Ton a bezeichnet.)

Oktave	2
Quinte	$\frac{3}{2}$
Große Terz	$\frac{5}{4}$
Große Sext	$\frac{5}{3}$
Quarte	$\frac{4}{3}$
kleine Terz	$\frac{6}{5}$
kleine Sext	$\frac{8}{5}$
Große Sekund	$\frac{9}{8}$

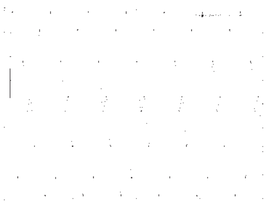
In der folgenden Abbildung sind einige der Intervalle durch überlagerte Sinuskurven dargestellt:

Einfache Sinuskurve



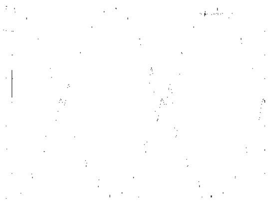
Frequenzverhältnis 2:1

Frequenzverhältnis 3:2



Frequenzverhältnis 4:3

Frequenzverhältnis 5:4



Frequenzverhältnis 9:8

2.1 Die Gradus-Suavitatis-Funktion

Ein Ansatz, 'einfache' bzw. 'komplizierte' Frequenzverhältnisse zu definieren, stammt von Leonhard Euler (wie oben schon erwähnt). (Siehe auch [Mazzola90, Kapitel 3.4.1])

Leonhard Euler führt eine Funktion Γ ein, die Gradus-Suavitatis-Funktion, die uns am Ende einen Zahlenwert für den Wohlklang eines Intervalles liefern soll.

Hierzu verwendet Euler die eindeutige Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen: n=p

$p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$.

Zunächst definiert er eine Hilfsfunktion G für natürliche Zahlen als eine Abbildung

$$G:\mathbb{N} \to \mathbb{N},$$
$$G(n) := 1 + e_1(p_1 - 1) + e_2(p_2 - 1) + \ldots + e_n(p_n - 1).$$

Einige Werte von G sind in der folgenden Tabelle aufgelistet:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$G(n)$	1	2	3	3	5	4	7	4	5	6	11	5	13	8	7	5

G hat die Eigenschaften, dass

- $G(1)=1$,
- Primzahlen auf sich selbst abgebildet werden,
- sie umso kleinere Werte annimmt, je 'mehr' sich die auszuwertende Zahl n in kleine Primfaktoren zerlegen lässt.

Euler definiert nun die Gradus-Suavitatis-Funktion für Intervalle I mit dem Verhältnis ; a, b natürliche Zahlen ohne gemeinsame Teiler:

$$\Gamma : N \to N, \Gamma(\frac{b}{a}) := G(a \cdot b)$$

Für wichtige Intervalle sind in folgender Tabelle die Γ-Werte aufgelistet:

Intervall I	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$
$\Gamma(I)$	2	4	7	7	5

Gemäß Euler klingt ein Intervall konsonant, wenn sein -Wert klein ist.

3 Multiplikative und additive Struktur

Wir haben in der Harmonie zwei Strukturen. Zum einen haben wir den Bedarf an Intervallen, die aus einfachen Frequenzverhältnissen bestehen, um Konsonanz zu erzeugen. Insbesondere sollten die Frequenzverhältnisse durch rationale Frequenzverhältnisse approximiert werden können (siehe Kapitel 2). Ein rationales Frequenzverhältnis zu bilden kann man folgendermaßen als Bewegen in der additiven Struktur der reellen Zahlen auffassen: Seien zwei Töne mit den Frequenzen und g gegeben. Sie haben dann das Frequenzverhältnis . Das Frequenzverhältnis ist genau dann rational und ungleich 0, wenn es $n, m \in N \setminus \{0\}$ gibt mit , was äquivalent ist zu . (Diese Gleichungen besagen, dass die beiden Töne gemeinsame Obertöne besitzen. Siehe dazu [Spi03, Kapitel 4, Harmonie].) Man kann das m-fache von $\frac{g}{f}$ auch als m-maliges additives 'Aneinanderhängen' des Frequenzverhältnisses verstehen.

Zum anderen werden Intervalle als gleich betrachtet, wenn sie dasselbe Frequenzverhältnis haben, wobei die Grundtonhöhe keine Rolle spielt. Damit entspricht das 'Aneinanderhängen' von Intervallen dem Multiplizieren von Frequenzverhältnissen. Zum Beispiel müssen zwei Töne a und b, die einen Abstand von zwei Quinten haben, ein Frequenzverhältnis von $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ haben. Der Ton b ist damit die Quinte zur Quinte des Tones a. Wollen wir nun eine Oktave in 12 gleiche Intervalle unterteilen, so muss das Halbtonintervall ein Frequenzverhältnis von haben. Es geht hierbei um das Konstruieren gleichmäßig unterteilter Tonsysteme und es wird dabei multiplikativ unterteilt. In diesem Sinne bewegen wir uns in der multiplikativen Struktur der reellen Zahlen.

Wir haben also die beiden Bereiche 'Konsonanz' und 'Konstruieren eines gleichmäßig unterteilten Tonsystems'. Das eine Mal bewegen wir uns in der additiven Struktur, das andere Mal in der multiplikativen Struktur der reellen Zahlen. Einmal werden Intervalllängen additiv aneinander gehängt, das andere Mal multiplikativ. In beiden Fällen ist es wichtig, dass man durch Zusammenhängen wieder in die natürlichen Zahlen kommt.

Will man sich sowohl in der additiven, wie auch in der multiplikativen Struktur zugleich bewegen, so treten fundamentale mathematische Probleme auf:

Die 'additiven' Unterteilungen, welche zum Beispiel zu Verhältnissen $\frac{4}{3}$ oder $\frac{3}{2}$ führen, werden nie geeignet sein, eine Oktave gleichmäßig, das bedeutet multiplikativ, zu unterteilen. Dies liegt an der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Beispielsweise ist $\left(\frac{3}{2}\right)^k$ nie in den natürlichen Zahlen für alle $k \in N \setminus \{0\}$. Insbesondere können wir hiermit nie Oktaven erreichen.

Die 'multiplikativen' Unterteilungen, welche zum Beispiel zu dem Verhältnis führen, werden nie optimal geeignet sein, Konsonanz zu erzeugen. Dies liegt an der Irrationalität von beispielsweise $\sqrt[12]{2}$. Damit ist $k \cdot \sqrt[12]{2} \notin N$ für alle $k \in N \setminus \{0\}$.

3.1 Das Halbieren

Wie man das Unterteilen allgemeiner formulieren könnte möchte ich anhand des Halbierens erläutern. Dabei werde ich eine allgemeine Länge auf einer kommutativen Gruppe einführen und für diese dann eine allgemeine Mitte definieren.

Die Begriffsbildungen 'additives' Unterteilen und 'multiplikatives' Unterteilen stammen von mir. Motiviert sind sie zum einen durch die unterschiedliche Art und Weise der 'Längenbildung' und zum anderen durch die unterschiedliche Art des 'Zusammenhängens'.

Gegeben sei eine Strecke von bis :

Unser Ziel ist nun, diese Strecke zu halbieren…

3.1.1 Arithmetische Mitte

Die additive Länge der Strecke ist gegeben durch

Die halbe Länge erhält man aus einer definierenden Gleichung:

Damit ist die absolute Mitte

Wir nennen dies die arithmetische Mitte.

Die Rechenoperationen haben wir in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ durchgeführt. Wir erinnern uns, dass ein Körper ist und wir daher zwei Verknüpfungen haben. Wie würde die Mitte für die Multiplikation aussehen? Wir wollen zunächst die Definition einer allgemeine Mitte in einer kommutativen Gruppe skizzieren.

3.1.2 Allgemeine Mitte

Gegeben sei eine kommutative Gruppe $(G,\circ)$. Eine Länge zwischen a und b wollen wir definieren als

Für die halbe Länge soll folgende definierende Gleichung gelten:

Ist diese Gleichung lösbar, erhalten wir für die absolute Mitte

und

Aus dieser allgemeinen Definition erhalten wir eine Mitte für die Multiplikation auf .

3.1.3 Geometrische Mitte

Die multiplikative Länge der Strecke beträgt nach obiger Definition

$$(a\circ m)\cdot(a\circ m)=a^2\circ(b\circ a^{-1})=a\circ b.$$

$$l_{ge}=\frac{}{a}\,(=2).$$

Die halbe Länge berechnet sich folgendermaßen:

$$l_{ge}=2m_{ge}\Rightarrow m_{ge}=\sqrt{l_{ge}}\;(=\sqrt{2}).$$

Damit ist die absolute Mitte

$$M_{ge}=a\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt{a\cdot b}\;(=\sqrt{2}).$$

Diese Mitte wird als geometrische Mitte bezeichnet.

4. Verschiedene Temperierungen

In diesem Absatz wollen wir verschiedene Tonsysteme, die es im Laufe der Geschichte gab, kennenlernen. Wir werden dabei konstruktiv vorgehen und feststellen, wo die Grenzen eines Systems liegen, um diese dann mit neuen Ansätzen zu lösen.

4.1 Additiv äquidistante Unterteilung

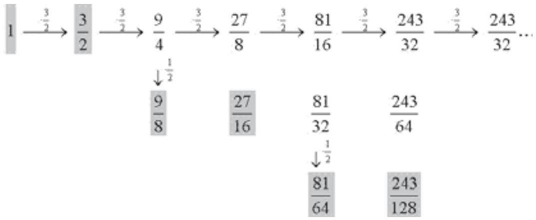
Eine etwas primitive Idee wäre, die Oktave in zwölf[5] additiv äquidistante Intervalle zu unterteilen. Wir erhalten dabei Folgendes:

1. Ton und 6. Ton haben ein Verhältnis von $\frac{18}{12}/\frac{12}{12}=\frac{3}{2}$, während 2. Ton und 7. Ton ein Verhältnis von $\frac{19}{12}/\frac{13}{12}=\frac{19}{13}$ haben, und 2., 8. Ton ein Verhältnis von $\frac{20}{12}/\frac{13}{12}=\frac{20}{13}$ haben.

Offensichtlich ändern sich die Frequenzverhältnisse in Abhängigkeit von der Grundtonhöhe. Außerdem können wir nicht mehr die entscheidenden Harmonien, insbesondere von jedem Ton die Quinte, spielen.

4.2 Stimmung aus reinen Quinten

Wir starten einen neuen Versuch, indem wir wichtige Intervalle in unsere Tonleiter aufnehmen, ohne dabei auf die Anzahl der Töne zu achten. Verwenden wollen wir alle Oktaven und deren Oktavparallelen, sowie alle Quinten und deren Parallelen. Man erhält dabei das im Folgenden dargestellte Resultat[6].



Wie man schnell erkennt, können wir auf diese Weise unendlich viele Töne innerhalb einer Oktave generieren. Dieses liegt an der eindeutigen Primfaktorzerlegung. Wir bräuchten also ein Tasteninstrument, das für eine Oktave schon unendlich viele Tasten hat.

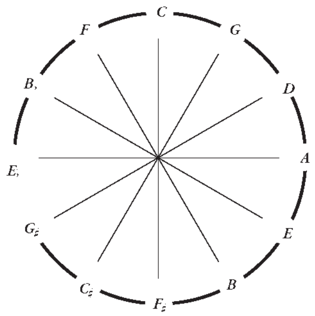
Zur Lösung des Problems gibt es viele Ansätze. Jede Lösung muss Kompromisse bei Tastenzahl und bei Wohlklang eingehen.

[5] oder in eine andere Anzahl

[6] Die grau unterlegten Verhältnisse sind diejenigen, die, gegebenenfalls durch transformieren, in der ersten Oktave liegen.

4.3 Pythagoräische Stimmung

Bei der pythagoräischen Stimmung werden 11 Quinten rein übernommen, die 12. Quinte wird gerundet auf 7 Oktaven. Durch dieses Gleichsetzen erhalten wir einen 'Ringschluss' der Quinten. Dieser wird als Quintenzirkel bezeichnet und ist in folgender Abbildung optisch dargestellt.



Das Frequenzverhältnis zwischen 7 Oktaven und 12 Quinten wird als 'Pythagoräisches Komma', die 12. Quinte, welche als einzige Quinte schief klingt, als 'Wolfsquinte' bezeichnet. Für das pythagoräische Komma berechnet man folgenden Zahlenwert:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \cdot 2^{-7} \approx 1{,}01364.$$

Auf der pythagoräischen Tonleiter ist es nicht möglich, von jedem Ton dasselbe Intervall zu spielen. Einige Intervalle sind um das 'Pythagoräische Komma' verzerrt. Diese Unstimmigkeit ist so stark, dass viele Intervalle nicht spielbar sind. Außerdem erhalten wir keine reinen großen Terzen und großen Sexten. Zum Beispiel unterscheiden sich die große Terz $\frac{5}{4}$ und der in der pythagoräischen Tonleiter existierende Ton $\frac{81}{64}$ minimal, nämlich um $\frac{81}{64} \cdot \frac{4}{5} = \frac{81}{80}$. Die großen Terzen werden dadurch immer deutlich dissonanter klingen, als man sich das wünschen könnte.

4.4 Gleichstufige (auch gleichtemperierte oder gleichschwebende) Stimmung

Lassen wir also das Ziel der reinen Quinten fallen und versuchen nun, eine Tonleiter zu konstruieren, bei der die Intervalle von jedem Grundton aus gleich sind und außerdem die oben genannten wichtigen Intervalle einigermaßen rein spielbar sind.

Ersteres ist offensichtlich kein Problem, da ein Intervall ein multiplikativer Abstand, das heißt ein Verhältnis, ist, und wir die mathematischen Methoden besitzen, die Oktave in zwölf[7] multiplikativ äquidistante Intervalle zu unterteilen. Ein Halbton entspricht damit dem Frequenzverhältnis .

Die Harmonien sind jetzt zwar vollständig unabhängig von der Grundtonhöhe. Dennoch bleibt die Frage, ob es uns mit dieser Tonleiter möglich ist, einigermaßen reine Harmonien zu spielen.

Zunächst ist klar, dass wir außer den Oktaven nie ein rationales Verhältnis und damit nie reine Harmonien erhalten werden. Dies liegt an der Irrationalität von $\sqrt[12]{2}$. Dennoch passen die so erhaltenen Töne erstaunlich gut, wie man in der folgenden Tabelle feststellen kann, und ein Stück wird, in dieser Tonart gespielt, einigermaßen rein klingen. Zudem wird es hier nie eine außerordentlich schief klingende Quinte geben.

Vergleich der gleichstufigen mit reinen Stimmung

Halbton Nr.	gleichstufig	rein Dez.zahl	Bruch
1	1,059		
2	1,122	1,125	9/8
3	1,189		
4	1,260	1,266	81/64
5	1,335	1,333	4/3
6	1,414		
7	1,498	1,500	3/2
8	1,587		
9	1,682	1,688	27/16
10	1,782		
11	1,888	1,898	243/128
12	2,000	2,000	2

Alle Angaben in Frequenzverhältnissen

[7] oder in eine andere Anzahl

4.5 Wohltemperierte Stimmungen

Die Komponisten früherer Zeiten komponierten für Stimmungen, bei denen die Intervalle nicht völlig unabhängig von der Grundtonhöhe waren. Zwar waren die Harmonien in jeder Tonhöhe im Wesentlichen gleich, dennoch hatte die Stimmung feine, für ungeübte Ohren kaum hörbare, Asymmetrien, so dass zum Beispiel ein feiner Unterschied darin bestand, welche Quinte man spielte.

Eine Folge dieser Abhängigkeit vom Grundton ist eine unterschiedliche Wirkung verschiedener Tonarten. Man spricht auch vom Charakter einer Tonart.

Eine derartige Differenzierung gibt es bei der gleichstufigen Stimmung nicht und es ist mit dieser Stimmung nicht möglich, Stücke früherer Komponisten in ihrer vollen Ausdruckskraft zu spielen.

Stimmungen, die zum einen nicht allzusehr von den wichtigen reinen Intervallen abweichen und damit das Spielen aller Tonarten ermöglichen, andererseits aber eine Asymmetrie enthalten, die eine unterschiedliche Wirkung verschiedener Tonarten erzeugt, bezeichnen wir als wohltemperierte Stimmungen.

Hierfür gibt es viele Entwürfe, und häufig hatte der Stimmeister seine eigene Stimmung. Ein bekanntes Beispiel für eine wohltemperierte Stimmung stammt von Andreas Werckmeister[8]. Werckmeister unterteilte das pythagoräische Komma in vier gleiche Teile, indem er anstelle von nur einer Quinte vier Quinten verkleinerte. In dieser Stimmung sind damit alle bis auf vier Quinten rein.

Weitere wichtige wohltemperierte Stimmungen waren mitteltönige Stimmungen, und die Kirnberger Stimmung[9].

4.6 Bach und die wohltemperierte Stimmung

Johann Sebastian Bach komponierte das 'Wohltemperierte Klavier' für eine wohltemperierte Stimmung. Damit hatten die Tonarten verschiedenen Charakter und waren dennoch alle spielbar. Sein Werk lebt gerade von der Unterschiedlichkeit der Tonarten. Häufig wurde in der Vergangenheit fälschlicherweise behauptet, dass Bach eine gleichstufige Temperatur verwendete. Dieses ließ sich wissenschaftlich widerlegen (siehe [Spi03, Seiten 91 bis 93]). Schade ist, dass nicht direkt überliefert ist, welche wohltemperierte Stimmung Bach verwendete.

5 Geschichte

Eine der ersten theoretischen Beschreibungen eines Tonsystemes stammt von Pythagoras[10]. Pythagoras verwendete dazu reine Quinten und konstruierte hieraus eine Tonleiter. Die Pythagoräische Tonleiter wurde bis ins Mittelalter verwendet. Es liegt vor allem an der Verwendung dieser Tonleiter, dass die Terzen und Sexten bis ins 14. Jahrhundert als dissonante Intervalle verstanden wurden.

Das Konzept der Polyphonie entwickelte sich schrittweise. Man kann den Ursprung der Mehrstimmigkeit nicht genau datieren und begründen. Eine Begründung für das Aufkommen von Polyphonie wäre, dass Sänger mit unterschiedlicher natürlicher Stimmlage in der für sie angenehmen Tonhöhe sangen. Eine andere Erklärung ist das Auftauchen der Orgel im 9. Jahrhundert. Polyphonie war im 9. Jahrhundert nach Christus etabliert, und wird in 'Musica enchiriadis', einem Handbuch für Sänger (ca. 900 n. Chr.) beschrieben.

In England begann man schon früh, der Terz harmonischen Charakter zuzusprechen. Zum Beispiel gab es schon im späten 12. Jahrhundert eine Art englische Orgel, genannt 'Gymel', in welchem die Stimmen im Abstand einer Terze parallel zueinander verliefen.

Seit dem frühen 15. Jahrhundert werden die Terze und die Sexte auch auf dem Festland als konsonante Intervalle aufgefasst. Dies ist teilweise auf den Besuch des englischen Komponisten John Dunstable an den Höfen Frankreichs zurückzuführen. Eine erste Erwähnung einer neuen Stimmung findet man im Jahre 1496 in dem Traktat 'Practica musica' des italienischen Theoretikers Franchino Gafori, der beschreibt, dass Organisten Quinten um ein unbestimmtes Komma verkleinern, so dass alle einigermaßen gut klingen. Mit dem Beginn der wohltemperierten Stimmungen, kam es zu einer Ausweitung an Harmonien in der musikalischen Komposition.

Die Zeit war nun geprägt vom Finden möglichst geeigneter Stimmungen. Man wollte zum einen alle Tonarten gut spielbar machen, zum anderen wollte man den Tonarten verschiedenen Charakter verleihen.

[8] Andreas Werckmeister, 1645 - 1706
[9] Johann Philipp Kirnberger, 1721-1783
[10] Pythagoras, 570 - 497 v. Chr.

Ein schönes Beispiel für den kreativen Umgang mit wohltemperierter Stimmung ist die Matthäuspassion von Bach. Das die Kreuzigung Jesu reflektierende Alt-Rezitativ Nr.59 (die Solistin singt: „Ach Golgatha, unselges Golgatha!“) wird von einer Quinte (Gis bis Es) begleitet, die auf den mitteltönig gestimmten Orgeln der damaligen Zeit besonders unschön geklungen hat. (Siehe [Spi03].)

Mit dem zunehmen der Chromatik und der Harmonien wurde der Bedarf nach der gleichstufigen Stimmung größer. Im 19. Jahrhundert setzte sich schließlich die gleichstufige Stimmung durch und wird bis heute verwendet.

6 Literaturübersicht

Mathematische Grundlagen zu Schwingungsgleichungen kann man in [SS03] finden. Der Klassiker zur Entstehung und Verarbeitung von Tönen und Harmonien ist [Hel63]. Zur aktuellen Theorie der Töne und Mehrklänge ist [Spi03] zu empfehlen. Im Internet kann man sich bei [Wick01] zum Thema der Stimmung informieren. Aktuelle mathematische Musiktheorie findet sich in [Maz90], [Maz85] und [Maz02] und den dort angegebenen Literaturverweisen.

Literatur

[Bri93] The New Encyclopaedia Britannica, volume 24. Encyclopaedia Britannica, Inc., Chicago, 15th edition, 1993.

[Hel63] Hermann von Helmholtz. Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Minerva, Frankfurt/ Main, 1981. Unveränd. Nachdr. d. Ausg. Braunschweig 1863.

[Maz85] G. Mazzola. Gruppen und Kategorien in der Musik, volume 10 of Research and Exposition in Mathematics. Heldermann Verlag, Berlin, 1985. Entwurf einer mathematischen Musiktheorie. [Sketch of a mathematical music theory].

[Maz90] Guerino Mazzola. Geometrie der T¨one. Birkh¨ auser Verlag, Basel, 1990. Elemente der Mathematischen Musiktheorie.

[Maz02] Guerino Mazzola. The topos of music. Birkh¨ auser Verlag, Basel, 2002. Geometric logic of concepts, theory, and performance, In collaboration with Stefan Göller and Stefan Müller, With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

[Roe75] Juan G. Roederer. Introduction to the Physics and Psychophysics of Music. Springer-Verlag, New York, second edition, 1975.

[Spi03] Manfred Spitzer. Musik im Kopf. Schattauer, Stuttgart, 2. korr. nachdr. der 1. au . edition, 2003. Hören, Musizieren, Verstehen und Erleben im neuronalen Netzwerk.

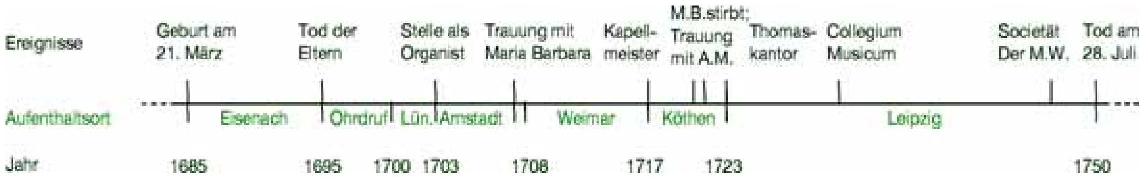
[SS03] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. Fourier analysis, volume 1 of Princeton Lectures in Analysis. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003. An introduction.

[Wic02] G. Wick. Theorie der ’Schwingungen und Töne’. 2001/2002. PDF-Dokument in drei Teilen, zu finden auf der Homepage der Kantonsschule Zürcher Unterland, (http://www.kzu.ch/fach/mathe/Unterricht/mathemusik/MatheundMusik.htm).

Benjamin Löw

Bach — Mathematiker oder Künstler? II. Bachs Leben und Werk

1 Biografie



Eisenach: Sein Vater Ambrosius ist Musiker von Beruf, Angestellter vom Herzog von Eisenach, jedoch mehr Geiger als Komponist, verheiratet mit Maria Elisabeth. Johann Sebastian ist das achte und jüngste Kind. Vier seiner Geschwister sterben sehr früh.

Ohrdruf: Auf Grund des Todes seiner Eltern zieht Johann Sebastian zu seinem ältesten Bruder Christoph, der schon verheiratet ist und eine Stelle als Organist hat. Eine Anekdote besagt, dass der noch junge Johann Sebastian so lernbegierig war, dass er Noten seines Bruders im Mondlicht handschriftlich kopierte.

Lüneburg: Er wird Chorschüler und bekommt schon ein erstes kleines Gehalt im Mettenchor.

Arnstadt: Er wird zu einer Orgel-Inspektion eingeladen und bekommt gleich das Angebot auf eine Anstellung. Es gibt jedoch viele Streitereien. Um nur eines zu nennen, Bach beantragt einen Monat Urlaub, bleibt dann aber 4 Monate bei Dietrich Buxtehude, ohne sich zu melden. Er wird zwar nicht entlassen, wechselt aber freiwillig die Stelle und heiratet kurz darauf seine Cousine zweiten Grades, Maria Barbara.

Mühlhausen: Die ersten Kompositionen entstehen, abgesehen von wenigen Jugendwerken (z.B. Kantate: Gott ist mein König). Der Pietismus in Mühlhausen macht ihm zu schaffen. Das Angebot als Organist und Hofmusiker am Hofe von Weimar kommt ihm gerade recht.

Weimar: Er wird Organist und Kammermusiker, aber nicht ein höher gestellter Kapellmeister. Bach wird zum absoluten Orgelfachmann, weshalb viele Orgelwerke in dieser Zeit entstehen. Am Ende wird er in Ungnade entlassen.

Köthen: Bach ist keinem Kapellmeister mehr unterlegen und hat somit viel mehr Freiheiten. Allerdings hat er dort keine gute Orgel zur Verfügung. Deshalb widmet er sich dem Klavier (Cembalo, Klavichord). Nach dem Tod seiner Frau heiratet er die Sängerin Anna Magdalena. Mit den Änderungen bezüglich der Familienverhältnisse wechselt Bach auch seine Anstellung. Die Stelle des Thomaskantors in Leipzig wird vakant. Durch Absagen zweier potentieller Kandidaten bekommt er die Stelle.

Leipzig: Bach ist sehr produktiv. Er schreibt wöchentlich eine Kantate. Rund 300 Kantaten in den ersten 5 Jahren. (ca. 200 sind überliefert) 1729 Übernahme der Leitung des Leipziger Collegium Musicum. Anschließend konzentriert er sich auf nicht-geistliche Musik. Es entstehen etwa die Brandenburgischen Konzerte und die im späteren Verlauf näher betrachteten Werke „Die Kunst der Fuge“ und „Das musikalische Opfer“.

2 Matthäus-Passion (1727)

2.1 Das Werk:

Die Matthäus-Passion ist eine oratorische Passion Johann Sebastian Bachs, die das Leiden und Sterben Jesu Christi nach dem Evangelium des Matthäus zum Thema hat. Sie ist das einzig vollständig erhaltene, authentische Passionswerk von Bach neben der Johannespassion.

2.2 Strukturen:

Die Analyse der Matthäus-Passion sei hier auf die Zahlensymbolik beschränkt. Dies ist natürlich nicht direkt Mathematik, jedoch setzt das konsequente Einhalten dieser Zahlensymbolik ein sehr großes Gespür für Verhältnisse und Strukturen voraus.

Die Auflösung des Werkes basiert auf dem Prinzip der Gematria, bei welchem jedem Buchstaben des hebräischen Alphabetes ein Zahlenwert zugeordnet ist. Somit kann man mit Wörtern rechnen.

Rechnen am Beispiel von „David“:

דוד   4 + 6 + 4 = 14

Bach verwendet für die deutsche Matthäus-Passion das deutsche Alphabet, mit I=J=9 und U=V=20

Rechnen am Beispiel von „Bach“:

B A C H   2 + 1 + 3 + 8 = 14

Auf diese Art und Weise lässt sich folgendes in der Matthäus-Passion finden:

Nr. 3: „Herzliebster Jesu“	= 192	= Summe aller gesungenen Töne
Anzahl der Takte im gesamten Werk	= 2800	= 28 Kapitel x 100 als Verstärkung
		= JESUS (9+5+18+20+18=70) x Kreuz (4) x 10
Anzahl der Einsätze im 1. Tei	= 57	= DOMINE (Herr)
Anzahl der Einsätze im 2. Teil	= 70	= JESUS
DOMINE + JESUS	= 127	= CRUCIFIXUS (Kreuz)
Anzahl der Einsätze Jesu	= 22	= Psalm 22 ist der „Leidenspsalm Jesu“:
(Mein Gott, mein Gott, warum hast du mich verlassen?)		
Anzahl der Bassanschläge im Continuo bei den 22 „Jesus-Reden“	= 365	= „Ich bin bei euch alle Tage“
Anzahl biblischer Texte	= 27	= Anzahl der Bücher im NT
Anzahl der Takte zu biblischen Texten	= 729	= 27 x 27 = 3^6
Anzahl der „Herr bin ich’s?“	= 11	= 12 Jünger - Judas

3 Die Fuge

Eine Fuge ist ein *polyphones* Stück mit *kontrapunktischer* Verarbeitung eines *Themas*.

Diese kurze Definition zeigt drei Dinge:

Thema: Es existiert ein Thema, der *dux* (lat.: der Führer). Dieses Thema wird einstimmig zu Beginn der Fuge in der Grundtonart vorgestellt.

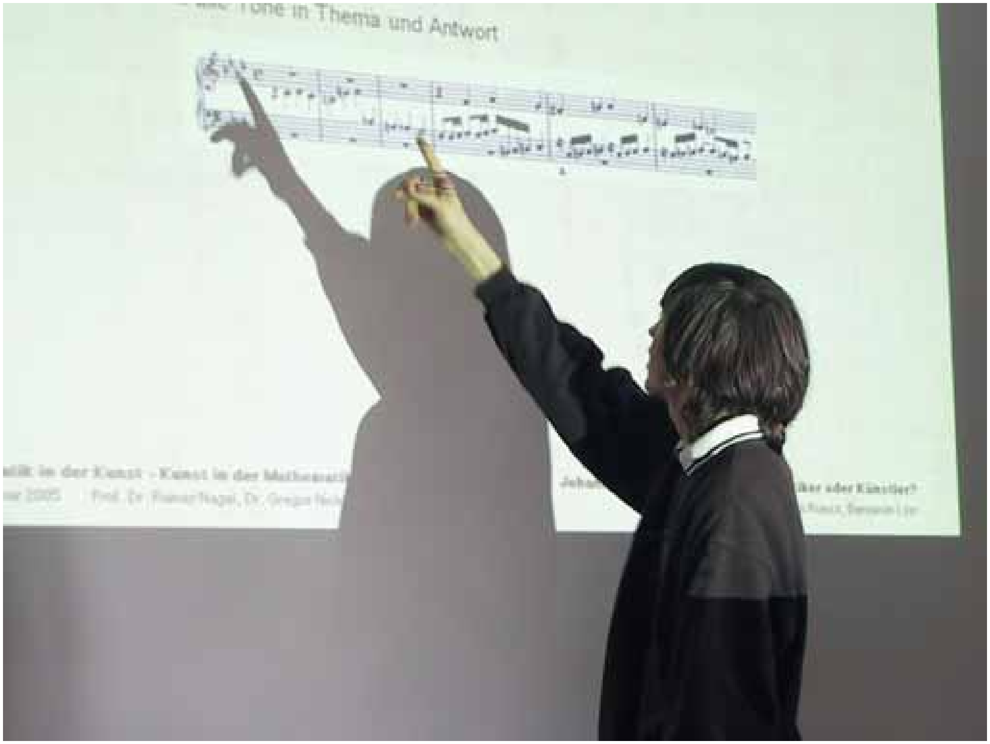
Polyphon: Es existiert mindestens eine weitere Stimme. Sie wird als direkte Antwort, genannt *comes* (lat: der Begleiter)) auf das Thema gestaltet, welche das Thema um eine Quinte versetzt wiederholt. Entweder ist die Antwort tonal oder real.

Eine tonale Antwort wiederholt deutlich erkennbar das Thema mit nur leichten Abänderungen von Intervallen, so dass die Tonart der Fuge beibehalten werden kann.

Eine reale Antwort wiederholt exakt dieselbe Phrase noch einmal, wobei durch die Versetzung um eine Quinte notwendigerweise die Tonart gewechselt wird.

Kontrapunkt: Jede Stimme ist eine eigenständige Stimme. Dies ist beim sowohl beim dux als auch beim comes trivialer Weise gegeben, da beide Stimmen nicht nur eine begleitende, sondern vor allem eine Melodie gestaltende Funktion besitzen. Wichtige Prinzipien dabei sind folgende:

- jede Stimme sei ein selbstständiges Objekt
- eine Stimmen verlaufe wenn möglich in Gegenbewegung zu einer anderen
- es gebe einen ausgeglichenen Wechsel von stufenweiser und sprunghafter Bewegung
- gruppenbildende Elemente (Akkorde, Tonwiederholungen) sind zu vermeiden
- Oktav- und Quintparallelen sind zu vermeiden



Benjamin Löw, Villa Massimo, Rom 1.3.2005.

Somit ist das Komponieren von Fugen ein Zusammenfügen höchst komplexer Strukturen, die freilich noch einen Freiraum lassen, wie die Wahl des Themas und die Wahl der kontrapunktischen Verarbeitung, sich jedoch streng nach gewissen Regeln richten.

Bereits hier ist zu überlegen, ob Bach es mehr um die schöne Struktur, als um den schönen Klang ging. Oder ging es ihm etwa eben um den Balanceakt zwischen Schönheit der Struktur und Schönheit des Klanges?

Dass Bach wahrlich ein Meister dieser „strukturierten“ Musik war, sollen folgende Beispiele näher verdeutlichen.

4 Das Wohltemperierte Klavier I (1722)

4.1 Der Name:

wohltemperiert: Eine Stimmweise von Tasteninstrumenten. Mehr darüber ist in Johannes Rueß‘ Teil „I. Das Problem der Temperierung“ dieses Aufsatzes zu finden.

Klavier: Tasteninstrument im Allgemeinen. Cembalo, Klavichord, Fortepiano, sogar Orgel. In diesem Fall wohl aber eher nicht Orgel, da er keine gute Orgel zu dieser Zeit zur Verfügung hatte.

4.2 Das Werk:

Bach war zu der Zeit der Entstehung dieses Werkes auf das Klavier fixiert. (Ein weiteres Werk für Klavier aus dieser Zeit: *Klavierbüchlein für Anna Magdalena Bach*.) Den Zweck dieser Komposition beschreibt er selbst im Vorwort:

Das Wohltemperierte Clavier, oder Praeludia, und Fugen durch alle Tone und Semitonia, So wohl tertiam majorem oder Ut Re Mi anlangend, als auch tertiam minorem oder Re Mi Fa betreffend. Zum Nutzen und Gebrauch der Lehrbegierigen Musicalischen Jugend, als auch derer in diesem studio schon habil seyenden besonderem Zeit Vertreib auffgesetzet und verfertiget von Johann Sebastian Bach. p.t: Hoch Fürstlich AnhaltCöthenischen CapelMeistern und Directore derer Cammer Musiquen. Anno 1722.

Das heißt, das Werk besteht aus je einem Präludium und einer Fuge, je zu jeder Moll- und Dur-Tonart, also aus 24 Präludien und 24 Fugen.

1744 entstand das Wohltemperierte Klavier Band II. Im Folgenden sei jedoch das Augenmerk auf Band I gerichtet.

4.3 Strukturen:

Die Nennung der Strukturen sei nur stichwortartig und wenn angebracht, mit Beispielen versehen.

- Die 48 Stücke sind halbtonweise nacheinander in Dur- und Molltonart angeordnet. jeweils Präludium und Fuge (1. C-Dur Pr. 2. C-Dur Fuge 3. c-moll Pr. 4. c-moll Fuge 5. Cis-Dur Pr. 6...)

- Aufteilung in zwei Teile:

  Die Mitte wird mit Fuge XII markiert: Sie enthält alle Töne in Thema und Antwort

Das Ende wird mit Fuge XXIV markiert: Sie enthält alle Töne schon allein im Thema

- Anzahl der Stimmen in den Fugen:

  1.Teil: 1x5, 3x4, 7x3, 1x2;

  2.Teil: 1x5, 4x3, 7x4

Heilige Zahlen:

12 (3x4 und 4x3 (z.B. 12 Stämme Israels, 12 Jünger)),

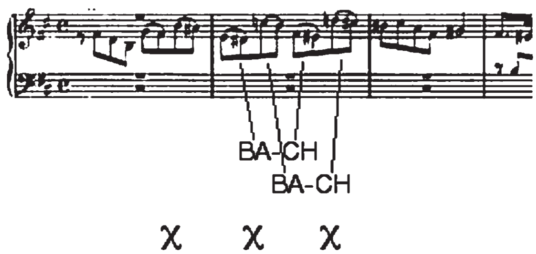
7 (7x3 und 7x4 und 3+4 (z.B. Schöpfung Gottes in 7 Tagen),

5 (1x5 (Zeichen der Passion Christi, da er 5 Wunden hatte)),

2 (1x2 (Polaritäten: Himmel und Erde, Gott und Mensch))

- Präludium I: sehr einfach -> Fuge XXIV: sehr komplex

- Strukturen innerhalb der Stücke am Beispiel von Fuge XXIV:



Die h-moll Fuge ist das letzte Stück des Wohltemperierten Klaviers. Das Thema verwendet alle zwölf Töne der chromatischen Tonleiter. Es könnte wohl kaum einen besseren Abschluss für den Zyklus durch alle zwölf Dur- und Moll-Tonarten geben. Hier hat Bach sein Versprechen erfüllt, „durch alle Tone und Semitonia“ zu schreiben. Ihm ist es nicht nur gelungen, zu allen Tönen eine Fuge zu schreiben, sondern auch eine Fuge zu schreiben, die im Thema bereits alle Töne enthält. Somit greift er die große Struktur hier im Kleinen noch einmal auf.

Mehrere Indizien deuten darauf hin, dass die Passion Christi das Thema jener Fuge ist. Bach verwendet als „Leidens-Tonart“ gerne h-moll (siehe die h-moll Messe). Es lassen sich drei Kreuze im Thema finden (im Schema oben angedeutet). Dies deutet wohl auf die drei Kreuze auf Golgatha hin. Diese Fuge enthält mehr übermäßige und verminderte Intervalle als jedes andere Stück des Wohltemperierten Klaviers. Schon im zweiten Takt sind zwei verminderte Septimen enthalten. Bach bezieht sich selbst in das Geschehen mit ein. Die Intervallabstände b-a-c-h tauchen im Thema gleich zweimal auf. Insgesamt taucht es 13mal auf, jedoch stimmt das Echo einmal (Takt 48) nicht. Somit kommt Bach insgesamt 25mal in der Fuge vor. Die Vollendung der Passion (5 x 5).

5 Die Kunst der Fuge (1740–1750)

5.1 Das Werk:

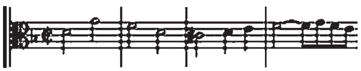
Die Kunst der Fuge ist Bachs letztes Werk. Es endet offen, lediglich ein Nachtrag im Autograph von J.S.Bach's Sohn Philipp Emanuel Bach ist beigefügt:

Über dieser Fuge, wo der Nahme BACH im Contrasubjekt angebracht worden, ist der Verfasser gestorben.

Es bildet das Gegenstück zum Wohltemperierten Klavier, denn hierbei basieren alle Stücke auf nur einem einzigen Thema in einer Tonart.

Es enthält 14 Contrapunctus, 6 Kanons, 2 Fugen für 2 Klaviere und endet mit dem Choral „Wenn wir in hoechsten Noethen" mit dem Text „Vor deinen Thron, Herr, tret' ich nun".

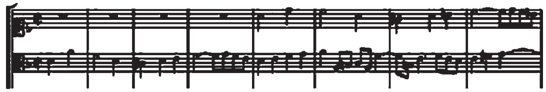
5.2 Strukturen:

Das gesamte Werk basiert auf dem einfachen Thema in d-moll:

Das Schaffen unterschiedlicher Stücke folgt durch:

- verschiedene Möglichkeiten der kontrapunktischen Verarbeitung
- Spiegelung, Tempoänderung des Themas
- neue Ausschmückungen des Themas
- verfrühte Antwort, gespiegelte, im Tempo veränderte Antwort

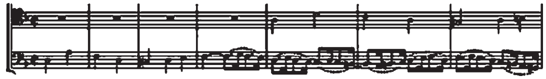
Es folgen nun Beispiele hierfür:

Contrapunctus 1



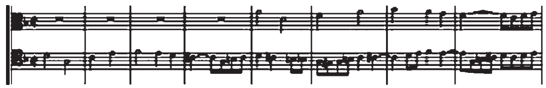
(Thema: normal, Kontrapunkt: regelmäßigen Achtel)

Contrapunctus 2



(Thema: normal, Kontrapunkt: punktierte Achtel)

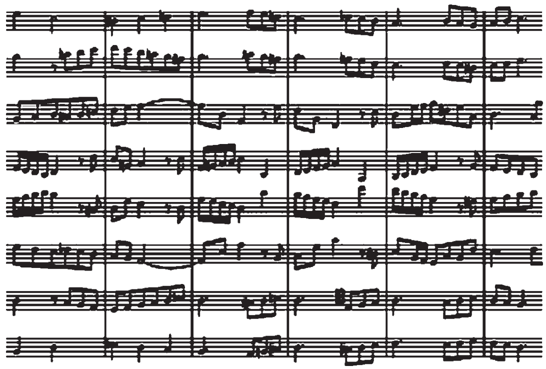
Contrapunctus 3



(Thema: gespiegelt, Kontrapunkt: regelmäßige Achtel)

Contrapunctus 6

(Thema: leicht verändert, Antwort: verfrüht, gespiegelt, doppelt so schnell)

Contrapunctus 12

(komplette Spiegelung der vier Stimmen)

Der Leser soll sich an dieser Stelle jedoch nicht irreführen lassen. Natürlich sind diese Dinge leicht zu sehen, sie doch zu hören oder gar zu komponieren erfordert natürlich höchstes Geschick!

5.3 Zitat: Thomas Mann, Die Buddenbrooks:

„Gewiss, wie Sie sagen, er ist es, durch den das harmonische über das Kontrapunktische den Sieg davongetragen hat. Er hat die moderne Harmonik erzeugt, gewiss! Aber wodurch? Muss ich ihnen sagen, wodurch? Durch die vorwärts schreitende Entwicklung des Kontrapunktischen Stils? Sie wissen es so gut wie ich! Was also ist das treibende Prinzip dieser Entwicklung gewesen? Die Harmonik? O nein! Keineswegs! Sondern die Kontrapunktik! Wozu, frage ich hätten wohl die absoluten Experimente der Harmonik geführt? Ich warne solange meine Zunge mir gehorcht, warne ich vor den bloßen Experimenten der Harmonik!“

6 Das Musikalische Opfer (1747)

6.1 Das Werk:

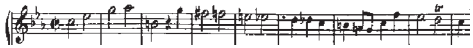
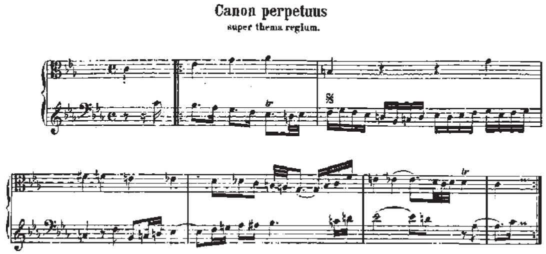
Das Werk entstand aus einer Begegnung Bachs mit dem preußischen König Friedrich II. in der ersten Maihälfte 1747 in Potsdam. Bach war einer Einladung Friedrichs an dessen Hof gefolgt, wo sein Sohn Carl Philipp Emanuel Bach als Musiker tätig war. Bach bat, während er seine Kunst vorführte, den König um ein Fugenthema, welches er dann sofort ohne weitere Vorbereitungen mehrstimmig ausführte. Lediglich der Bitte des Königs, eine sechsstimmige Fuge auf die vorgegebene Melodie zu improvisieren konnte Bach nicht aus dem Stegreif nachkommen; das war aufgrund der chromatischen Tonfolge des „Thema Regium“ eine für Menschen faktisch unlösbare Aufgabe. Wie die Zeitungen vermeldeten, versprach Bach, dass er das Thema „in einer ordentlichen Fuga zu Papiere bringen, und hernach in Kupfer stechen lassen will“.

Das Resultat waren zwei Fugen (eine drei- und eine sechsstimmige), eine Triosonate und zehn Kanons, die 1747 als musikalisches Opfer erschienen.

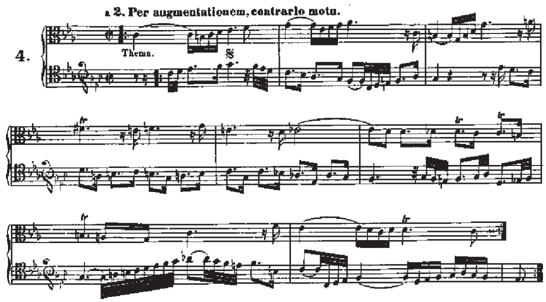
6.2 Strukturen:

Im Folgenden sei das Augenmerk auf die Kanons gerichtet.

Der Kanon ist in der Musik die strengste Form der Polyphonie. Eine Stimme wird von den anderen zeitversetzt imitiert. Abwandeln kann sich einzig die Stufe auf der begonnen wird.

Das Thema Regium:

1. Kanon:

Hierbei ist der Kontrapunkt, nicht das Thema, der kanonartig ausgeführte Teil. Es gilt nur noch zu erforschen, wann welche Stimme einsetzen muss.

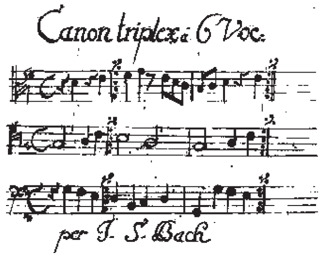
Eine mögliche Lösung wäre, dass die untere Stimme mit dem Violinschlüssel so einsetzt, wie es geschrieben steht und die untere Stimme mit dem verschobenen Bassschlüssel einen Takt später.

2. Kanon:

Auch hierbei ist wieder der Kontrapunkt der kanonartig ausgeführte Teil. Man muss jedoch beachten, dass die Stimme mit dem spiegelverkehrten Violinschlüssel das Blatt richtig herum halten muss.

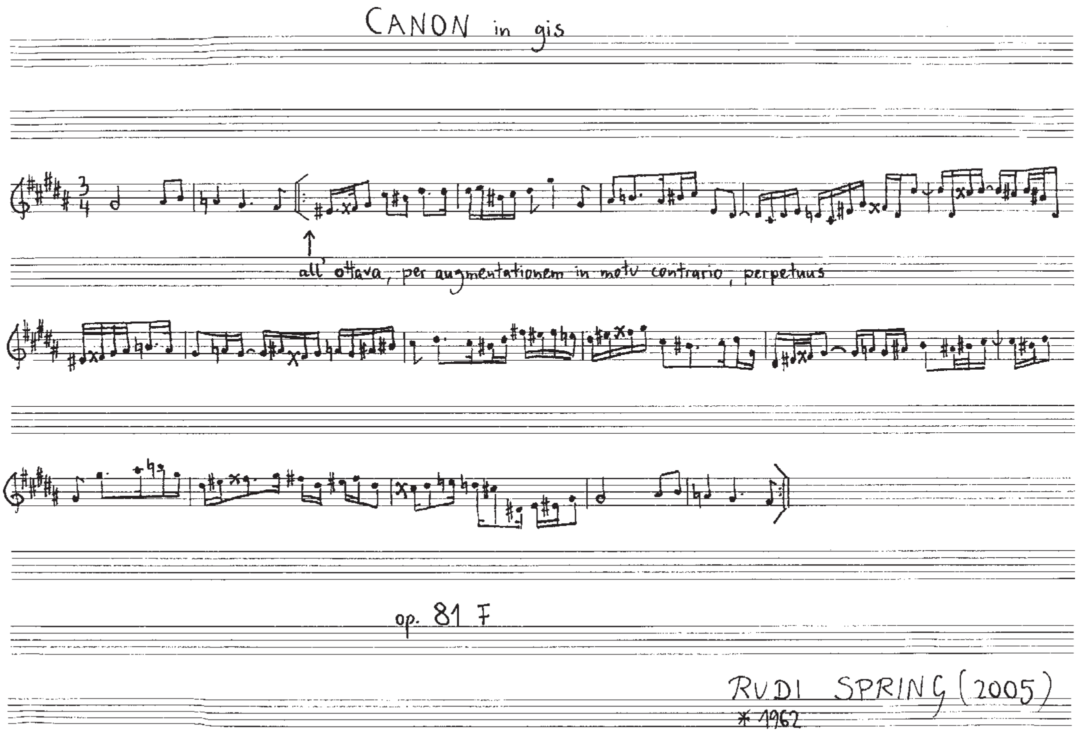
Außerdem muss die Anweißung „per augmentationem“ beachtet werden. Das heißt, eine Stimme muss im halben Tempo musiziert werden.

Eine mögliche Lösung wäre, dass die untere Stimme mit dem Bratschenschlüssen so einsetzt, wie es geschrieben steht und die untere Stimme mit dem spiegelverkehrten Violinschlüssel einen Schlag später mit der Pause anfängt, allerdings alles, auch die Pause am Anfang, genau im halben Tempo. Das heißt, die anderen beiden Stimmen musizieren das Stück doppelt so oft.

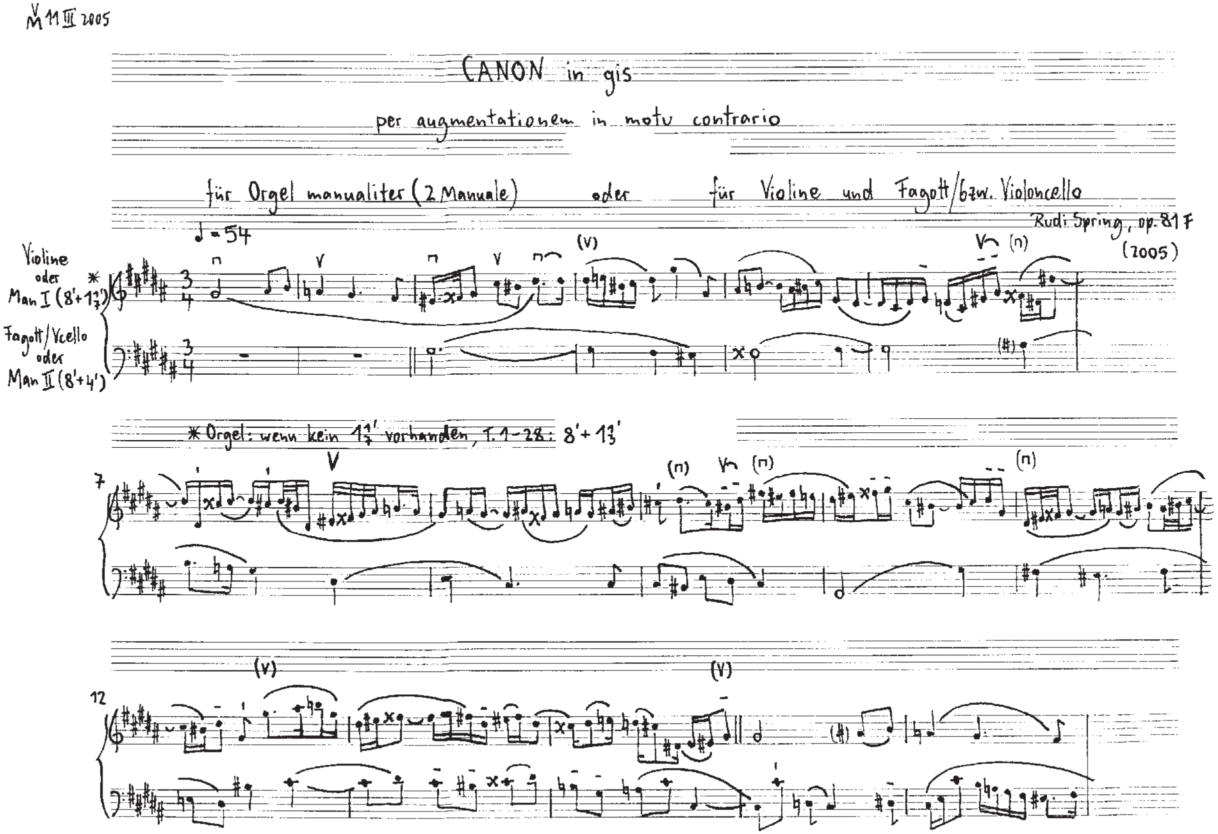
6.3 Warum Kanons:

Warum schrieb Bach Kanons? Wollte er sich mathematisch betätigen, oder waren es musikalische Experimente? Natürlich lässt sich hierbei nur spekulieren. Deswegen soll lediglich darauf hingewiesen werden, dass es zur Komposition eines solchen Kanons mehr als lediglich musikalischen Verständnisses bedarf. Ohne Frage hatte Bach die Fähigkeit abstrakt zu denken. Wollte er diese Fähigkeit nutzen um schöne Musik zu machen, oder um schöne Strukturen, durch die Musik, zu schaffen? War er Musiker, oder Mathematiker?

7 Zitat: Hermann Albert (1922)

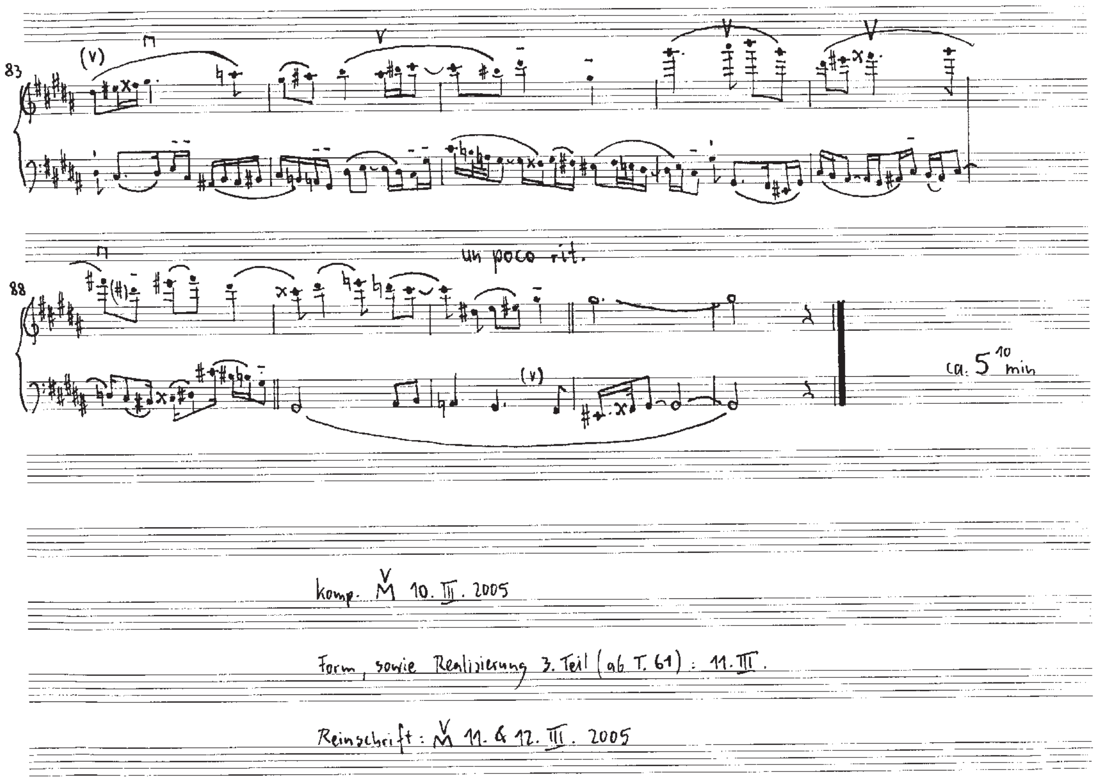
Bei Bach ist keine Note zu viel oder zu wenig, man staunt geradezu über die Einheit des Kunstwerkes, die sich mit mathematischer Genauigkeit begründen lässt.

Visuelle und hörbare Veranschaulichungen der Fugen gibt es im Internet unter *http://jan.ucc.nau.edu/~tas3/wtc.html*


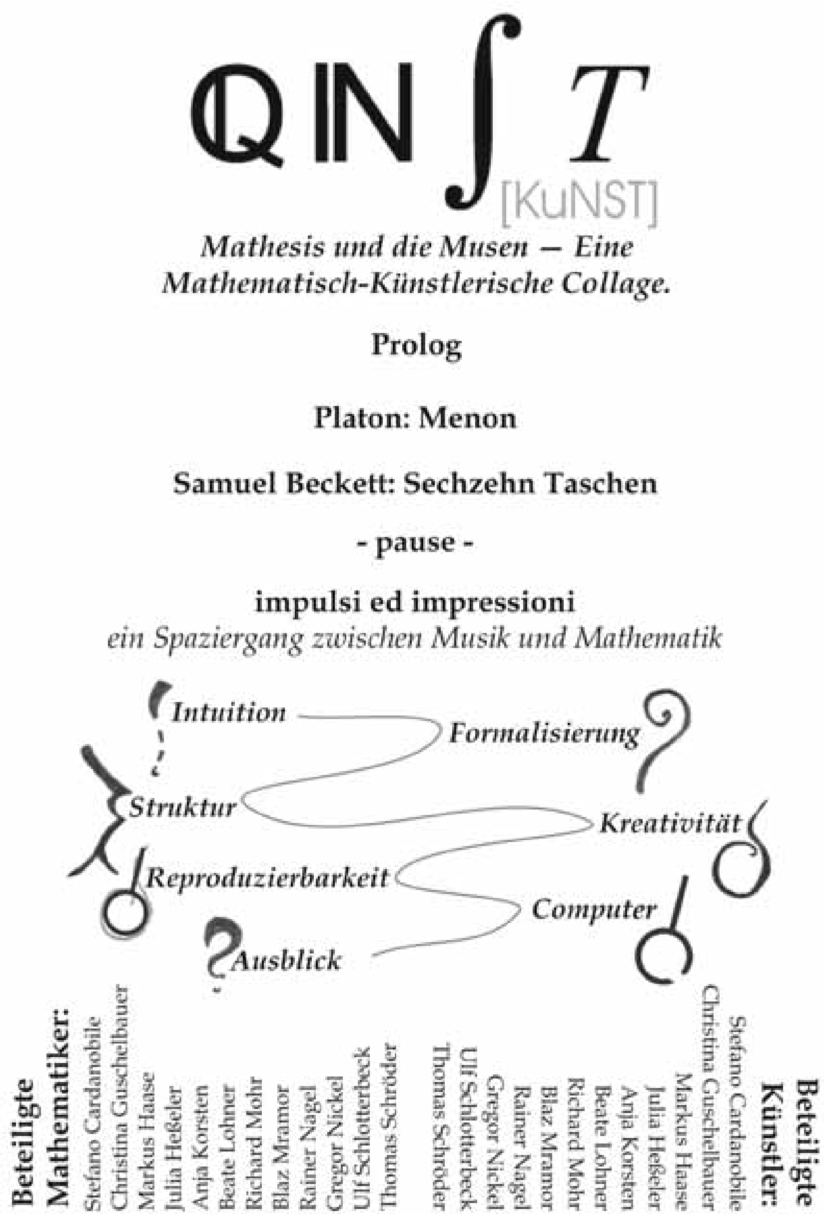
CANON in gis
all' ottava, per augmentationem in motu contrario, perpetuus
op. 81 F
RUDI SPRING (2005)
* 1962

Im Anschluss an den Vortrag über Johann Sebastian Bach erläutert Rudi Spring an Hand eines in der fünfminütigen Pause komponierten „Canon per augmentationem“ die Bachsche Fugentechnik; die später ausgearbeitete Version zeigen die Noten der vorigen und der folgenden Seiten, Villa Massimo, Rom 2.3.2005.


M 11 III 2005
CANON in gis
per augmentationem in motu contrario
für Orgel manualiter (2 Manuale) oder für Violine und Fagott/bzw. Violoncello
Rudi Spring, op. 81 F
(2005)
♩= 54
Violine oder Man I (8'+1 1/7') *
Fagott/Vcello oder Man II (8'+4')
* Orgel: wenn kein 1 1/7' vorhanden, T. 1-28: 8'+1 1/3'
7
12


83
88
un poco rit.
ca. 5 10 min
komp. M̌ 10. III. 2005
Form, sowie Realisierung 3. Teil (ab T. 61) : 11. III.
Reinschrift : M̌ 11. & 12. III. 2005

Zwischenspiel

$\mathbb{Q}\mathbb{N}\int\mathbb{T}$ — Eine Mathematisch-Künstlerische Collage


QIN∫T
[KuNST]
Mathesis und die Musen — Eine
Mathematisch-Künstlerische Collage.
Prolog
Platon: Menon
Samuel Beckett: Sechzehn Taschen
- pause -
impulsi ed impressioni
ein Spaziergang zwischen Musik und Mathematik
Intuition
Formalisierung
Struktur
Kreativität
Reproduzierbarkeit
Computer
Ausblick
Beteiligte Mathematiker:
Stefano Cardanobile
Christina Guschelbauer
Markus Haase
Julia Heßeler
Anja Korsten
Beate Lohner
Richard Mohr
Blaz Mramor
Rainer Nagel
Gregor Nickel
Ulf Schlotterbeck
Thomas Schröder
Beteiligte Künstler:
Stefano Cardanobile
Christina Guschelbauer
Markus Haase
Julia Heßeler
Anja Korsten
Beate Lohner
Richard Mohr
Blaz Mramor
Rainer Nagel
Gregor Nickel
Ulf Schlotterbeck
Thomas Schröder

Rainer Nagel,
ℚℕ∫𝕋, Prolog, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Ulf Schlotterbeck, Gregor Nickel, Stefano Cardanobile,
ℚℕ∫𝕋, PLATON: Menon, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Samuel Beckett

Molloy’s sucking stones sequence

Ich bin einer, der sich am Meer nicht unwohl fühlt. Es gibt Leute bei denen das Meer keinen Gefallen findet, die das Gebirge oder das flache Land vorziehen. Ich persönlich fühle mich dort nicht schlechter als anderswo.

Ich nutzte einen Aufenthalt am Meer um mir einen Vorrat an Lutschsteinen zuzulegen. Es waren eigentlich kleine Kiesel, ich nenne sie aber Steine. Ich verteilte sie gleichmäßig in meinen vier Taschen und lutschte sie, wieder und immer wieder.

Dadurch entstand ein Problem, das ich zunächst auf folgende Art löste: Ich hatte, sagen wir, sechzehn Steine, vier davon in jeder meiner vier Taschen, nämlich in den zwei Taschen meiner Hose und in den zweien meines Mantels.

Wenn ich einen Stein aus der rechten Manteltasche nahm und in den Mund steckte, so ersetzte ich ihn in der rechten Manteltasche durch einen Stein aus der rechten Hosentasche, den ich durch einen Stein aus der linken Hosentasche ersetzte, den ich durch einen Stein aus der linken Manteltasche ersetze, den ich wiederum durch den Stein in meinem Mund ersetzte, sobald ich mit dem Lutschen fertig war.

Auf diese Weise befanden sich wieder vier Steine in jeder meiner vier Taschen, aber nicht genau dieselben. Und wenn die Lust zu Lutschen mich wieder ankam, griff ich aufs Neue in meine rechte Manteltasche und konnte sicher sein, dort nicht denselben Stein in die Hand zu bekommen, wie das letzte Mal. Und während des Lutschens nahm ich die neue Verteilung der Steine vor, wie ich gerade auseinandergesetzt habe, und so fort.

Aber diese Lösung befriedigte mich nur zum Teil, denn die Möglichkeit entging mir nicht, dass durch einen außerordentlichen Zufall es immer dieselben Steine sein konnten, die zirkulierten, in welchem Fall, weit entfernt davon, die sechzehn Steine zu lutschen, wieder und immer wieder, ich tatsächlich nur vier davon, und immer dieselben, lutschen würde, wieder und immer wieder.

Aber ich schüttelte sie gut in meinen Taschen, vor und währen des Lutschen, in der Hoffnung alle Steine in den Kreislauf einzubeziehen, und erst dann schritt ich zu ihrer Verteilung von Tasche zu Tasche. Aber das war nichts als ein Notbehelf, mit dem ein Mann wie ich sich nicht lange zufrieden geben konnte. Ich fing also an, nach was anderem zu suchen.

Und zuallererst fragt ich mich, ob ich nicht besser daran täte, jeweils vier Steine auf einmal, anstatt jedesmal je einen, von einer Tasche in die andere zu bringen, das heißt, während des Lutschens die drei Steine, die in meiner rechten Manteltasche noch waren, in die Hand zu nehmen, und an ihre Stelle die vier Steine in meiner rechten Hosentasche, und an deren Stelle die vier Steine aus meiner linken Hosentasche, und an deren Stelle die vier Steine aus meiner linken Manteltasche, und an deren Stelle endlich die drei Steine aus meiner rechten Manteltasche, die in meiner Hand waren, nebst dem Stein, der sich in meinem Mund befand, sobald ich ihn fertig gelutscht hatte, zu setzten.

Ja anfangs schien es mir so, als ob ich auf diese Weise zu einem besseren Ergebnis gelangen würde. Aber diese Ansicht musste ich nach reiflicher Überlegung ändern und mir eingestehen, dass der Kreislauf der Steine in Gruppen von je vier, genau auf das gleiche hinauslief wie ihr Kreislauf in Einheiten von je einem. Denn wenn ich auch sicher sein konnte, jedesmal in meiner rechten Manteltasche vier Steine zu finden, die von ihren unmittelbaren Vorgängern völlig verschieden waren, so blieb doch die Möglichkeit bestehen, immer auf den selben Stein zu treffen, innerhalb jeder Vierergruppe, und infolgedessen nicht die sechzehn Steine, wie ich es wollte, zu lutschen, wieder und immer wieder, sondern tatsächlich nur vier davon, und immer dieselben, wieder und immer wieder.

Es war also nötig an einem anderen Punkt, als an der Art der Zirkulation anzusetzen. Denn wie immer ich auch die Steine zirkulieren ließ, immer war dasselbe Risiko dabei.

Ganz offenbar konnte ich durch Vermehrung der Anzahl meiner Taschen gleichzeitig meine Chancen vermehren, meine Steine so zu benutzen, wie ich es beabsichtigte, das heißt, einen nach dem anderen, bis der Vorrat erschöpft war.

Hätte ich zum Beispiel anstelle meiner vier Taschen, acht Taschen gehabt, so hätte der teuflischste Zufall es nicht verhindern können, dass ich von meinen sechzehn Steinen mindestens acht davon lutschte, wieder und immer wieder. Im Grunde hätte ich sechzehn Taschen nötig gehabt, um ganz beruhigt zu sein. Und während einer langen Zeit kam ich nicht über die Schlussfolgerung hinaus, dass ich mindestens sechzehn Taschen haben musste, jede mit ihrem besonderen Stein darin, um das Ziel, das ich mir gesteckt hatte, zu erreichen.

Stefano Cardanobile,
ℚℕ∫𝕋, Samuel Beckett: Sechzehn Taschen, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Und wenn es auch denkbar war, die Anzahl meiner Taschen zu verdoppeln, sei es nur dadurch, dass ich jede Tasche in zwei teilte, sagen wir mit Hilfe einiger Sicherheitsnadeln, sie zu vervierfachen schien mir mehr zu verlangen, als ich leisten konnte. Und ich hatte keinen Bock, diese Mühsal auf mich zu nehmen, nur für eine halbe Maßnahme. Denn ich begann jedes Maß zu verlieren, nach all diesem Gerangel, und mir zu sagen: alles oder nichts.

Und wenn ich einen Augenblick lang versucht war, zwischen meinen Steinen und meinen Taschen ein ausgeglichenes Verhältnis herzustellen, durch Reduktion der Ersteren auf die Zahl der Letzteren, so doch nur einen Augenblick lang. Denn damit hätte ich meine Niederlage zugegeben.

Und während ich so auf dem Strand saß, vor mir das Meer, die sechzehn Steine ausgebreitet vor meinen Augen, starrte ich auf sie mit Wut und ratlosem Staunen.

Und während ich auf meine Steine blickte, und mir über die Einsatzmöglichkeiten, die alle gleich mangelhaft waren, den Kopf zerbrach, und viele handvoll Sand zerdrückte, so dass der Sand durch meine Finger rieselte und wieder auf den Strand fiel, jawohl, während ich auf diese Weise meinen Geist und einen Teil meines Körpers beschäftigte und in Gang hielt, dämmerte mir eines Tages dunkel, dass ich vielleicht mein Ziel erreichen könne, ohne die Zahl meiner Steine zu verringern, noch die meiner Taschen zu vermehren, indem ich einfach das Prinzip des Trimms opferte. Die Bedeutung dieser Erleuchtung, die plötzlich in mir zu singen anfing, wie ein Bibelvers aus Jesaja oder Jeremia, konnte ich nicht sofort erfassen, und insbesondere das Wort „Trimm“, das ich in diesem Zusammenhang nie zuvor getroffen hatte, blieb mir lange dunkel. Aber, am Ende glaubte ich zu erraten, das dieses Wort „Trimm“ nichts anderes und nichts bessere bezeichnen könne, als die Verteilung der sechzehn Steine in vier Gruppen zu je vier, mit je einer Gruppe in jeder Tasche, und dass die Weigerung, eine andere Verteilung ins Auge zu fassen, alle meine bisherigen Berechnungen verdorben und das Problem buchstäblich unlösbar gemacht hatte.

Und ohne die Stufen aufzuzählen, und die Schrecken zu beschreiben, durch die hindurch musste, bevor ich zu ihr gelangte, will ich sie enthüllen, meine Lösung.

Ich brauchte zum Beispiel, um zu starten, nur (nur!) sechs Steine in meine rechte Manteltasche zu tun, denn es ist immer diese Tasche, aus der die Zufuhr kommt, und fünf in meine rechte Hosentasche und endlich fünf in meine linke Hosentasche - so ging die Rechnung auf: zwei mal fünf plus sechs gleich sechzehn - und keinen Stein, weil keiner übrig war, in meine linke Manteltasche, die für den Augenblick leer blieb, von Steinen natürlich, denn ihr üblicher Inhalt blieb, ebenso ein paar Gelegenheitsobjekte: Denn wohin tat ich, glaubt ihr wohl, mein Gemüsemesser, meine Silbersachen, meine Hupe, und das übrige, das ich namentlich noch nicht angegeben habe, und vielleicht nie angeben werde?

Also. Jetzt kann ich anfangen zu lutschen. Passt gut auf. Ich nehme einen Stein aus meiner rechten Manteltasche, ich lutsche ihn, ich lutsche ihn nicht mehr und ich stecke ihn in meine linke Manteltasche, die leer ist (von Steinen). Ich nehme einen zweiten Stein aus meiner rechten Manteltasche, ich lutsche ihn, und ich stecke ihn in meine linke Manteltasche, und so fort, bis meine rechte Manteltasche leer ist, abgesehen von ihrem ständigen und gelegentlichen Inhalt, und bis die sechs nacheinander gelutschten Steine alle ohne Ausnahme sich in der linken Manteltasche befinden. An diesem Punkt halte ich ein und konzentriere mich, damit ich kein Scheiß baue. Nun versehe ich meine rechte Manteltasche mit den fünf Steinen aus meiner rechten Hosentasche, die ich durch die fünf Steine aus meiner linke Hosentasche ersetze, die ich durch die sechs Steine aus meiner rechten Manteltasche ersetze.

Jetzt ist es so weit, dass aufs neue keine Steine mehr in meiner linken Manteltasche sind, währen meine rechte Manteltasche wieder mit Steinen versehen ist, und zwar mit solchen von der richtigen Art, das heißt, mit anderen als denen die ich gerade gelutscht habe, und die ich jetzt mich anschicke, einen nach dem anderen zu lutschen, und dann der Reihe nach in meine linke Manteltasche zu überführen, wobei ich die Gewissheit habe, soweit man sie bei dieser Art Tätigkeit haben kann, dass ich nicht dieselben Steine wie zuletzt lutsche, sondern andere. Und wenn meine rechte Manteltasche wieder leer ist (von Steinen), und die fünf nacheinander gelutschten Steine alle ohne Ausnahme in meine linke Manteltasche gekommen sind, schreite ich dazu die gleiche, oder eine entsprechende Verteilung vorzunehmen, das heißt, ich versehe meine rechte Manteltasche mit den fünf Steinen aus meiner rechten Hosentasche, die ich durch die sechs Steine aus meiner linken Hosentasche ersetze, die ich durch die fünf Steine aus meiner linken Manteltasche ersetze.

Jetzt bin ich bereit wieder von vorne anzufangen. Muss ich fortfahren? Nein, denn es ist klar, dass am Ende des nächsten Kreislaufs von abwechselndem Lutschen und Umlagern die Anfangssituation wieder hergestellt sein wird, das heißt, dass ich in der Tasche, aus der die Zufuhr kommt, wieder die sechs ersten Steine, und in der rechten Tasche meiner stinkigen alten Hose, die fünf zweiten Steine, und in der linken Tasche derselben endlich die fünf letzten Steine haben werde, und dass meine Steine in tadelloser Ordnung gelutscht sein werden, ohne dass ein einziger Stein zweimal, oder ein einziger gar nicht gelutscht worden wäre.

Es ist wahr, dass ich beim Beginn der neuen Serie, kaum darauf hoffen durfte, meine Steine in der gleichen Reihenfolge wie beim erstenmal zu lutschen, und dass zum Beispiel der erste, siebente und zwölfte Stein des ersten Kreislaufs, sehr wohl nur der sechste, elfte und sechzehnte des zweiten Kreislaufs sein könnten, wenn man das Schlimmste annimmt.

Aber das war eine Unannehmlichkeit, die sich nicht verhindern ließ. Und wenn auch in den Kreisläufen als ganzes genommen, eine unentwirrbare Unordnung herrschen musste, so war ich wenigstens über den Ablauf jedes einzelnen Kreislaufs unbesorgt, oder jedenfalls so weit, wie man es bei dieser Art Tätigkeit sein kann. Denn damit in jedem Zyklus die Steine in der gleichen Reihenfolge in meinen Mund gelangten, hätte ich entweder sechzehn Taschen haben, oder die Steine nummerieren müssen. Und ehe ich noch weitere zwölf Taschen anlegte, oder meine Steine nummerierte, begnügte ich mich mit der durchaus relativen Beruhigung, die ich während des Ablaufs jedes einzelnen Kreislaufs empfand.

Denn mit der Nummerierung der Steine war es nicht getan; ich hätte mich auch jedesmal, wenn ich einen Stein in den Mund steckte, an die richtige Zahl erinnern und in meinen Taschen nach dem betreffenden Stein suchen müssen. Das hätte mir den Appetit auf Steine sehr bald genommen.

Denn ich wäre nie sicher davor gewesen, mich zu täuschen, es sei denn, dass ich meine Steine jedesmal, wenn ich sie lutschte, in eine Liste eingetragen hätte. Dazu hielt ich mich nicht für fähig. Nein, als die einzig vollkommene Lösung mussten die sechzehn symmetrisch angeordneten Taschen gelten, jede mit ihrem besonderen Stein darin. Dann waren weder Zahlen noch nachdenken nötig, sondern es genügte, wenn ich einen bestimmten Stein lutschte, jeden der anderen fünfzehn von einer Tasche in die andere zu bringen — eine heikle Arbeit gewiss, aber im Rahmen meiner Fähigkeiten — und dann immer in dieselbe Tasche zu greifen, wenn ich Lust zum Lutschen bekam.

Auf diese Weise wäre ich nicht nur über den Ablauf jedes einzelnen Zyklus, sondern über die Zyklen im ganzen beruhigt gewesen, selbst wenn sie nie ein Ende genommen hätten. Aber wenn auch meine eigene Lösung unvollkommen war, so erfüllte es mich doch mit Befriedigung, jawohl, mit ziemlicher Befriedigung, sie ganz allein gefunden zu haben.

Sie war vielleicht am Ende weniger handfest, als ich in der ersten Entdeckerfreude geglaubt hatte, ihr Mangel an Eleganz blieb jedoch bestehen. Und sie war vor allem deswegen unelegant, weil die ungleiche Verteilung der Steine mich physisch belastete. Es ist wahr, dass eine Art Gleichgewicht sich in einem bestimmten Moment einstellte, nämlich am Anfang jedes Zyklus, das heißt nach dem dritten und vor dem vierten Lutschvorgang, aber das dauerte nur einen Augenblick. Und während der übrigen Zeit fühlte ich das Gewicht der Steine, das mich bald nach links, bald nach rechts zog. Als ich das Prinzip des Trimms aufgab, gab ich viel mehr auf als ein Prinzip, ich entsagte einem physischen Bedürfnis.

Aber die Steine in der beschriebenen Art zu lutschen, keineswegs gleichgültig wie, sondern mit Methode, war auch ein physisches Bedürfnis, glaube ich.

Es standen sich also zwei physische Bedürfnisse gegenüber, die unvereinbar waren. Solche Sachen kommen vor.

Aber eigentlich machte ich mir nicht das Geringste daraus, kein Gleichgewicht zu haben, und nach rechts oder nach links, nach vorne oder nach hinten gezogen zu werden, wie es mir auch vollkommen gleich war, ob ich jedesmal einen anderen Stein oder immer denselben lutschte, und sei es von einer Ewigkeit zur anderen. Denn sie hatten alle genau denselben Geschmack.

Und wenn ich sechzehn davon gesammelt hatte, so nicht um sie auf die eine oder auf die andere Art als Ballast zu benutzen, oder um sie der Reihe nach zu lutschen, sondern einfach, um einen kleinen Vorrat zu haben, um nicht ohne Steine zu sein.

Aber eigentlich scherte ich mich auch nicht darum, ohne Steine zu sein. Wenn ich keine mehr hätte, dann hätte ich eben keine mehr, und würde mich deswegen nicht schlechter fühlen, oder kaum.

Und die Lösung, die ich endgültig annahm war, alle meine Steine in die Luft zu werfen, mit Ausnahme von einem, den ich bald in einer Tasche, bald in der anderen aufbewahrte, und den ich natürlich in kürzester Zeit verlor, oder wegwarf, oder verschenkte, oder hinunterschluckte.

Markus Haase,
ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Rudi Spring, Benjamin Löw,
ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Blaz Mramor,
ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Blaz Mramor,
ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Richard Mohr, Anja Korsten, Beate Lohner, Markus Haase, Blaz Mramor,
ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Anja Korsten, Richard Mohr,
$\mathbb{Q}\mathbb{N}\int\mathbb{T}$, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Anja Korsten, Beate Lohner, Markus Haase, Gregor Nickel, Richard Mohr, Blaz Mramor, Thomas Schröder, ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Thomas Schröder,
ℚℕ∫𝕋, impulsi ed impressioni, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Teil IV

Philosophische Grundfragen

Markus Haase

Was ist das eigentlich „Mathematik“?

Nun, Mathematik, das ist zum Beispiel Mathematische Logik und Grundlagen, Kombinatorik, Zahlentheorie, Algebraische Geometrie, Kategorientheorie, Gruppentheorie, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Partielle Differentialgleichungen, Fourieranalysis, Funktionalanalysis, Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Allgemeine Topologie, Algebraische Topologie, Globale Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik, Numerik, Operationsforschung, Spieltheorie, und das sind nur einige wenige der 97 Hauptuntergebiete, in die die American Mathematical Society die Mathematik eingeteilt hat [1].

Obwohl diese Antwort nicht so unsinnig ist, wie sie auf den ersten Blick aussieht (welcher Laie hat schon eine Vorstellung davon, *wie weitverzweigt* die Mathematik tatsächlich ist), sollte man doch auch nicht mit ihr zufrieden sein. Und insbesondere der Mathematiker sollte sich bewusst sein, dass man auch ganz anders an die Frage herangehen kann, etwa

- historisch, durch das Erzählen der eigenen Geschichte,
- soziologisch, durch Untersuchung der beteiligten sozialen Gruppen, der Insider und Outsider und der gesellschaftlichen Funktion,
- psychologisch, z.B. entwicklungs-, individual- und neuropsychologisch.

Ich will noch einen anderen Weg beschreiten, der allerdings die genannten Ansätze nicht nur zulässt sondern sogar herausfordert. Dazu bediene ich mich der folgenden Definition, die auf den ersten Blick banal wirkt. *Mathematik ist das, was Mathematiker tun.* Diese „Definition“ ist natürlich gar keine, wie jeder Mathematiker sofort einwenden wird. Erstens ist ja nicht klar, was ein Mathematiker ist. Zweitens tun doch wohl auch Mathematiker zuweilen Dinge, die sich nur schwerlich als Mathematik bezeichnen lassen. Trotzdem ist diese Bestimmung nicht unbrauchbar, denn sie dient uns in zweifacher Hinsicht. Einerseits nämlich müsste eine Detaillierung ganz selbstverständlich auch die historischen, soziologischen und psychologischen Aspekte miteinschließen. Auf der anderen Seite schließt sie bestimmte Vorstellungen *aus*, etwa die, dass Mathematiker ein Monopol auf die Mathematik hätten (auch Nichtmathematiker können Mathematik betreiben). In Abgrenzung zu stark normativen oder idealisierenden Definitionen nimmt unsere „Definition“ das tatsächliche Tun, die Aktivität der Mathematiker zum Maßstab. Obwohl jede Antwort auf die Eingangsfrage schon „Philosophie der Mathematik“ im besten Sinne ist, verlässt unsere damit zwangsläufig den Rahmen, in dem sich die philosophische Disziplin gleichen Namens klassischerweise bewegt.[1]

Im folgenden will ich also einige Aspekte dessen, „was Mathematiker tun“, aus meiner persönlichen Sicht beleuchten.[2]

Was tun Mathematiker?

Meine Standardantwort auf diese Frage lautet:

„Ich sitze in meinem Büro und starre an die Wand. Manchmal nehme ich einen Stift zur Hand und kritzle etwas auf ein Blatt Papier. Wenn ich viele Blätter vollgekritzelt habe, schmeiße ich den Grossteil davon in den Papierkorb und gehe einen Café trinken.“

Diese Antwort ist *präzise, absolut wahr* und *vollkommen nutzlos*, also nach einem bekannten Witz charakteristisch für einen Mathematiker. Aber im Ernst, sie hat schon ein bisschen was „Mathematisches“ an sich, denn sie ist eine *formale* Beschreibung. Nichts ist gesagt über den Inhalt meines Tuns, meiner Gedanken, über die Bedeutung der Symbole die ich aufs Papier kritzle. Lediglich die Form der Tätigkeit ist expliziert.

[1] Dieser Aufsatz ist unter dem Eindruck der Lektüre des Buches [4] entstanden, das sich — mehr oder weniger ausgehend von der oben gegebenen „Definition“ — eine Kritik der klassischen Philosophie der Mathematik auf die Fahnen geschrieben hat. Allerdings zeigt das sehr lesenswerte Buch [2] (welches nicht auf [4]) eingeht, dass sich diese Disziplin ohnehin in die von [4] propagierte Richtung bewegt, selbst wenn die beiden Autoren in wesentlichen philosophischen Punkten uneins sind.

[2] Das haben auch schon andere, zumeist kompetentere Menschen getan, vgl. [3] oder den Artikel [8] und die darin besprochenen Bücher.

Markus Haase, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Man kann wohl mit Fug und Recht behaupten, dass *das Formale* die ureigenste Domäne der Mathematik ist. Wir Mathematiker sind es gewohnt (oder sollten es zumindest sein), formale Eigenschaften realer Dinge nicht nur auszumachen sondern reale Situationen auf zugrundeliegende formale Strukturen zu *reduzieren*. Genau so, wie in einem Stadtplan von der konkreten Gestalt der Häuser, der Beschaffenheit des Straßenbelags usw. abgesehen wird. (Manchmal wird im Anschluss an Platon behauptet, damit das „Wesentliche" der betrachteten Dinge gefunden zu haben. Aber selbstverständlich ist „wesentlich" immer relativ zum betrachteten Problem zu verstehen.)

Dabei ist es gar nicht einfach zu sagen, was „das Formale" eigentlich ist, noch, wie es zu finden ist. Ob es schon immer da und sogar das viel „Realere" der Realität ist, wie Platon meinte, oder ob — nach Aristoteles — wir es allererst durch Abstraktion und Idealisierung herstellen. Ich will diese Diskussion hier nicht vertiefen, sondern einfach festhalten: Ganz im Gegensatz zu dem Witz, auf den ich oben anspielte und der ja im Grunde behauptet, dass ein Übergang ins Formale notwendig ein Weg in die Nutz*losigkeit* ist, gehört es zu den fundamentalen Einsichten unserer Kultur, dass die Abstraktion, hier verstanden als genau dieser Übergang zum Formalen, tatsächlich oft zum Ziel führt, d.h. zum Lösen von Problemen (wie etwa das Zurechtfinden in einer fremden Stadt). Dass Abstraktion das jeweilige Problem *vereinfacht*, weil man nicht durch die vielen Nebensächlichkeiten von der eigentlichen Aufgabe abgelenkt ist. (Man stelle sich einen Stadtplan vor, der auch noch Angaben zur Form der Häuser macht, zum verwendeten Baumaterial, oder zu den Bewohnern!)

Vielleicht mag man das Zeichnen eines Stadtplanes noch nicht als „Mathematik machen" bezeichnen, es ist jedenfalls eine Vorstufe. Näher dran ist man sicher da, wo man ganz Ernst macht mit der formalen Seite unserer Realität, sich letztlich vollständig auf sie *beschränkt*. Im Laufe der Geschichte der Menschheit haben sich auf diese Weise kollektiv verankerte Konzepte von nur-formalen Eigenschaften herausgebildet und sind zu mathematischen *Objekten* geworden (z.B. Zahlen als „Reifizierung" von Anzahlen[1].). Wir kommen so zu einer inhaltlich reicheren Beschreibung der Tätigkeit des Mathematikers: *Mathematiker untersuchen mathematische Objekte (= Reifizierungen rein-formaler Eigenschaften) und finden etwas über sie heraus.*[4] *Andere Mathematiker (bzw. eben auch Nichtmathematiker) wiederum kümmern sich um die „Schnittstelle" zur „Realität". Landläufig sagt man dazu, dass sie „Mathematik anwenden".* Auf die äußerst spannenden Fragen, die mit dem ganzen Feld der „Anwendung" von Mathematik zu tun haben, will ich hier nicht näher eingehen (siehe dazu etwa [2]).

Mengenlehre

Man darf nicht glauben, der Kanon der mathematischen Objekte erschöpfe sich in Zahlen und geometrischen Figuren, geschweige denn, er sei abgeschlossen. Ständig werden neue Konzepte erfunden, neue Objekte eingeführt und einige davon schaffen es tatsächlich, sich kollektiv zu verankern und in den Kanon aufgenommen zu werden. (Negative Zahlen, Komplexe Zahlen, Quaternionen, …) Dabei kommt den Mathematikern zupass, dass vor mehr als 100 Jahren ein gewisser Georg Cantor einen einheitlichen begrifflichen Rahmen erfand, in den man die bis dato bekannte Mathematik einbetten konnte (die Mengenlehre). Die überaus bequeme Fernwirkung dieser Großtat besteht in dem Umstand, dass nach Cantor (et al.) gewissen Objektbildungen in der Mathematik sozusagen Generalabsolution erteilt wird. Dies hat zu einer inflationären Vermehrung an mathematischen „Objekten" geführt, die oft genug dem Laien als bloße Hirngespinste erscheinen mögen.

Als Mathematiker sollte man solchen Vorbehalten nicht mit Hochmut begegnen. Die mengentheoretische Beschreibung der mathematischen Objekte verschleiert nämlich die Tatsache, dass jedem mathematischen, mengentheoretisch beschriebenen Objekt ein *vor-mengentheoretisches* Konzept zugrundeliegt und dass dieses Konzept nicht einfach mit seiner mengentheoretischen Fassung identifiziert werden kann. (Als Beispiel denke man an die verschiedenen Realisierungen

$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \ldots$ bzw. $\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \ldots$

[3] Dabei ist „Reifizierung" hier nur ein anderes Wort für „Objektwerdung" und entbindet nicht von einer genaueren Untersuchung des gemeinten Prozesses. Dass zumindest unsere Vorstellungen von den Objekten geschichtlicher Wandlung unterliegt, belegt [4]. Für eine interessante Darstellung der Genese unseres Zahlbegriffes siehe [7].

[4] Ich bitte, hier nicht zuviel Philosophie hinein- oder herauszulesen. Eine der wesentlichen Erkenntnisse der Mathematik der letzten 2 Jahrhunderte ist, dass zumindest im Bereich des Rein-Formalen der Unterschied von „Objekt" und „Eigenschaft" verschwimmt.

der natürlichen Zahlen innerhalb der Mengenlehre.[5]) Jedes solche Konzept steht daher zu allererst unter einem *Sinnvorbehalt*, wobei dieser *Sinn* eben nicht schon dadurch gewährleistet ist, dass das Konzept sich mengentheoretisch realisieren lässt. Ich will hier nicht sagen, dass wir Mathematiker deshalb sparsam mit unseren Begriffsbildungen umgehen sollten. Im Gegenteil, wie überall kann und soll man auch hier experimentieren, damit sich aus dem Überfluss gleichsam evolutionär die wirklich tragenden Begriffe herausschälen. Aber damit das funktioniert, ist es wichtig und sogar notwendig, diese Begriffsbildungen kritisch zu diskutieren. Meiner Ansicht nach ist eine solche Diskussion integraler Bestandteil des „Mathematikmachens“.

Formeln und Beweise

Mathematik ist im Wesentlichen ein kollektives Unterfangen.[6] Mathematische Einsichten müssen kollektiv verankert, also kommuniziert werden.[7] Zwei wichtige Mittel dazu, die vielleicht sogar paradigmatisch für die Mathematik stehen, will ich hier kommentieren, *Formeln* und *Beweise*.

Formeln sind eine umstrittene Sache. Auf den einen üben Formeln eine unbeschreibliche, manchmal bis ins Religiöse gehende Faszination aus, der andere ergreift beim ersten Symbol bereits die Flucht. Für Mathematiker ist nichts Mystisches an einer Formel, sie ist zunächst nur ein sehr bequemes Mittel, komplizierte Beziehungen einfach darzustellen. (Als abschreckende Beispiele denke man etwa an die verbalen Termbeschreibungen aus der Schule oder an Mathematikbücher vergangener Zeiten.) Formeln und symbolische Abkürzungen machen es allerdings dem angehenden und dem Nichtmathematiker schwer. Man darf also nicht vergessen, dass alle Symbolschrift nur Abkürzung für normale Sprache ist. Insbesondere unterliegen auch mathematische Erörterungen den grundlegenden grammatikalischen Regeln der normalen Sprache.

Um den Beweis (nicht minder umstritten wie die Formel bei allerdings unterschiedlichem Grenzverlauf) gab es in der Geschichte immer viel Aufhebens. Er gilt als *das* Charakteristikum der Mathematik schlechthin, Garant absoluter Wahrheit (was ihn vor allem für Theologen interessant machte). Immer wieder treffe ich Menschen mit dem Vorurteil, ein Mathematiker würde auch außerhalb der Mathematik nur „Bewiesenes“ (was auch immer das dann sein sollte) akzeptieren. Dabei herrscht wohl eine Vorstellung, die den Beweis zu etwas absolutem, erratischem und sogar „unmenschlichem“ verklärt.

Dabei ist ein Beweis eine sehr menschliche Sache, nämlich der sprachliche, visuelle oder sonstige Versuch, *Einsicht zu vermitteln* und *Irrtum zu vermeiden*. Er basiert daher auf einem zweifachem *Ethos*. Einerseits die intellektuelle Aufrichtigkeit: „Ich will nicht täuschen, auch mich selbst nicht“ (Nietzsche). Andererseits der Wille zur *Kommunikation* und das Bemühen um *Verständnis*.

Beide Aspekte verdienen einen Kommentar. Zum einen ist einzugestehen, dass bei all unserem Beweisen die angestrebte Irrtumslosigkeit (ebenso wie die „absolute und unbezweifelbare Wahrheit“ der mathematischen Theoreme) immer nur ein Ideal, eine „regulative Idee“ (frei nach Kant) bleibt. Wie Hume, der große Skeptiker, sagt: „In all demonstrative sciences the rules are certain and infallible, but when we apply them, our fallible and incertain faculties are very apt to depart from them, and fall to error. …By this means all knowledge degenerates into probability; …There is no Algebraist nor

[5] Interessant auch die Definition mathematischer Objekte mittels sogenannter universeller Eigenschaften wie etwa beim Tensorprodukt von Vektorräumen oder der Stone-Čech-Kompaktifizierung vollständig regulärer Räume. Dass dabei manchmal die Mengenlehre sogar hinderlich ist, kann an solchen Monstrositäten wie den “Grothendieck-Universen” gesehen werden. Aber das nur nebenbei.

[6] An der Grenze dieses Kollektivs bewegen sich diesseits die sog. „Genies“ und jenseits die sog. „Spinner“ (das sind soziale, durch das Kollektiv konstruierte Kategorien). Dabei gibt es einen durchaus fließenden Übergang, der gerade durch die mangelnde oder eben noch vorhandene Fähigkeit bezeichnet wird, seine Einsichten zu kommunizieren. Ohne in den verbreiteten Romantizismus zum Thema „Genie und Wahnsinn“ verfallen zu wollen, lässt sich doch feststellen, dass so mancher „geniale“ Mathematiker durchaus Schwierigkeiten mit dieser Kommunikation hat, was ihn zum „Spinner“ machte, wären da nicht noch ein paar wenige (andere „Genies“), die ihn verstehen. Daher sind Internierungsanstalten für „Genies“ zwar aus wissenschaftssoziologischer Sicht interessant, aber aus wissenschaftspolitischer Sicht zumindest fragwürdig. Eine Wissenschaftsförderung, die nur auf „Genies“ setzte, wäre sogar vollständig absurd.

[7] Insbesondere, wenn man Wissenschaft als evolutionären Prozess versteht, der aus dem Überfluss heraus lebt.

Mathematician so expert in his science, as to place entire confidence in any truth immediately upon his discovery of it, or regard it as any thing, but a mere probability. Every time he runs over his proofs his confidence increases; but still more by the approbation of his friends; and is rais'd to its utmost perfection by the universal assent and applause of the learned world. Now 'tis evident that this gradual increase of assurance is nothing but the addition of new probabilities." (Hume, *A Treatise of Human Nature*, zitiert nach [4].) Angesichts der Vielzahl derjenigen, die die mathematischen Sätze als unbezweifelbar und den mathematischen Beweis als Garantie der Irrtumslosigkeit ansehen, kann man Hume hier nur als Rufer in der Wüste bezeichnen. Dabei artikuliert er eine Selbstverständlichkeit, sofern wir unsere Ausgangs„definition" beachten, die ja Mathematik als ein menschliches Tun bestimmt.[8]

Zum Bemühen um Verständnis ist anzumerken, dass sich selbiges natürlich nicht im Beweisen erschöpft, weil echtes Verständnis sich nicht einfach dann schon einstellt, wenn man die Wahrheit einer Aussage nach logischen Prinzipien aus irgendwelchen Voraussetzungen abgeleitet hat. Zu einem wirklichen Verständnis brauche ich Kontext, Heuristik, Intuition, Geschichte. Leider missachten viele mathematische Publikationen diese elementare Einsicht.

Rechnen

Mathematiker rechnen, das ist ausgemachte Sache. Wir sind pausenlos damit beschäftigt, Zahlenkolonnen zu addieren, Brüche zu multiplizieren oder partielle Integrationen auszuführen. Und um uns schließlich um unser eigenes Brot zu bringen haben wir dann den Computer erfunden und nun lassen wir rechnen und stauben nur noch die Maschinen ab.

Wenn auch die Begabungen hier sehr ungleichmäßig verteilt sind, kann man doch mit einigem Recht behaupten, dass die meisten Mathematiker tatsächlich *keine* Rechenmeister sind. Vor einigen Jahrzehnten gab es eine Strömung in der Mathematik (französischer Strukturalismus), die Rechnen geradezu auf den Index gesetzt hatte. In der Folge war man meistens sehr stolz darauf, etwas ohne Rechnung eingesehen zu haben, denn „eine Rechnung war für uns nie ein Beweis" (Bourbaki). Neuerdings wird wieder mit mehr Elan gerechnet und obwohl auch ich die generelle Bewegung hin zum 'mehr Rechnen' eher kritisch beurteile, sollte man das Rechnen nicht *per se* verdammen.

Tatsächlich bedeutet das Rechnen, also das *Manipulieren von Symbolen nach Regeln*, eine ungeheure Komplexitätsreduktion. Ist schon die Formel ein Meisterwerk der Verdichtung (siehe oben), so erst recht das Umformen der Formeln. Man vergisst dabei alle Bedeutung des Komplexes und muss meistens nur die Bedeutung von Subformeln im Auge behalten.

Seit eh und je erfreut sich daher das Rechnen großer Beliebtheit, oft bei Menschen ganz unterschiedlicher Provenienz. Auf der intellektuell gewichtigeren Seite ging die Faszination so weit, dass man das vernünftige Denken ganz auf Rechnen reduzieren wollte [6]. So hatte Leibniz die Idee einer universellen regelbasierten Symbolsprache, in der man jede Streitfrage durch Rechnen entscheiden kann. Obwohl wir heute (u.a. durch die Arbeiten von Gödel) wissen, dass solch ein Projekt zum Scheitern verurteilt ist, stand diese Idee (mit einer Verzögerung von 200 Jahren) Pate bei der Entwicklung mathematischer Disziplinen wie der Mathematischen Logik, der Theorie formaler Systeme, der Beweistheorie und der sog. Metamathematik [5]. Sie führte außerdem zur Verankerung der Vorstellung, dass zumindest der „ideale" Mathematiker nichts weiter sei als eine Maschine und das Beweisen nichts als eine regelgeleitete Symbolmanipulation.[9]

Heute hat sich diese Auffassung etwas verflüchtigt, einhergehend mit einer Renaissance des *klassischen* Rechnens, die sicher auch auf die erweiterten maschinellen Rechenmöglichkeiten zurückzuführen ist. Allerorten ist außerdem eine gestiegene „Lust am Konkreten", am Partikularen, festzustellen und eine wachsende Abwendung von der Suche nach konzeptionellen Ansätzen. Angesichts der resultierenden „Unübersichtlichkeit"[10] ist m.E. das konzeptionelle Denken also nötiger denn je und kann nicht durch Rechnen ersetzt werden.[11]

[8] Allerdings will ich nicht bestreiten, dass die Fehlbarkeit in der Mathematik und etwa in der Physik von verschiedener Qualität sein mag. [4] macht es sich m.E. in diesem Punkt zu einfach.

[9] Interessanterweise war dies die vorherrschende Auffassung zu einer Zeit, wo das Rechnen im klassischen Sinne gerade nicht so hoch im Kurs stand, siehe oben.

[10] Es ist eine nette Spekulation, einen Zusammenhang zu konstruieren zwischen dieser Entwicklung und der allgemeinen politischen Weltlage.

Unterrichten

So, das war‘s jetzt. Wir wissen, was die Mathematiker machen. Ach nein, da hab ich doch glatt was vergessen! Wir *lehren* ja auch! Glaubt man der öffentlichen Meinung, zudem noch krottenschlecht. Die Lehrer sind schuld wenn die Schüler keinen Dreisatz beherrschen, wir sind schuld, wenn die Lehrer keinen Dreisatz lehren können und unsere Professoren sind schuld, wenn wir das Lebesgue-Integral nicht begreifen. Woran eigentlich ja nicht sie sondern wiederum ihre Professoren schuld sind.

Solche Zuweisungen (und ebenso die in die andere Richtung) sind billig zu haben. Vieles ist dazu zu sagen und vieles wird ja auch allüberall in unseren Landen gesagt. Darum halte ich mich hier zurück und wende mich lieber noch einem anderen, sehr modernen, Betätigungsfeld der Mathematiker zu.

Popularisieren und Rechtfertigen

Neben die klassischen Aufgaben des Mathematikers (Forschen und Lehren) ist heute eine weitere Tätigkeit getreten, die früher fast unbekannt war oder zumindest ein Schattendasein fristete: die sog. *Popularisierung*. Dabei ist die für Popularisierung aufgewandte Zeit und Arbeit in den letzten Jahren ständig gestiegen. Die Maßnahmen, die zum Behufe der Popularisierung ergriffen werden, sind vielfältig. Wir veranstalten Tage der Mathematik, Matheralleys, Mathematische Schülertage, Wanderausstellungen, oder Kinderunis. Wir schreiben Artikel in überregionalen Wochenzeitungen, halten Vorträge in Kunststiftungen oder lassen Enzensberger für uns sprechen. Inhaltlich werden folgende Strategien verfolgt.

1. Man schildert die zeitgenössischen Anwendungen der Mathematik, wie z.B. Codierung und Kryptographie, CD-Spieler, Stauforschung, Wetterprognosen, Bildverarbeitung, usw.
2. Man schafft Mythen, wie das Fermatproblem (gelöst) und die Million Dollar Problems (ungelöst).
3. Man weist auf die Ästhetik der Formeln oder gewisser Beweise oder Theoreme hin.
4. Man stellt Aufgaben zum Selberlösen (Knobeln).

All diese Strategien können aufgehen und das Gegenüber für die Mathematik gewinnen. Sie können aber auch das Gegenteil bewirken. Gegen 1 kann man einwenden, dass 80 Prozent der Mathematiker nichts oder wenig mit wirklichen Anwendungen zu tun haben (so wie auch ich). Punkt 2 ist spektakulär, aber man fragt sich schon, warum so eine Gleichung $x^n + y^n = z^n$ eigentlich so interessant ist? (Insbesondere: wie verträgt sich das mit 1?) Der Hinweis auf Ästhetik (3) trifft auf die Schwierigkeit, dass der Reiz einer Formel erst dann zur Entfaltung kommt, wenn man schon ihre Subformeln versteht, man also schon hinreichend Mathematik kennt (nur als Beispiel: $e^{2\pi i} = 1$). Dasselbe Problem ergibt sich bei besonders „schönen“ Theoremen: mit dem ’Theorema Egregium’ von Gauss ernte ich regelmäßig nur Unverständnis (ist es doch offensichtlich, dass man ein Blatt Papier nicht faltenfrei auf eine Kugeloberfläche kleben kann). Man kann erst seine Bedeutung ermessen, wenn man weiß, wieviel begrifflicher Aufwand darin steckt, selbst die einfachsten geometrischen Sachverhalte in Mathematik zu fassen. Das Knobeln (4) zuletzt hat dann doch immer diesen Geschmack von nettem, aber unernstem Freizeitvertreib.

Woher kommt diese gestiegene Bedeutung der Popularisierung? Es ist ja nicht so, dass wir Mathematiker dazu *verpflichtet* wären. Nun, ohne Zweifel herrscht ein — angesichts knapper öffentlicher Kassen nur allzu berechtigtes — gestiegenes Interesse an der Verwendung öffentlicher Gelder. Da sich praktisch alle institutionalisierte Wissenschaft aus öffentlichen Quellen speist, resultiert ein gestiegener *Rechtfertigungsdruck*. Die Wissenschaft soll Rechenschaft darüber ablegen, was sie tut, wenn man sie denn schon finanziert[12]. Jede Rechtfertigung vereint notwendig *argumentative* und *subversive* Elemente. Dabei verstehe ich unter Argumentation die (diskursive) Rechtfertigung im eigentlichen Sinne. Sie spielt mit offenen Karten und begründet, warum das zu Rechtfertigende gutzuheißen ist. Subversion dagegen versucht, den anderen zu „verführen“, zu gewinnen, ihn auf die eigene Seite zu ziehen, ihn geneigt zu stimmen. (Die Grenzen zwischen beiden sind natürlich fließend.) Wenn der andere die „Öffentlichkeit“ ist, wie in unserem Falle, so ist das Ziel der Subversion also Popularität.

[11] Auch deshalb, weil nichts so fehleranfällig ist wie eine Rechnung. Diese Erfahrung macht praktisch jeder, der oft rechnet, insbesondere die Vertreter jener zweiten großen Klasse von Liebhabern des Rechnens, d.h. die Studenten der Ingenieurswissenschaften. Die Ironie besteht hier allerdings darin, dass sich diese Menschen geradezu weigern zu verstehen und Rechnungen fordern, um dann schließlich aufgrund von Rechenfehlern den Schein doch nicht zu bekommen.

[12] Unter diesem Aspekt ist meine anfangs gegebene Antwort — starren, kritzeln, Café trinken — ziemlich kontraproduktiv.

Rechtfertigung im öffentlichen Raum ist heute nur denkbar vor dem Hintergrund des immer weiter steigenden Stellenwerts ökonomischer Denkweisen im öffentlichen Bewusstsein und Wertesystem. Subversive Ansätze — traditionell eigentlich negativ konnotiert — werden durch diese Entwicklung und den sie begleitenden Trend zur Oberflächlichkeit und Inszenierung unterstützt (Popularität als Rechtfertigungsgrund), manchmal sogar erzwungen (Student als Konsument). Argumentativ liegt der Schwerpunkt auf der ökonomischen Verwertbarkeit. Sieht man in der Popularisierung, wie ich sie oben umrissen habe, die Gesamtheit der gegenwärtigen Rechtfertigungsversuche der Mathematik, so lassen sich die subversiven Elemente (2-4) und die argumentativen (1) leicht ausmachen.[13]

Es gilt nun aber zu bedenken, dass die Mathematik, so wie wir sie betreiben und für gut und richtig halten, sich dem ökonomischen Denksystem in *prinzipieller* Weise entzieht. Zwei Punkte sollen dies erläutern.

1. Mathematik ist (fast per definitionem) ökonomisch afunktional. Selbstverständlich gibt es die „Anwendungen“ in der „Praxis“, all die CD-Spieler und Wettervorhersagen, aber das, was hier „angewandt“ wird, weiß gewissermaßen noch nichts davon und darf es auch nicht, ohne seinen ureigenen Charakter einzubüßen. Wie wir gesehen haben, bewegt sich die Mathematik im Rein-Formalen, also jenseits aller konkreten Anwendungssituation. Die mathematischen Strukturen sind flexibel, und diese Flexibilität kann nur aufrechterhalten werden, wenn man die Strukturen ohne zu engen Anwendungsbezug studiert. Wie eingangs gesagt, ist es ja gerade die Stärke der Mathematik sich vom Konkreten loszumachen! (Die Geschichte der Mathematik ist voll von Beispielen für zunächst „nutzlose“ Ergebnisse, die erst viel später ihre „Anwendung“ fanden. Auch dies wäre undenkbar, wenn jede Mathematik unmittelbar an ihre Anwendung geknüpft wäre.)

2. Mathematik erfordert *Spezialisierung*, und diese wird heutzutage zunehmend kritisch gesehen. Offiziell wird zwar die Notwendigkeit zur Spezialisierung anerkannt, aber gleichzeitig soll man noch Hunderte von Sekundärtugenden, ökonomisches Wissen, Managerfähigkeiten, Organisationstalent und vollste Flexibilität mitbringen, sonst ist man womöglich ein „Fachidiot“. Man soll Spezialist sein, aber nicht zu sehr.[14] So wird mit dem Argument gegen *Überspezialisierung* (die natürlich niemand will, auch ich nicht) einer Unterspezialisierung Vorschub geleistet.

Was folgt daraus? Zunächst erweist sich die gegenwärtige argumentative Rechtfertigungsstrategie der Mathematik als *fragil*. Wesentliche Aspekte der Mathematik, ja sogar ihre eigentlichen *Stärken* kommen gar nicht zur Sprache oder werden nur sekundär gestützt. Selbst das Hauptargument, die Anwendungen, verbirgt die untergründige Einheit der Mathematik und die Verankerung der „angewandten“ in der „reinen“. Dieses Verbergen(müssen) offenbart zweitens eine prinzipiell *defensive* Haltung (und perpetuiert sie zugleich). Auch die subversiven Manahmen schaffen hier nicht Abhilfe sondern verstärken noch das Problem, weil man auch hier die „unattraktiven Aspekte“, also das, was sich nicht „verkaufen“ lässt, verbergen muss, und das betrifft eben nicht nur Nebensächliches, sondern für die Mathematik oder ihr Studium durchaus Essenzielles (die hohe Abstraktion der Konzepte, die Präzision der Sprache und der Argumente, die Frustrationen die ein Studium dieser Dinge mit sich bringt). Dass eine derartig defensive Haltung zumindest langfristig gesehen negativ auf die wissenschaftliche Substanz durchschlagen wird, dürfte klar sein.

Schluss

Die Mathematik, so wie sie heute nach ihrer mehrtausendjährigen Geschichte existiert, ist hochkomplex (vgl. noch einmal [1]). Sie ist dies nicht deshalb, weil uns allen langweilig ist, und wir nichts besseres zu tun haben, als immer kompliziertere Knobelspiele zu spielen. Der Grund ist, dass — eins auf dem anderen aufbauend — immer mehr formale Grundstrukturen unserer Welt herauspräpariert und ihre Eigenschaften und Beziehungen untersucht wurden. Dieser Prozess (m.E. eine Erfolgsgeschichte) kann nur anhalten, wenn neue Generationen von Mathematikern ausgebildet werden. Sie müssen die Sprache der Mathematik verinnerlichen und die grundle-

13 Strategie 1 wird natürlich oft genug auch subversiv verwendet, etwa in Hochglanzbroschüren Mathematischer Institute.

14 Der Spezialist entzieht sich dem allgemeinen ökonomischen Wertesystem, weil bei ihm nichtmaterielle und insbesondere intellektuelle Werte dem Geld u.U. den Rang ablaufen. Auf der anderen Seite macht sich die Politik dieses Faktum geschickt zunutze: die wirklichen Wissenschaftler werden auch bei sinkenden finanziellen Anreizen noch die Unilaufbahn einschlagen.

genden Objekte und Konzepte verstehen, müssen lernen, wie man mathematische Fragen stellt und wie man sie beantwortet (d.h. das Beweisen). All das ist sehr schwierig, und die meisten Mathematiker haben lange gebraucht, um es zu bewerkstelligen. In der Mathematik erweist sich als Stärke, was wie oben erläutert zur Zeit eher kritisch gesehen wird: Ökonomische Afunktionalität und Spezialisierung. Neben den genannten Popularisierungsstrategien (die ich durchaus befürworte) können und sollten wir beide Aspekte offensiv vertreten.[15]

Danksagung und Widmung: Ich danke Rainer Nagel (Tübingen) für sein unermüdliches Bemühen um eine „Mathematik mit menschlichem Antliz“, Gregor Nickel (Tübingen) für sein Engagement insbesondere bei diesem Romseminar, und Oliver Tostmann (Berlin, Pisa) für die sehr anregende Kritik an einer früheren Version dieses Artikels. Dieser Aufsatz ist Wolfgang Arendt (Ulm) gewidmet, anlässlich seines 55. Geburtstages.

Quellen

[15] Man sollte natürlich auch unbedingt darüber nachdenken, wie man sie subversiv popularisieren kann.

[1] American Mathematical Society, *Mathematics Subject Classification*, available at http://www.ams.org/msc/

[2] Brown, James Robert, *Philosophy of Mathematics. An introduction to the world of proofs and pictures*, Routledge, London 1999.

[3] Davis, Philip J., Hersh, Reuben, *Erfahrung Mathematik*, Birkhäuser, Basel, 1994.

[4] Hersh, Reuben, *What is Mathematics, Really?*, Oxford University Press, New York, 1997.

[5] Krämer, Sybille, *Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1988.

[6] Krämer, Sybille, *Berechenbare Vernunft. Kalkül und Rationalismus im 17. Jahrhundert*, de Gruyter, Berlin, 1991.

[7] Mayberry, John P., *The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[8] Ziegler, Günther M., *A small idea of what is I do all day …. Introduction to Mathematics*, in: *Notices of the AMS*, February 2005, pp.221-224.

Bouchra Oualla-Weimer

Was ist Kunst? Vier Theorien

Anders als die „Banachräume“, die „Konvergenz von Folgen“ oder die „Sylow-Gruppen“ lässt sich „Kunst“ nicht auf klare, auf Wohldefiniertheit nachprüfbare Weise definieren. Das mag für den Mathematiker verdächtig klingen. Obwohl die Ausgangsfrage dieses Versuchs eine „was ist“ Frage ist, dennoch wird das Ergebnis keine Definition sein. Die Definition: „Kunst ist …“ werden wir hier nicht hinschreiben können, nicht in 4 Zeilen, nicht in 20 oder 1000 Zeilen und auch nicht in n Zeilen (für eine beliebige natürliche Zahl n). Und das ist gut so!

Spätestens seit Wittgenstein wissen wir um die Komplexität der (Alltags-)Sprache, um die Problematik der Definition etc. Dass Begriffe nicht für Objekte stehen, dass sie keine Namen für „etwas“ sind: und damit – und das ist ja der Punkt - nicht „greifbar“ sind.

Was ist Kunst? Keiner kann auf etwas zeigen und sagen „das ist die „Kunst“!“

Was ist Kunst? Was unternommen werden kann, sind Versuche sich der „Kunst“ anzunähern. Dafür müssen viele Wege gegangen werden, Wege, die bedeutende Philosophen eingeschlagen haben, Wege, die ganze Epochen gekennzeichnet haben.

Epoche 1: Antike am Beispiel Platons

Für Platon hatte das Schöne einen sehr hohen Stellenwert. Er selbst meinte:

„Wenn es etwas gibt, wofür zu leben lohnt, dann ist das die Betrachtung des Schönen“

Aber zwischen dem Leben als Suche nach dem Schönen, und dem Leben als Suche nach dem Wahren entschied er sich für das Zweite. Seine Gedanken, seine Philosophie beeinflussten 2000 Jahre Menschheitsgeschichte. Nun ein Versuch, auf das einzugehen was der Kern seiner Weltbetrachtung war um damit sein Kunstverständnis besser zu ordnen[1].

[1] Dies wird auf Grundlage des Haußkeller Büchlein über Kunst geschehen. (Siehe Quelle).

„Sein“

Darüber rätsel(t)en viele Menschen. Wir könnten meinen, dass entweder etwas ist oder nicht ist. Entweder gibt es Zentauren oder es gibt sie nicht. Platon würde widersprechen. Die Dinge sind nicht nur, sondern „sind mehr“ oder „weniger“. Je mehr etwas ist, desto wahrer ist es. Vollkommen wahr ist nur was im höchsten Maße ist, das kann nur etwas „unveränderliches und unvergängliches“ sein.

Die Dinge der Welt sind alle veränderlich und vergänglich. Sie besitzen aber alle etwas Bestimmtes: Ein Wiedererkennbares Wesen. Der Baum besitzt die Baumhaftigkeit. Alle Bäume werden zugrunde gehen, aber das Baumhafte nicht, auch wenn es keine Bäume mehr gibt. Das ist die Idee des Baumes. Sie hat mit der Idee als menschliche Vorstellung nichts zu tun, sie ist unabhängig von der Erfahrung.

Die Ideen sind die ewigen Urbilder alles Seiende. Sie sind der feste Formenbestand. Sie sind wahr.

Kunst

Platon unterscheidet zwei Sorten von Künstlern:

- Diejenigen, die schöpferisch herstellen, wie etwa ein Tischler.
- Diejenigen, die Vorhandenes nachahmen/ darstellen, wie etwa ein Maler

Laokoon und seine Söhne, 2. Hälfte 2. Jahrhundert v. Chr. Römische Kopie. Marmor, 242 cm. Rom, Vatikanische Museen.

Rainer Nagel, Bouchra Oualla-Weimer, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

Also hat der Tischler die Idee des Tisches im Geist, nach der er einen Tisch baut. Der Maler nimmt sich den Tisch als Modell und produziert durch das Malen ein Bild der 2. Ordnung. Er bildet nicht das „Seiende“ nach, sondern nur das „Erscheinende“. So stehen als Nächstes zur Wahrheit die Künstler der ersten Sorte (z.B. Tischler), gefolgt von denen der zweiten (z.B. Malern).
Die Natur wird von Platon auch als Erscheinung angesehen. Ein Baum ist damit nicht wahrer als ein Tisch. Somit ist ein Landschaftsgemälde nicht wahrer als ein Gemälde über/von Stühlen und Tischen.

Die Schönheit spielt eine wichtige Rolle in Platons Verständnis: Sie ist diejenige, die uns Menschen auf die Suche nach Wahrheit schickt. Platon meinte: „Wäre die Welt ohne Schönheit ließe sie uns gleichgültig“ und „ Wären die Ideen ohne Schönheit, hätten wir keinen Anlass sie zu suchen.“

Die Idee des Schönen ist ja das Schönste. Sie glänzt mehr als alles Schöne, sie zieht uns an. Das Wahre ist das Schöne ist das Gute!

Schöne Dinge *können* die Sehnsucht nach der Wahrheit erwecken, sie müssen es –leider- nicht. Ein schöner Körper kann sowohl Bewunderung und somit Reflexion verursachen, als auch reine Gier erwecken. Dies hängt vom Betrachter ab, aber auch vom „Objekt“.

Der Vorwurf Platons ist nun, dass die Kunst die Tendenz, beim Sinnlichen zu verharren, unterstützt und fördert.

- Der Rang des Sinnlichen in der Kunst, ist nach Platons Auffassung, viel zu hoch. Die Kunst kreiert schöne Farben und Töne z.B., als gäbe es nichts Höheres.
- Ziel der Kunst ist meistens das Erregen der Sinne und Leidenschaften, was dann zur Folge hat, dass das Gleichgewicht zwischen Vernunft und Leidenschaft zerstört wird.

Da aber gerade das Gleichgewicht die Schönheit der Seele ausmacht, verursacht die Kunst das Zerstören dessen was sie pflegt.

Platon ist wegen all diesem für das, was wir heute Zensur nennen. Er schränkt die Kunst ein, nur bestimmten Zielen dürfe sie dienen: Erzieherische Aufgaben, das Loben der Tugenden etc.

Epoche 2: das Mittelalter am Beispiel der Christlich-europäischen Kunsttheorie

„ Dreierlei erfordert die Schönheit: erstens Unversehrtheit oder Vollendung, zweitens ein passendes Maßverhältnis oder Übereinstimmung und drittens schließlich Klarheit bzw. strahlende Farbe.“ Thomas von Aquin.

„Sein“

Es gibt ein Werk das für die mittelalterliche Ästhetik maßgebend war: „Die Namen Gottes“. Der Autor ist unbekannt. Darin wurde in verschieden Weisen das von Gott kommende Gute mit dem Sonnenlicht verglichen. Das Licht, das alles Lebendige erleuchtet, erschafft, belebt, zusammenhält, vollendet. Er ruft die Welt zu Einheit zurück- aus der Zerstreuung und Vereinzelung- Wie das Licht wird er von allen empfindenden Wesen begehrt und geliebt. Gott wird nicht nur „gut“ sondern auch „schön“ genannt. Alle Schönheit dieser Welt ist ein Abglanz der göttlichen einzigen wahren und vollkommenen Schönheit. Das Licht hatte einen besonderen Stellenwert. Schön ist alles was den Licht-Charakter in besonderem Maße zum Ausdruck bringt.

„Kunst“

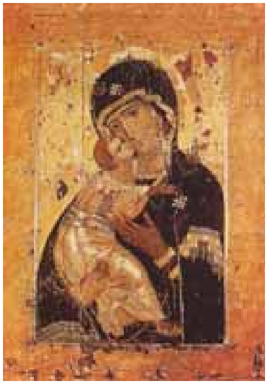
Im Mittelalter verstand man Kunst (= ars) als Synonym für Handwerk, das ist die Herstellung und Gestaltung von Gebrauchsgegenständen. Ein Gegenstand wurde niemals unter rein ästhetischen Aspekten betrachtet. Sein Zweck wurde immer mitberücksichtigt. So war ein zweckwidriger Gegenstand, auch wenn aus edlem Material, hässlich. Schön waren die hellen, bunten, leuchtenden und glänzenden Materialien aber auch harmonisch gegliederte, wohlproportionierte Formen .Das Licht war die sinnliche Schönheit der Welt. Die Aufgabe der Kunst war nun diese Schönheit vor Augen zu führen. D.h. einerseits die sinnliche Schönheit ins Licht setzen, andererseits das Wirken des Unsichtbaren im Sichtbaren deutlich machen, d.h. die Spuren Gottes zu zeichnen. Das Hauptdilemma war der Versuch, das ins Bild zu setzen, was sich nicht abbilden ließ: Gott. Dies erklärt die Neigung zur uneigentlichen Darstellung; Symbol und Allegorie.

Die Christen hatten verschiedene Probleme mit der Darstellung (Ikonen) und dem Schmücken der Kirchen (Byzantinische):

Die Vorwürfe waren verschieden - unter Berufung auf alttestamentalisches Bilderverbot-: Götzendienst, Ablenkung der Massen vom Eigentlichen. Im 8 und 9 JH heftige Auseinandersetzungen, denen eine große Zahl von Kunstwerke zum Opfer fiel. Doch behielten die Befürworter des Kirchenschmucks schließlich die Oberhand.

Denn:

- Die Massen der Gläubigen seien aber von einem „bloß gedachten Gott“ überfordert. Auf sie müsse man Rücksicht nehmen.
- Die Kunstwerke sind doch Gott angemessen, weil er im Bild nicht nur nachgeahmt wird, sondern anwesend: Bild als Offenbarung Gottes.

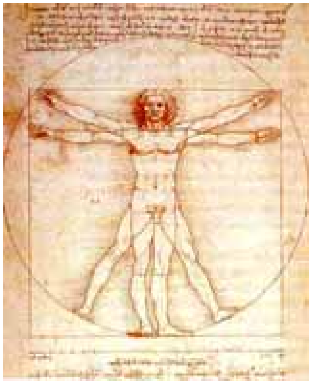


Gottesmutter von Wladimir, um 1125. lkone, ”Tempera auf Holz, 113 x 68 cm. Moskau, Tretjakow-Galerie.

Epoche 3: Die Renaissance

Das 15 JH in Italien kennzeichnete die Steigerung des Selbstbewusstseins der Künstler(er war nicht nur Handwerker/ Diener der Kirche). Der Künstler widmete sich TREUEN Abbildungen der natürlichen Erscheinungen. In der Malerei z.B. lautet die neue Aufgabe: Die Welt so darstellen wie sie sich dem Blick zeigt in immer neuen, niemals sich wiederholenden Gestalten. Die Welt ist nicht nur- nicht mehr- ein Hinweis auf Höheres, sondern auch für sich harmonische Wirklichkeit. Ob etwas schön ist, hängt von seinen objektiven Eigenschaften, nicht vom Betrachter ab. Das Schöne nicht zu sehen beweist nicht den Mangel an Geschmack, sondern an Erkenntnisvermögen. Da die Darstellung eines Objekts guter Kenntnisse seines Wesens bedarf, entfaltete sich das Studium der Proportionen und der Perspektive. (Anatomie und Mathematik dienen der Kunst. Kunst als angewandte Wissenschaft)

Der Künstler wiederholt nicht nur, was schon vorhanden ist, sondern setzt den Schöpfungsprozess auf höherer geistig reflektierter Ebene fort. Ihm wird eine quasi- Göttlichkeit zugesprochen. Sie verschob sich vom Werk (im Mittelalter) zum Künstler in der Renaissance. Die Kunst zeigt, wozu der Mensch fähig ist, und begründet damit seine Würde.



Leonardo da Vinci: Anatomische Studien. Rötel und Feder, 28,1 x 20,5 cm. Windsor, Royal Collection.

Epoche 4: Die Neuzeit am Beispiel Theodor Adornos

Die „Ästhetische Theorie“ wurde erst ein Jahr nach seinem Tod veröffentlicht, also 1970. Sie steht unter dem Einfluss, wenn man das „Einfluss“ nennen möchte, von *Auschwitz*. Nichts kann dem Schatten der Katastrophe entgehen. Die Kunst vor allem nicht: Sie kann nicht bleiben wie sie war, falls es sie überhaupt noch geben kann. Sie lädt auf sich Schuld, wenn sie sich fortsetzt: In dieser entsetzlichen Welt ist nur noch das VERSTUMMEN angemessen. Würde die Kunst aber aufhören zu existieren, so würde jede Hoffnung auf eine bessere Realität, jeder Widerstand gegen das Bestehende, untergehen. Adorno schließt daraus, dass solange das Leben anders ist, als es sein sollte, muss es Kunst geben um die Negativität der Realität zu zeigen, um die Erinnerung an das, was noch nicht ist, wach zu halten; das noch anstehende Glück.

Die Kunst ist eine Utopie. Sie verweist auf den Zustand der Welt, und auf das, was noch zu verwirklichen ist. Sie soll weder trösten noch versöhnen. Sie soll ein Versprechen bleiben, das zugleich gebrochen wird. Wenn dieses Versprechen jemals eine Chance hat, wahr zu werden, dann darf die Kunst das Leiden in/an der Wirklichkeit nicht schwächen. Darum ist alle echte Kunst traurig. Die Gesellschaft versucht aber, der Kunst einen Platz zuzuweisen, eine Funktion zu finden im gut funktionierenden System. Dies schwächt sie. Die Kunst muss sich natürlich dagegen wehren, sich immer wieder gegen die Realität abgrenzen. Das geschieht so: sie verweigert die Kommunikation (mit dem Feind), die Zumutung des Verstandenwerdens weist sie ab. Sie bricht mit Erwartungen und Sinn … sie muss grausam sein, Chaos in die Ordnung bringen, um zu zeigen dass die Ordnung in Wahrheit Chaos ist. Sie muss wehtun, die Unwahrheit der Gesellschaft aufdecken- gegen alle Widerstände und Friedensangebote: Die Kunst ahmt die Welt nach und ignoriert sie!

Der Konsum holt die Kunst aber immer wieder ein. Symptom dieses Einholen sind die Pseudo-Kunstwerke, die man klar an ihre Auswirkung und Zweck erkennen kann: Anstatt in Denken zu geraten, konsumieren wir. Um sich aufzubewahren, ist die Kunst gezwungen sich ständig zu erneuen, sich den kategorialen Einteilungen der Ästhetik zu entziehen: Es gibt keine ewige Normen. Alte Werke erwecken den trügerischen Anschein, wir würden sie verstehen. Oder es hätte eine Zeit gegeben, wo Kunst nicht geheimnisvoll gewesen wäre. Alle Kunstwerke sind Rätsel. Wahrnehmen kann man sie erst, wenn man ihre Fremdheit auch wahrnimmt. Und dies ist Aufgabe der Vernunft.

Anschauen allein zeigt nicht was ein Kunstwerk ist, weil ohne Wissen und kritische Reflexion ist keine ästhetische Erfahrung möglich ist. Aber auch die Vernunft stößt an eine Grenze.

Pablo Picasso, Weinende Frau, 1937. Öl auf Leinwand, 60 x 49 cm. England, Privatbesitz.

Quelle

Hauskeller, Michael, *„Was ist Kunst?“ Positionen der Ästhetik von Platon bis Danto,* Beck, München, 1998

Heino Hellwig

Anschauung und Abstraktion
— *Über die Gemeinsamkeiten von Malerei und Mathematik*

1. Einführung

Anschauung und Abstraktion, Sehen und Denken, die ewige Welt der Ideen und die vergängliche der Sinnlichkeit...: Malerei und Mathematik werden gemeinhin polar gedacht. Thematisiert wurden die Bezüge zwischen Mathematik und Malerei dort, wo die Malerei mathematische Themen wie Perspektive, Symmetrie, Proportionen, hyperbolische Flächen [8, 28] ... behandelt oder die Mathematik ihre Gegenstände visualisiert (etwa in den mathematischen Modellsammlungen oder bei den Fraktalen in der Computergraphik). Als Beispiel für die künstlerische Behandlung von Dreiecksformen sei der Dresdner Konstruktivist Hermann Glöckner genannt (vgl. 1).

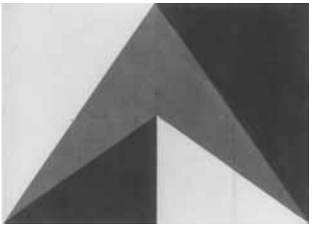


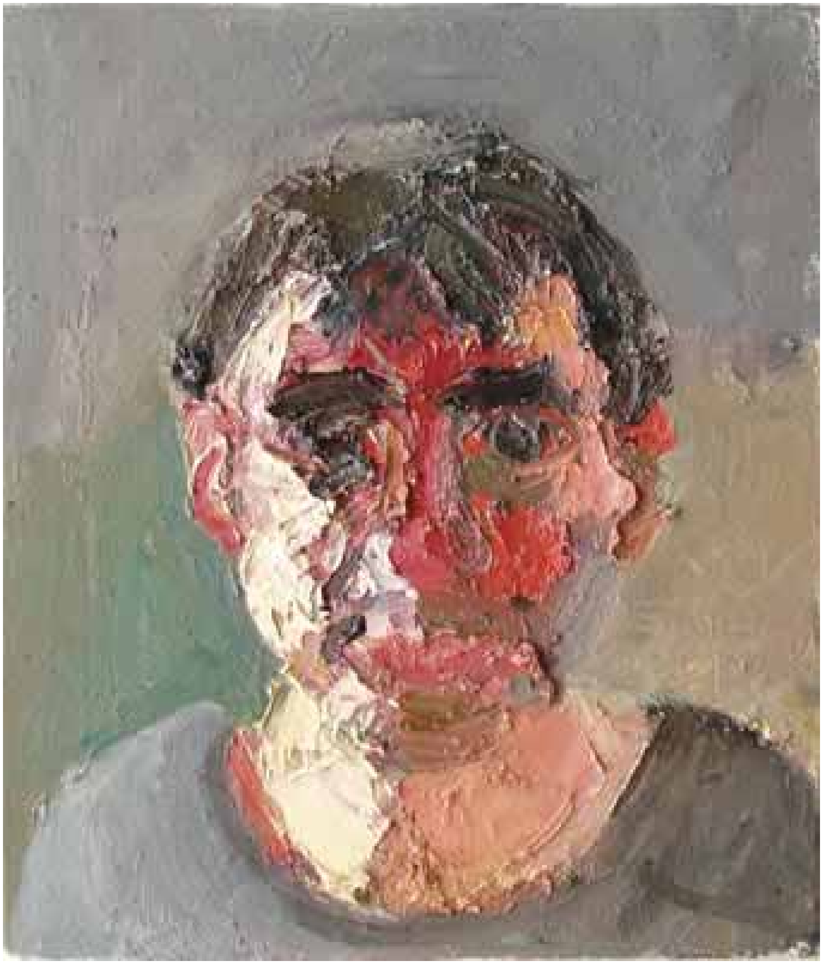
Abb. 1: Komposition von Hermann Glöckner, ca. 1956.

Der goldene Schnitt, Spiegelung, Skalierung ... werden hier spielerisch gebraucht und ins Bild gesetzt. Nun hat Glöckner auch sehr freie Arbeiten gemacht, etwa seine berühmten Kurvenschwünge. Thema ist dort die freie Setzung von Kurvenzügen, welche einen dynamischen Bildraum erzeugen. Natürlich sind solche Kurven Gegenstände der Mathematik, etwa der Geometrie oder der Approximationstheorie. Doch würde man mit diesem Bild eine Verwandtschaft zwischen Malerei und Mathematik wohl kaum belegen wollen. Noch weniger bei weit radikaleren Bildformen, wie sie z. B. Jackson Pollock benutzte (vgl. 2).

Hier wäre nach bisheriger Sicht die Gemeinsamkeit aufgebraucht und ein polarer Gegensatz zwischen freier Kunst und reiner Mathematik behauptet. Ich möchte im Folgenden versuchen zu zeigen, dass dieser Gegensatz nur ein scheinbarer ist. Malerei und Mathematik werden als Versuche gedeutet, die Welt zu verstehen, Ordnung, Klarheit und Schönheit in ihr zu finden. Zu diesem Verständnis werden Parallelwelten konstruiert, Symbol- und Zeichenwelten parallel zur Natur. Symbole, die Aspekte der Welt fassen können. Wichtig ist dabei der Moment der Parallelität. Fehlt dies in der Malerei, ist Zweck, Absicht oder Bemühen am Werke, so gelingt die Weltschaffung nicht, das Bild bleibt eine bedauernswerte Ansammlung von Öl auf Leinwand. In der Mathematik ist die Parallelität ebenso zwingend, allenfalls die Motivation der Begrifflichkeit darf der Welt entnommen sein, der Rest wird mit eigenen Regeln gewebt. Das bloße Abmalen, die Sklaventreue gegenüber der visuellen Anschauung ist in der Kunst ebenso zweitrangig wie die entsprechenden Analogien in den Wissenschaften. Die bildende Kunst zeigt vielmehr das Wesen hinter der Erscheinung, unter der Oberfläche Verborgenes: *Ein Kopf ist kein mit Augen und Ohren behafteter Körper, sondern vom blickenden und hörenden In-der-Welt-sein geprägtes Leibphänomen. Wenn der Künstler einen Kopf modelliert, so scheint er nur die sichtbaren Oberflächen nachzubilden; in Wahrheit bildet er das eigentlich Unsichtbare, nämlich die Weise, wie er sich im offenen des Raumes aufhält, darin von Menschen und Dingen angegangen wird.* [12]

Abb. 2: Jackson Pollock, o.T., Mencil Col. Boston, ca. 1951.

Beispiele hierfür findet man in der ganzen Kunstgeschichte: die Porträts aus Faijum, (1. Jh. n. Chr.) (vgl. [3]), im Dom zu Naumburg oder bei Frank Auerbach.



Heino Hellwig, Selbstportrait, 40 x 50 cm, Öl auf Leinwand, 2004

Zentral in Kunst und Wissenschaft ist also das produktive Moment der Symbol- und Zeichenfindung, der Schaffung von Bildwelten und Theoriegebäuden. Dies Moment scheint mir in beiden Disziplinen dasselbe oder sehr eng verwandt zu sein. Doch, da das eigentlich Produktive wohl sprachlich nicht fassbar ist[1], möchte ich an einigen Beispielen aus Malerei (Cèzanne, Lorrain, van Gogh) und Mathematik (Variationen zum Thema Kreis) versuchen dies zu veranschaulichen.

2. Die Krise der Anschauung: Cèzanne und Hilbert

Durch das Aufkommen der Photographie erlebte die Malerei im 19. Jahrhundert eine große Krise. Die Abbildungsfunktion der Malerei wurde bezüglich Genauigkeit, Ähnlichkeit und Schnelligkeit von einem anderen Medium übernommen. War es nicht gerade die Ähnlichkeit mit dem Motiv, die ein gutes Bild ausmachte? Wie der amerikanische Philosoph N. Goodman 1968 (vgl. [23], S. 21) zeigte, hat die Relation .. *ist ähnlich mit...* andere relationslogische Eigenschaften wie die Relation .. *ist ein Bild von...* . Ähnlichkeit ist reflexiv und symmetrisch, überdies noch graduell. Die Relation zwischen Bild und Abgebildeten ist dies nicht, sie ist weit komplexer. Hier setzte Cèzanne an. Getragen vom Schwung der Impressionisten, die die Verlogenheit der triefenden Salonmalerei nicht ertragen konnten und ihre Staffeleien nach draußen trugen, um wieder frische Luft in die Bilder zu bekommen, stellte Cèzanne das visuelle Seherlebnis in seiner ganzen Komplexität in das Zentrum seiner Arbeit. Für Cèzanne war Wirklichkeit ein Ereignis des Auges. Vorgefasste Begrifflichkeiten und Verwendbarkeitsdenken sollten keinen Einfluss auf die Bildgestaltung finden. Die Malerei war für ihn ein Versuch diese Seherfahrung bildnerisch zu gestalten. Nimmt man das visuelle Seherlebnis als Grundlage der Malerei, so stellt sich die paradoxe Situation, eine sich fortlaufend verändernde Welt als statisches Bild wiederzugeben. *Cèzanne ging es um eine Gleichung, in der sich Bild und Wirklichkeit wechselseitig verständlich machen, ohne dass die Malerei auf Nachahmung beruht. Das Hauptproblem, welches sich dabei stellt lautet: wie kann das Bild etwas darstellen und doch auf seiner Autonomie beharren? Cèzannes Lösung besteht in der réalisation eines Bildes parallel zur Natur, welche die Natur erst sichtbar macht.*[4] Betrachten wir hierzu die *Montagne St. Victorie*, ein Spätwerk aus den Jahren 1904-06 genauer. Zuerst fallen die zahlreichen Flecken auf, welche über das ganze Bild in unterschiedlicher Dichte verteilt sind. Es gibt hier keinen leeren Raum, in welchen die Dinge gestellt werden. Der ganze Bildraum ist erfüllt mit diesen Farbflecken, Raum und Ding werden gleichzeitig mit dem Fleck gesetzt. Die einzelnen Farbflecke haben unterschiedliche Form, Farbe, Orientierung, jeder Farbfleck verweist nur auf sich selber, ist an sich bedeutungslos, da er keine Repräsentation darstellt. In ihrem Zusammenspiel kontrastieren die Flecken sich gegenseitig, verweben sich so zum Bil-

[1] Vom eigentlich Produktiven ist niemand Herr, und sie müssen es alle so gewähren lassen. (Goethe)

Abb. 3: Paul Cèzanne: Montagne St. Victorie, 1904-06, Kunstmuseum Basel, (aus [4]).

Heino Hellwig, Villa Massimo, Rom 3.3.2005.

de. *Insgesamt entfaltet die Malerei ein System aus Elementen, das der Wirklichkeit nicht ähnelt, sie aber dennoch erfassen kann, weil es eine Evidenz in der Sprache des Bildes zustande bringt.* [4]

Cèzanne hat kaum zu überschätzenden Einfluss auf die Moderne: Picasso, Matisse, Morandi, Giacometti... beriefen sich auf ihn. Sein Beharren auf die mühselige Arbeit vor dem Motiv, auf die wechselseitige Korrektur des Bildes und der Anschauung, auf die Bedeutung des visuellen Erlebnisses für die Form- und Farbfindung ist jedoch spätestens seit Ende des zweiten Weltkrieges nur noch eine Außenseiterposition.

MATHEMATIK

WELT

MALEREI

Abb. 4: Malerei und Mathematik als Parallelwelten.

Das Aufkommen der nicht-euklidischen Geometrie, die Konstruktion von stetigen Kurven, die die Fläche füllen und an keiner Stelle eine Tangente besitzen, die Einteilung einer Landkarte in drei Länder, bei der in jedem auftretenden Grenzpunkt alle drei Länder einander begrenzen [11], von Kreisen, bei denen jeder ihrer inneren Punkte Mittelpunkt ist [10]... all das führte die Mathematiker dazu, der Anschauung immer skeptischer gegenüber zu treten, und die Anschauung aus der Grundlegung der Mathematik völlig zu eliminieren. Hilbert entfernte so radikal jede welthaltige Deutung der Axiome der Geometrie. *Wenn ich unter meinen Punkten irgendwelche Systeme von Dingen z.B. das System Liebe, Gesetz, Schornsteinfeger.. denke und dann nur meine sämtlichen Axiome als Beziehungen zwischen diesen Dingen annehme, so gelten meine Sätze, z.B. der Pythagoras, auch von diesen Dingen.* (Hilbert: Brief an Frege). Doch nicht nur im Moment der Schaffung eines Theoriegebäudes durch Verknüpfung von Grundelementen, die keine Repräsentationsfunktion auf etwas außerhalb mehr besitzen, erscheint mir eine interessante Parallele zu Cèzannes Position zu bestehen. Auch Hilberts Einstellung, dem konkreten und anschaulichen Beispiel in seiner Arbeit und Lehre hohe Bedeutung zu zumessen, ähnelt der Haltung Cèzannes. So sind seine Vorlesungen (vgl. etwa [13,14]) in einem ungewöhnlich lebendigen Stil gehalten, der zeigt wie durch konkrete Beispiele allgemeine Begriffe und Sätze gefunden werden und andererseits die Reichweite der theoretischen Ergebnisse auch wieder nur an den vielen Beispielen im vollen Umfang zur Anschauung gebracht werden kann.

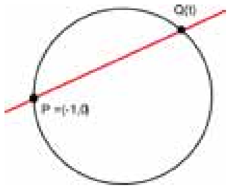
Als Beispiel möchte ich hierfür kurz das Problem der Pythagoreische Tripel besprechen. Gesucht sind alle ganzzahligen Lösungen a,b,c der Gleichung

Schnell finden wir $3^2+4^2=5^2$. Gibt es weitere Lösungen? Bei der Entzifferung von babylonischen Tafeln (1900-1600 v. Chr.) stellte man fest, dass den Babyloniern dieses Problem vertraut war: so wurde etwa dort das Tripel (12709, 13500, 18541) als Lösung angegeben. Der folgende Satz zeigt, wie alle Lösungen gefunden werden können:

Satz: *Die ganzen Zahlen* a,b,c *erfüllen die Gleichung genau dann, wenn* (a,b,c) *proportional zu , wobei und beliebige ganze Zahlen sind.*

Einen Beweis mit den Mitteln der Schulmathematik findet man etwa in §13 des wunderbaren Klassikers von Rademacher und Toeplitz [21]. Die Pythagoreische Tripel lassen sich aber auch auf geometrischem Weg bestimmen.

Beweisskizze: Betrachte die rationalen Punkte auf dem Einheitskreis . Jede Gerade durch $P=(-1,0)$ mit rationaler Steigung t schneidet K in einen Punkt mit den rationalen Koordinaten $(x(t), y(t))$:



$$y(t)=\frac{2t}{1+t^2}.$$

Abb. 5: Geometrische Konstruktion der rationalen Punkte eines Kreises.

Dies ist ein frühes Beispiel der heute sehr aktuellen Verbindung von geometrischen und arithmetischen Methoden, welche Hilbert natürlich bekannt war [17]. Nun kann das Problem aber auch als Einzeiler gelöst werden, wenn man tieferliegende algebraische Methoden benutzt, in diesem Fall das berühmte **Theorem 90 von Hilbert**. (So genannt nach seiner Nummer in Hilberts Zahlbericht, wo es eine wichtige Rolle beim Aufbau der Theorie der algebraischen Zahlkörper spielt.)

$m^2+n^2)$

$x(t)=\frac{1-t^2}{1+t^2},$

Sei L/K eine zyklische Erweiterung algebraischer Zahlkörper mit und sei ein Element von mit Relativnorm 1*, dann gibt es ein β in ein so dass:*

$$w = \frac{\beta}{\sigma(\beta)}.$$

Wenden wir Hilbert's Theorem 90 auf die quadratische Körpererweiterung $Q(i)/Q$ und an, so ergibt sich:

$$\frac{a+ib}{c} = w = \frac{\beta}{\overline{\beta}} = \frac{r\beta}{r\overline{\beta}} = \frac{m+in}{m-in} = \frac{(m+in)^2}{(m+in)(m-in)} = \frac{(m^2-n^2)+i(2mn)}{m^2+n^2}.$$

Dieser schöne Beweis geht auf Olga Taussky zurück (vgl. [25]).

3. Kognitive Gemeinsamkeiten zwischen Malerei und Mathematik

Es mag überraschend erscheinen, der Malerei primär auf Erkenntnis zielende Funktion zuzuschreiben, zumal wenn man sie nur als dekorative, illustrative oder unterhaltende Kunst kennt. Das Hauptproblem der Malerei liegt in der Sichtbarkeit der Dinge begründet. Am ersten Tag schuf Gott das Licht. So berichtet es die Schöpfungsgeschichte. Das Licht ist die Voraussetzung des Erkennens. Licht in eine Sache bringen, etwas sehen, sichtbar machen... sind Umschreibungen für das Verstehen. Das Licht und die Sichtbarkeit ist nun das erste Erlebnis der Malerei: hier ist sie an der Wurzel aller Erkenntnis, am Anfang der Schöpfung. So kann ein Apfel auf dem Tisch, ein Baum im Licht, ein Stück Himmel, ... gemalt die Welt erhellen, zum Verständnis derselben beitragen. Claude Lorrain hat sich lebenslang mit den Rätseln, die das Licht dem Maler aufgibt befasst. Wie kann Licht mittels Farbe zur Anschauung gebracht werden? Wie verändert das Licht den Bildraum? In welcher Form kann Licht adäquat gefasst werden? Eine Zeichnung, die seiner Zeit hunderte Jahre voraus war, findet man in seinen Skizzenbüchern [18]. Der Kreis, die Strahlen, der Horizont und die Raumdurchbrechungen: ein Bild, welches viel über das Wesen des Lichtes aussagt. Keine wissenschaftliche Erkenntnis sicher, aber Erkenntnis darüber, wie das Licht uns erscheint, wie es sich zu Anschauung bringen lässt. Eine Erkenntnis, die nur der als solche fassen kann, dem das zugehörige Problem bekannt ist.

Unsichtbares sichtbar zu machen scheint mir das Erkenntnis schaffende Moment in Malerei und Mathematik zu sein. Der britische Kunstkritiker und Essayist John Berger be-

Abb. 6: Sonnenaufgang, aus einem Skizzenbuch von Claude Lorrain, ca. 1650 (aus [18]).

schreibt dies Wesensmoment für die Malerei so: *Doch ein Glaubensakt ist eine Konstante geblieben, von der Altsteinzeit bis zum Kubismus, von Tintoretto (...) bis Rothko. Der Glaubensakt besteht im Vertrauen darauf, dass das Sichtbare verborgene Geheimnisse enthält, dass sich durch genaue Betrachtung des Sichtbaren mehr erfahren lässt, als ein kurzer Blick preisgibt. Und so waren Bilder dazu da, eine Gegenwart hinter einer Erscheinung zu offenbaren - sei es die einer Madonna, eines Baumes oder einfach des Lichts, das durch ein Rot sickert.* [2] Überflüssig zu sagen, dass der Glaubensakt in der Mathematik die gleiche Konstante darstellt, der Glaube, dass hinter den Zahlen, Kurven und Flächen, Räumen und Operatoren ..., hinter dieser *Chiffren Sendung* (Goethe) wundervolle Geheimnisse der Entdeckung warten, welche zu Einsicht und Klarheit führen, wenn *endlich jede Wendung sich selbst ins Gleiche stellt.*

Als Beispiel für die Aufdeckung verborgener Gesetzmäßigkeiten in der Mathematik sei wieder der Kreis genannt. Unter einem Kreis versteht man die Punktmenge K der Ebene, welche einen festen Abstand r zu einen vorgegebenen Punkte hat:

$$K := K(M,r) := \{P \in R^2 \mid dist(P,M) = r\}.$$

Eine elementargeometrische Analyse führt zu kennzeichnenden Eigenschaften des Kreises, welche die Begriffe Mittelpunkt und Radius nicht benutzt. So zum Peripheriewinkelsatz:

Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, von denen eine vorgegebene Gerade unter einem nämlichen Winkel erscheint.

und zu:

Eine Kurve ist genau dann ein Kreis, wenn sie von jeder Sehne, die irgend zwei ihrer Punkte verbindet, unter gleichen Winkeln getroffen wird.

(vergleiche wieder Rademacher und Toeplitz [21]. Hilbert gibt in [14] übrigens elf Eigenschaften der Kugel an.)

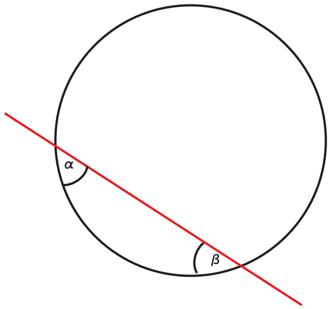


Abb. 7: Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises.

Die Zeichensetzungen der Kunst und der Mathematik erweisen sich so als Symbole, die Erkenntnis zu fassen vermögen. Kunst trägt durch Schaffung neuer Bildwelten, ähnlich wie die Wissenschaften, zur Erkenntnis der Welt bei. Wie bereits Leibniz bemerkte, ist die Welt als Ganzes nicht der Beschreibung zugänglich, der Mensch kann sie immer nur in einzelnen Aspekten wahrnehmen. Hierzu soll im nächsten Abschnitt exemplarisch am Beispiel der Sonnenblume darauf eingegangen werden, wie Wissenschaft und Kunst am gleichen Objekt unterschiedliche Aspekte aufzeigen.

$\lambda \in \mathbb{R}, 0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ $g := \frac{2\pi}{\tau^2}$

4. Zwei Arten die Sonnenblumen zu betrachten

Mathematiker sind interessiert an Mustern, Ordnungen, Strukturen, ... Die symmetrischen Formen, die sich an vielen Pflanzen eindrucksvoll zeigen, hat schon Kepler bewundert; Gegenstand mathematischer Untersuchung wurden sie spätestens im 19. Jahrhundert. Ein Kronjuwel im Pflanzenreich sind die Spiralmuster der Sonnenblumen (*Helianthus annes*). Phyllotaxis nennt man die Anordnung äußerer Blattorgane wie Blätter, Schuppen, Äste, Samen etc. an ihren Wachstumsgründen. Das frühe Entwicklungsstadium dieser Blattorgane wird *Primordia* genannt. Die Primordia werden am Rand (*Apexring*) der Wachstumsregionen (*Meristem*) gebildet und wandern dann nach außen. Dabei werden besonders häufig Spiralanordnungen erzeugt, wobei die Anzahl der Spiralarme in bzw. gegen den Uhrzeigersinn durch zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen (1,2,3,5,8,13,21,..) gegeben sind. Diese sind bekanntlich definiert durch:

$$F_0 = F_1 = 1$$
$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1}, \quad \textit{für } k \geq 0$$

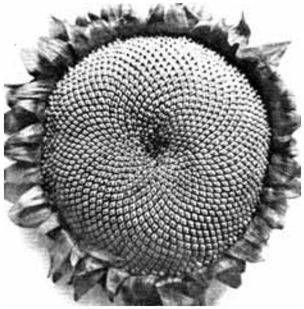


Abb. 8: Sonnenblume (aus Weyl: Symmetry [28]).

Vogel [26] gab 1979 eine einfache mathematische Beschreibung der Spiralanordnung bei der Sonnenblume. Ausgangspunkt ist die Beobachtung zweier wesentlicher Eigenschaften der Spiralphyllotaxis: die dichte Verteilung und die gleichmäßige rotationssymmetrische Anordnung der Pflanzenorgane auf der Fläche des Wachstumgrundes. In Polarkoordinaten wird diese Anordnung durch $\begin{pmatrix} r_n \\ \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \cdot \sqrt{n} \\ 2\pi \cdot \lambda \cdot n \end{pmatrix}$, beschrieben, wobei $c \in R_{\geq 1}$ und der Divergenzwinkel, d.h. der Winkel zwischen zwei aufeinander folgenden Punkten, ist. Die Radiusgleichung drückt die dichte Verteilung auf der Fläche aus. Wird der goldene Winkel , wobei $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (d.h $G = 137{,}507...°$ in Grad) als Divergenzwinkel gewählt, so folgt nach einem zuerst von Steinhaus vermuteten Theorem [19] sogar die gleichmäßigste Verteilung der Primordien.

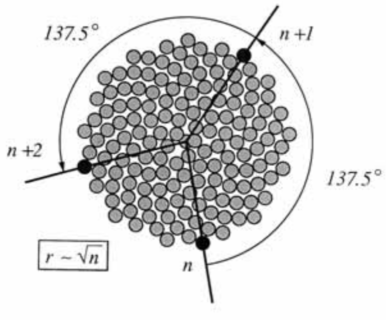


Abb. 9: Punktanordnung mit dem Vogel-Modell (aus [20]).

Dies wird in Abb. 10 visualisiert: auf einem Einheitsintervall werden fortlaufend die Punkte abgetragen. Die Punkte verteilen sich dann gleichmäßig auf die zugehörige äquidistante Einteilung von *I*. Weiter teilt ein neu eingefügter Punkt ein bestehendes größtes Intervall im goldenen Schnitt.

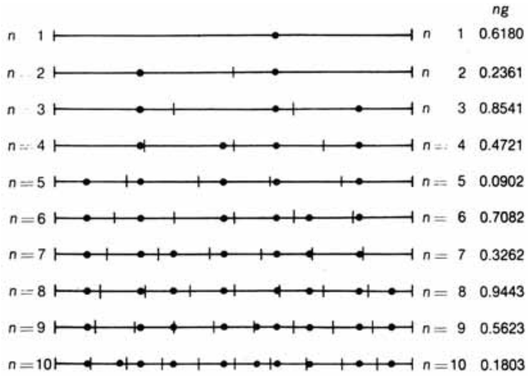


Abb. 10: Die Vermutung von Steinhaus, aus [24].

Wie schafft es die Natur aber den golden Winkel zu realisieren? Der Tübinger Botaniker Wilhelm Hofmeister machte hierzu 1886 folgende interessante Beobachtung:

Die Primordien werden an der Stelle gebildet, welche den größtmöglichen Abstand zu den bereits existierenden Primordien hat (vgl. [15]).

Diese Einfügeregel wurde erst in jüngster Zeit untersucht [1, 7]. Es zeigt sich, dass das in [1] konstruierte diskrete dynamische System Gitter mit konstanten Divergenzwinkeln als asymptotisch stabile Fixpunkte hat. Untersucht man den Einfluss der Anfangspositionen der ersten zwei platzierten Punkte auf die Spiralbildung eines um die Hofmeister Regel erweiterten Kontaktdruckmodells, so zeigt sich eine selbstorganisierende Eigenschaft der Modells (vgl. Abb. 11). Für einen großen Bereich von Anfangswinkeln stellt sich der goldene Winkel als Divergenzwinkel bei einer sehr geringen Standardabweichung ein, was eine Ausbildung von Fibonacci-Spiralmuster zur Folge hat.

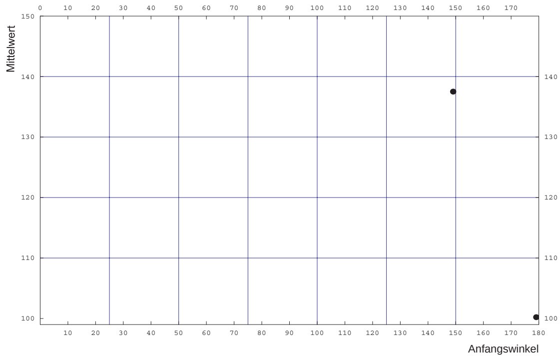


Abb. 11: Selbstorganisierende Eigenschaft eines Kontaktdruckmodells in Verbindung mit der Hofmeister Regel.

Dies als kleiner Einblick in das sehr spannende Feld der mathematischen Modellierung und Simulation der biologischen Musterbildung. In der Malerei werden die Sonnenblumen ganz anders betrachtet, die Spiralmuster kaum wahrgenommen. Blumenstillleben dienten im 19. Jahrhundert vornehmlich dekorativen Zwecken in den Bürgerhäusern (vgl. etwa noch Renoir). In diese gute Stube trat van Gogh einigermaßen verzweifelt ein. Die Vereinzelung des modernen Menschen schon frühzeitig am eigenen Leib erleidend, wurde für ihn das Sehen und Malen zu einem notwendigen Dialog und Band mit der Welt. Das Malen der Natur, insbesondere der Schaffensrausch in Arles, wo er die Sonnenblumen-Bilder im Februar 1889 malt, wurde ihm zum Anker, die Blumen zum Symbol des Lebens. Daher der an Goldgrund erinnernde Hintergrund der Sonnenblumen, die hymnische Freude, die Nacktheit (soweit davon bei Sonnenblume die Rede sein kann) ihrer Erscheinung, die das Gefühl des Zitterns evoziert, die Unmittelbarkeit, die kaum noch steigerbar ist.

Doch selbst das gelingt van Gogh im Februar 1890 noch: *Blühender Mandelzweig*. Gemalt nun schon in der Nervenheilanstalt St. Rémy. Er malt dieses Bild als Geschenk an den neuge-

Abb. 12: Vincent van Gogh: Sonnenblumen, Arles 1889 borenen Sohn seines Bruders Theo, welcher auf den Namen Vincent getauft wurde. *Nie zuvor hat er die lichtvollen Knospen so nah gesehen, die Blütenpracht mit solcher Hingabe in Farbe verwandelt. Die Hoffnung, die dieses Bild ausstrahlt, weiß um ein Menschenleben, das sie trägt* [27]. Dieses Bild scheint mir der alkoholkranke, depressive Pollock mit Abb. 2 zu grüßen, über die Jahrzehnte hinweg.

Abb. 13: Vincent van Gogh: Blühender Mandelzweig, St. Rémy, 1890, van Gogh Museum Amsterdam.

Wo liegt der Erkenntnisgehalt dieser Bilder? Sie zielen ab auf den adäquaten Ausdruck anders kaum benennbarer Wahrnehmungen und Anliegen. Die Sonnenblumen, die Mandelzweige werden durch die Malerei zum Symbol, welches Erfahrung fasst. Während die mathematische Betrachtung der Sonnenblume die Schönheit hinter der Erscheinung zeigt, zielt die malerische direkt auf die Erscheinung, steigert sie und verknüpft sie mit dem menschlichen Erleben.

Ein Erkenntnisgewinn, der unterschiedlicher kaum sein kann, Erkenntnis ist es aber allemal. Letztlich zielt Erkenntnis auf das Ganze, ist unteilbar.

5. Nachtrag

Alles für das Poesiealbum? Blühender Unsinn? Wohl wissend um den Kunst- und Wissenschaftsbetrieb jedenfalls ein Minderheitenbericht.

Ich war müde und durchnässt. Den Finger schon auf der Hotelklingel, fiel mir die Basilica St. Clemente ein, dort sollte es ein schönes Fresko von Fra Angelico geben. Dieses sah ich dann kaum, vielmehr das herrliche Deckenmosaik in der Apsis. Auf einem Goldgrund erstrahlen reine leuchtende Farben um einen spiralförmig sich auswachsenden Lebensbaum, Blumenwiesen, Tiere und Menschen. All das weckte die Sehnsucht dort hinauf zu fliegen. Und auf dem Fußboden ein wunderbares Fliesenmosaik, voller geometrischer Ideen und Symmetrien, eines schöner als das andere.

Beschwingt trat ich wieder auf die Strasse. Es regnete nicht mehr.

Abb. 14: Ausschnitt des Mosaik in der Apsis der Basilika St.Clemente, Rom.

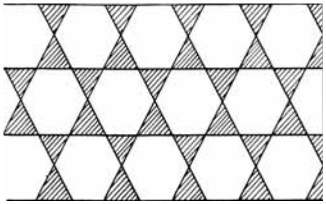


Abb. 15: Form eines Fußbodenmosaik in der Basilika St.Clemente, entnommen [24].

Quellen

[1] Atela, , Gole, C., Hotton, S., 2002. A Dynamical System for Plant Pattern Formation, Journal Nonlinear Sci. Vol. 12, (6), 641 - 676.
[3] Berger, John: Gegen die Abwertung der Welt. Hanser Verlag, München (2001).
[4] Boehm, Gottfried: Paul Cézanne - Montagne St. Victoire Insel Tb 826, Frankfurt a.M. (1988).
[8] Emmer, M.(Hrsg.): The visual mind, Art and Mathematics, MIT Press, Cambridge Mass. u.a. (1993).
[10] Gouvêa, F. p-adic Numbers, Springer, (1997).
[11] Hahn, H,: Die Krise der Anschauung. In: Hans Hahn: Empirismus Logik Mathematik. Suhrkamp, Frankfurt a.M.,(1988).
[12] Heidegger, M.: Bemerkungen zu Kunst-Plastik-Raum, St.Gallen (1996).
[13] Hilbert, D.: Zahlentheorie, Vorlesung WS 1897/98 und SomS 1898 Skript, Math. Inst. d. Univ. Göttingen 1990.
[14] Hilbert, D., Cohn-Vossen, St.: Anschauliche Geometrie Springer, Berlin u.a. 1932.
[15] Hofmeister, W.: Allgemeine Morphologie der Gewächse in Handbuch der Physiologischen Botanik, 1, p. 405-664 Leipzig (1886).
[18] Claude Lorrain. Gemälde und Zeichnungen., München, Schirmer / Mosel, (1996).
[19] Marzec, C., Kappraff , J., 1983. Properties of Maximal Spacing on a circle. J. theor. Biol. 103, 201-226.
[20] Prusinkiewicz, P., Lindenmayer, A.: The Algorithmic Beauty of Plants. Springer-Verlag, New-York, 1990
[21] Rademacher, H., Toeplitz, O.: Von Zahlen und Figuren. Springer, Berlin u.a. 1968.
[23] Scholz, O.R.: Bild, Darstellung, Zeichen, Klostermann, Frankfurt a.M. (2000).
[24] Steinhaus, H.: Mathematical Snapshots. Dower Publ. (1999).
[25] Taussky, O.: Sums of Squares, American Mathematical Monthly, Vol.77, p. 805-830, (1970).
[26] Vogel, H.: A better way to construct the sunflower head. Math. Biosci. 44: 179-189 (1979).
[27] Walther, I.F., Metzger, R.: Van Gogh. Sämtliche Gemälde II. Taschen Verlag, 1992.
[28] Weyl, H.: Symmetry. Basel (1952).

Treppenaufgang zur Escherausstellung, Capitolinisches Museum, Rom

Martin Rathgeb

Beispiele für Selbstbezüglichkeit in Literatur und Kunst — *Viel Lärm um nichts?*

gewidmet: nAtürlich Mir selBst! Wem sonst?

Präliminarie I.

F. Nietzsche: Gigantischer Dilettant und prophetischer Interdisziplinärer (…)

Präliminarie II.

K. Kerényi: Adäquates Zitieren von Dichtkunst (…)

Präliminarie III.

In eigener Sache: Kniefall vor dem Lektor

Statt mit einem „Quod scripsi scripsi." – wie etwa P. Pilatus – der Kritik (des Lektors) zu begegnen, ist diese Neu-Abfassung des eingereichten Aufsatzes ihr entgegen-, ihrem Wunsch nämlich nachgekommen. Die hiermit vorgelegte Kürzung versteht sich im Wesentlichen als *Zitat* des Originals gleichen Titels. Auf Auslassungen weisen daher – wie üblich – die drei Punkte zwischen runden Klammern „(…)" hin, doch wurden von der üblichen Verfahrensweise abweichend kleine Änderungen nicht durch eckige Klammern gekennzeichnet.

Prolog: Selbstbezug – Selbstreferenz:
Was soll man sich darunter vorstellen?

Mangels einer geeigneten Definition wollen wir den Begriff intuitiv verwenden:

Etwas steht in Beziehung zu sich selbst.

Welcher Art kann eine solche Beziehung sein? Wie kann sie zustande kommen? Um uns den entsprechenden Antworten anzunähern, muss es möglich sein, von einem Ganzen und seinen Teilen zu sprechen. Das Einnehmen eines solchen *analysierenden Standpunktes*, ist kein ungewöhnliches Vorgehen, denn man beachte z.B. folgende Arbeitsbeschreibung:

> Der Zerfall in Untersysteme ist im Wesentlichen die Grundlage, um einen Zugang zur Untersuchung der Festkörpereigenschaften zu erhalten. Ohne solch einen Zerfall in Untersysteme und ohne Aufstellen einer Hierarchie von Wechselwirkungen in und zwischen ihnen wäre es unmöglich, sich über die Vielfalt der Festkörpereigenschaften klar zu werden.[1]

Statt Festkörpereigenschaften brauchen wir für die dieser Arbeit gestellte Thematik lediglich Selbstreferenzialität einzusetzen.

Demzufolge können als Ursachen des Selbstbezuges bzw. als mögliche Konzeptionen auftreten:

- das Verhältnis der Teile des Ganzen untereinander;
- das Verhältnis der Teile zum Ganzen;
- das Verhältnis verschiedener Aspekte des Ganzen zueinander.

1. Selbstbezüge in der Mathematik (…)

1.1. Beispiele selbstbezüglicher Ganzheiten: Differentialgleichungen (…)

1.2. Bezüge zwischen den Teilen einer Gesamtheit: Folgen (…)

1.3. Bezug eines Teils zum Ganzen: Basis (…)

1.4. Die Rolle von Selbstbezüglichkeit in der Mathematik (…)

1.5. Zwitter-liches Intermezzo: Vorworte (…)

2. Selbstbezüge in der Lyrik (…)

2.1. Vermischtes: Literarische Apercus

Kurzschriften:[2]

2 g | Zweige
Kl | Kamel [ein K an einem l]
td s | Vorstand [Vor einem s ein t an einem d]

Die drei Beispiele zeigen, wie sich (einzelne) Wörter codieren lassen, dadurch dass Wortbestandteile wie „an", „am", „unter" in die örtlich/bildlichen Relationen der verbleibenden Wortteile aufgelöst werden. Demzufolge besteht der Code gewissermaßen in der Thematisierung der Selbstbezüglichkeit des Wortes.

[1] Jäger/ Kaganow, 12.
[2] Weller, 34.

Martin Rathgeb,Villa Massimo, Rom 2.3.2005.

Schleifenwörter:

vkllls | vokallos

Rekursivität (siehe unter: *Rekursivität*)

gnu | *g*nu is *n*ot *u*nix

Arial Courier New Times New Roman

Diese Beispiele sind schnell erklärt, denn das erste nimmt einfach seine eigene Bedeutung sehr genau; das zweite stelle man sich als einen Lexikoneintrag vor; das dritte ist ein Informatiker-Gag; das vierte: man rate selbst.

Schleifensätze:

Ich bin ein deutscher Satz.

Er denkt *jetzt* an einen deutschen Satz.

Im ersten Beispiel wird der Selbstbezug syntaktisch geliefert und besteht damit permanent.Im zweiten Beispiel aber stellt er sich semantisch ein – falls überhaupt. Die Bedeutung des Satzes richtet sich nach der situationsabh. Referenz von „Er“ und „jetzt“. (…)

2.2. G. Rühm: sonett[3]

erste strophe erste zeile
erste strophe zweite zeile
erste strophe dritte zeile
erste strophe vierte zeile

zweite strophe erste zeile
zweite strophe zweite zeile
zweite strophe dritte zeile
zweite strophe vierte zeile

dritte strophe erste zeile
dritte strophe zweite zeile
dritte strophe dritte zeile

vierte strophe erste zeile
vierte strophe zweite zeile
vierte strophe dritte zeile

[3] Weller, 65.

Der Titel *sonett* schreibt die Form bereits vor: erst zwei Quartette, dann zwei Terzette.Der Inhalt aber geht wiederum über die Form nicht hinaus.Die Verszeilen, welche das Gedicht ausmachen, liefern lediglich die eigene Verortung innerhalb des Ganzen.Die Geschlossenheit von Inhalt, Aufbau und Form – den verschiedenen Aspekten des einen Ganzen – ist kaum besser zu erreichen.Das Gedicht entspringt also gerade der eigenen Selbstbezüglichkeit.

Bei weniger pathologischen Fällen führen meist erst Stilfiguren wie Enjambement und Reim zur Selbstbezüglichkeit des Gedichts. (…)

3. Selbstbezüge in der Epik

3.1. Projekte: Produktionsprozess

3.1.1. Vermischtes (…)

3.1.2. G. Marko: *Schreibende Paare: Liebe, Freundschaft, Konkurrenz*

> Simone [de Beauvoir] beschreibt, wie sie an ein Projekt herangeht, zuerst das Material in sich entstehen läßt, bis sie sich bereit fühlt zu beginnen. Geradezu atemlos füllt sie in einem Zug drei- bis vierhundert Seiten. Der «Wortschwall», der sich hier anhäuft, ist ihr allerdings schnell so zuwider, daß sie noch inmal von vorne anfängt. «Jetzt beginne ich ernsthaft mit der Arbeit. Mein Konzept benutzend, entwerfe ich in großen Zügen ein Kapitel. Dann kehre ich zur ersten Seite zurück, und wenn ich sie wieder durchgelesen habe, schreibe ich sie Zeile für Zeile um. Dann korrigiere ich jede einzelne Zeile im Hinblick auf die ganze Seite, jede Seite im Hinblick auf das ganze Kapitel, und später jedes Kapitel, jede Seite, jede Zeile im Hinblick auf die Gesamtheit des Buches.»[4]

Nach zwei Jahren Arbeit ist sie zwar noch immer unzufrieden mit dem Stand der Dinge, doch kommt sie von alleine nicht mehr weiter – also tritt sie in Diskussion mit Sartre. Erst nach solcher Kritik und seinem Urteil kann die Krise im oben angedeuteten, ernsten Spiel überwunden und eine neue Partie eröffnet werden:

> Sie schreibt den Text also neu, bis zur beiderseitigen Zufriedenheit. Für ihn gilt dasselbe.[5]

Über den Produktionsprozess lässt sich daher sagen:

- Das Romangeschehen entwickelt sich zwischen den Extremen des inspirierten Drauflosschreibens und der formalen Konstruktion der Handlungsfäden.
- Die wiederholte Korrektur erfolgt jeweils, indem die Teile auf das größere Ganze hin abgestimmt werden.
- Vertieft wird also von mal zu mal die Selbstbezüglichkeit.

3.2. Romane: Autor / Erzähler / Figuren

3.2.1. M. Kundera: *Die unerträgliche Leichtigkeit des Seins*

> Seit vielen Jahren schon denke ich an Tomas, aber erst im Lichte dieser Überlegungen [um die Ewige Wiederkehr] habe ich ihn zum ersten Mal klar vor mir gesehen. Ich sehe ihn, wie er in seiner Wohnung am Fenster steht, über den Hof auf die Mauer des gegenüberliegenden Wohnblocks schaut und nicht weiß, was er tun soll.[6]
> Das ist das Bild, aus dem er geboren ist. Wie ich schon gesagt habe, werden Romanpersonen nicht wie lebendige Menschen aus dem Mutterleib, sondern aus einer Situation, einem Satz, einer Metapher geboren, in deren Kern eine Möglichkeit des Menschen verborgen liegt, von der der Autor meint, daß sie noch nicht entdeckt oder daß noch nichts Wesentliches darüber gesagt worden sei. Oder stimmt es, daß ein Autor nur über sich selbst reden kann? (...)
> *Die Personen meines Romans sind meine eigenen Möglichkeiten, die sich nicht verwirklicht haben.* (...)
> Erst [hinter der Grenze, jenseits derer mein Ich endet] beginnt das große Geheimnis, nach dem der Roman fragt. Ein Roman ist nicht die Beichte eines Autors, sondern die *Erforschung dessen, was das menschliche Leben bedeutet* in der Falle, zu der die Welt geworden ist.[7]

Um hier übereilten Schlussfolgerungen Einhalt zu gebieten, möchte ich an die Regel erinnern:

Erzähler ≠ Autor.

Macht sich die Regel in diesem Falle aber wieder alle Ehre, indem sie sich durch eine Ausnahme zu bestätigen weiß? Man mag hier im Speziellen nämlich doch gewillt sein, im Erzähler den Autor Kundera selbst zu sehen, weil eben jener explizit mit dem Anspruch auftritt, Autor zu sein:

> Es wäre töricht, wenn ein ***Autor*** dem Leser einreden wollte, seine Personen hätten tatsächlich gelebt. Sie sind (...) [geboren] aus ein paar suggestiven Sätzen oder einer Schlüsselsituation.[8]

[4] Marko, 328.
[5] Marko, 328.
[6] Kundera, 9.
[7] Kundera, 211f [Hervorhebung durch M.R.].
[8] Kundera, 41 [Hervorhebung durch M.R.].

Für unsere Betrachtung reicht es bereits, wenn der Autor durch den Erzähler die Geschichte der Romanfiguren an den Leser bringt, und zudem die Person des Erzählers, dessen Selbstsicht und sein Innenleben thematisiert. Er liefert dem Leser damit geradezu eine *unvermutete Beichte*.

Autoren weisen es z.T. weit von sich, für den Handlungsverlauf die Verantwortung zu tragen. Verschuldet sei alles durch eine Eigendynamik der literarischen Entwicklung der Dinge, deren Möglichkeit man in der Selbstbezüglichkeit der dreigliedrigen Einheit ‚Autor-Erzähler-Figuren' sehen mag. Autor, Erzähler und Figuren gehen im Romanschreiben nämlich eine Einheit ein, deren Komponenten sich gegenseitig weiter bringen, miteinander entwickeln, manchmal auch zusammen untergehen.

Das ‚Immer-wieder-neu' beim Produktionsprozess eines Buches hat in diesem Hin-und-Her zwischen Autor, Erzähler und Figur sein Pendant. Beides erinnert in seiner Oszillation an den Hermeneutischen Zirkel der Verstehensprozesse. In beiden Fällen (3.1. und 3.2.) muss der Autor also seinen Roman erst zu verstehen/ zu lesen lernen: Das Erspüren der geeigneten Entwicklung wird nur langsam und mühsam erworben. Daneben gilt es noch zu bemerken, wie manchmal gerade aus den verschlungenen Pfaden heraus erst der Weg erkennbar wird; das Verständnis der Konturen – Charakteristika von Autor, Erzähler und Figuren, der Verlauf der Hauptgeschichte – eine zweite sinnvolle Deutungsebene verlangt.

3.2.2. J. Marías: *Schwarzer Rücken der Zeit*

Dieses Wechselspiel zwischen Autor, Erzähler und Figuren hat J. Marías Anlass gegeben ein eigenes Buch zu schreiben, das sich um die Wirrnisse dreht, die aus einer übereilten Vermischung dieser zu trennenden Verhältnisse entstehen.

> *Ich bin nicht der erste Schriftsteller und werde auch nicht der letzte sein, dessen Leben durch das bereichert oder verdammt oder nur verändert wird, was er erdacht oder erdichtet und geschrieben und veröffentlicht hat.* Im Unterschied zu den eigentlichen literarischen Fiktionen sind die Elemente der Erzählung, die ich jetzt in Angriff nehme, völlig zufällig und willkürlich, rein episodisch und akkumulativ (...); sie brauchen also keinen Sinn zu stiften noch bilden sie ein Thema oder eine Handlung oder gehorchen einer verborgenen Harmonie, und man soll ihnen nicht nur *keine Lehre entnehmen – auch von den richtigen Romanen sollte man so etwas nicht wollen, und vor allem sollten sie selbst es nicht wollen* – sondern (...).[9]
>
> Entweder man beachtet mich oder man tut es nicht, entweder man hört mir zu oder man tut es nicht, man braucht es nicht zu tun; so ist das nun einmal, das ist alles.[10]
>
> Man sagt immer, hinter jedem Roman stehe ein Stück Leben oder Wirklichkeit des Autors, wie blaß und schwach und episodisch auch immer, und sei es auch in verwandelter Form. (…)
>
> Wie auch immer, dieser Roman mit dem Titel *Alle Seelen* bot sich an für die fast völlige Identifikation seines Erzählers ohne Namen mit seinem Autor mit Namen Javier Marías, demselben dieser Erzählung, bei der Erzähler und Autor in der Tat übereinstimmen, und deshalb weiß ich nicht mehr, ob wir einer sind oder zwei, zumindest nicht, solange ich schreibe.[11]
>
> (…), da ich es bin, der spricht, und nicht der Erzähler, kann ich sagen, daß (...)[12]

Der erste Block dieses Zitats handelt also von der bereichernden Erfahrung, die im Schreiben gemacht, aber auch von der Reaktion der Leserschaft, von der man heimgesucht werden kann. Die mit dem moralischen Zeigefinger bzw. dem Habitus eines Oberlehrers auftretenden Schriften stimmen argwöhnisch.

Der zweite Block ist ein einzelner, kunstvoll geschmiedeter Satz, der aus zwei vollständigen Disjunktionen ersteigt, um sich dann in ein dreifaches *ritardando* (Wortumfang: 6 – 5 – 3) einzuschmiegen, das in dem „das ist" sich lapidar auszuklingen beginnt und mit „alles" den Leser dazu bringt, innezuhalten und auf ein Nachtönen zu lauschen. In dieser unterkühlten Lapidarität verbirgt sich die eingestandene Allmacht des Lesers, der – allen Beteuerungen und der mühevollen Kleinarbeit des Autors zum Trotz – stets alles nach seinen Zwecken instrumentalisieren und dem Urheber Unlauterkeit unterschieben kann. Alle Beweisführung mag zur verspielten Koketterie (des Autors / Erzählers gegenüber dem Leser) durch den Leser umgedeutet werden!

Der vierte und fünfte Block klären die Identität von Autor und Erzähler in *Schwarzer Rücken der Zeit*, dem Nachfolgewerk zu *Alle Seelen*, während der dritte Block nochmals an die Passage bei Kundera erinnern lässt, in welcher das Romangeschehen beschrieben wird als Experimentierwiese des Autors für Selbstentwürfe.

9 Marías, 9 [Hervorhebung durch M.R.].
10 Marías, 26.
11 Marías, 13f.
12 Marías, 152f.

Die im Zitat angesprochene Beeinflussung eines Autors durch die Arbeit an seinen Texten (die Rede ist also von dem ersten Satz) wiederholt sich gewissermaßen dann, wenn ein Schauspieler sich mühevoll eine Rolle anzueignen versucht.

> In der Theatersprache nennt man das: in seine Rolle hineinwachsen, um in der Rolle sich selbst zu spielen. So schließt ein Schauspieler, wie stattlich man ihn sich nur wünschen mag, nach gewissenhafter Vorarbeit sein Buch und ruft, vom Trunk gestärkt, rot vor Vergnügen: Ich habe meine Rolle![13]

Das erfolgreiche Schauspielern, das Erwecken der erwünschten Illusion, ist eben keine leichte Sache. Es bedarf mühevoller Kleinarbeit in den Vorbereitungen. (…)

3.3. Kleine Zusammenführung von 3.1. und 3.2.: Autopoiesis[14] (…)

4. Selbstbezüge in der Kunst: *Las Meninas*

Die folgenden kleiner gedruckten und nicht eigens alsZitate ausgezeichneten Zeilen entstammen allesamt der Rede *Die Beobachtung der Beobachtung oder die theatralische Teilung der Welt*. Durch diesen Vortrag hat D. Schwanitz am 27.06.1999 seinen Beitrag geleistet zu den *Freiburger Reden – Denker auf der Bühne: N.L.-Beobachtungen der Moderne,* die im Zeichen des Todes N. Luhmanns standen.

4.1. Foucaults Interpretation als Beispiel seiner These

(…) ich spreche von *Las Meninas*, *Die Hoffräulein*, von Velazquez.[15] Sie werden alle das Bild kennen. Velazquez malt sich selber beim Malen. Dabei sehen wir den Maler, die Infantin, die Hofdamen und Zwerge des spanischen Hofes, aber das Bild und das modellstehende Königspaar sehen wir nicht. Woher wissen wir dann, dass Velazquez das Königspaar malt? Weil hinten auf dem Bild an der Wand ein Spiegel hängt, in dem das Königspaar erscheint.[16] Dabei steht es genau da, wo der Betrachter, also der Beobachter, steht, der das Bild betrachtet. Also wir selbst.
Foucault will damit die These illustrieren:[17] Auf Grund ihrer kulturellen Konditionierung war man in der Zeit des Velazquez nicht in der Lage, den Beobachter zugleich als Subjekt und als Objekt seiner eigenen Beobachtung zu sehen.[18]
Das zeige sich, so Foucault, an der Trias von Produktion, Bild und Bildbetrachtung – also dem Maler, dem Modell und dem Betrachter, die die drei Aspekte der Repräsentation verkörperten: *Das Modell kommt als Spiegelbild nur vor, der Betrachter überhaupt nicht und der Maler hat kein Bild.* So also die Argumentation von Foucault.

Abb. 1: Las Meninas.

Wer präsentiert was wem? – *das ist hier die Frage*, an der sich die Geister scheiden, weil sie verschiedene Antworten darauf wissen. Wohl stimmen sie im *wer* noch überein: Das Subjekt, die Person, welche etwas jemandem darreicht, ist der Maler: der Produzent eines bildhaften Gegenstandes und letztlich: Velazquez selbst. Das ‚Dativ-Objekt' liefert auch nicht den Stein des Anstoßes, denn darin ist einfach der Bildbetrachter zu sehen, der als Beobachter die Beobachtung vollzieht. Der Pudel steckt also im ‚Akkusativ-Objekt', gerade weil darin kein Konsens besteht: im Bild, im Gemälde. Denn

13 Bernanos, 313.
14 Die Bemerkungen hierzu sind vornehmlich Luhmann und Bühl zu verdanken.
15 Diego Rodriguez de Silva y Velazquez (oft auch: *Velázquez*): Sevilla 1599-1660 Madrid. – Das hier interessierende Gemälde (oft auch: *Las Meniñas*) ist ein Werk des Jahres 1656 und damit das mittlere seiner drei großen Gemälde (d.a.: Las Lanzas [ca. 1635]; Las Hilanderas [1657]). Es ist mittlerweile mit weiteren Namen belegt (auszugsweise): Die Hofdamen; Familienbild; Die königliche Familie; Velázquez und die königliche Familie.
16 Alle Personen gelten als authentisch und sind sogar namentlich bekannt (Herzer, LIIIf u. LXXXIVf).
17 Die Rede ist hier von der Interpretation, mit der M. Foucault (franz. Philosoph: 1926-1984) sein Buch *Les mots et les choses* (1966) beginnt.
18 Hervorhebung durch M.R.

wer oder was ist das *Modell* von *Las Meninas*? Diese Frage mag nun etwas überraschen, weil obige Fußnote die Authentizität der gemalten Personen behauptet hat. Auf dem Gemälde sind abgebildet, wie der Name schon angibt: Hoffräuleins des spanischen Hofes. Weiter lässt sich sagen, dass *Las Meninas* auf sog. nullter Ebene der Infantin Margarita gewidmet ist. In oben zitiertem Abschnitt verdient besondere Beachtung der Halbsatz nach dem Gedankenstrich. Seine Ausdeutung – die *konkrete Instantiierung* der Allgemeinplätze „Produktion, Bild und Bildbetrachtung“ – ist im Zitat kursiv gehalten und erfolgt nun gestückelt noch ausführlicher.

Das Modell kommt als Spiegelbild nur vor: Foucault behauptet, dass der eigentliche Gegenstand des Bildes, also das Modell schlechthin, das Königspaar ist – das indirekt abgebildet wurde. In dem Rahmen nämlich, in welchem es in Erscheinung gesetzt ist, hängt nach herkömmlicher Meinung kein Bild, sondern ein Spiegel. Und doch stimmen nicht alle Interpreten darin überein, dass das Spiegelbild des Königspaars gemalt ist, insofern dabei an eine Spiegelung erster Ordnung gedacht wird.[19]

Der Betrachter [ist] überhaupt nicht [zu sehen]: Das sollte eigentlich nicht verwundern. Wir sind es schließlich gewohnt, dass wir, falls wir ein Bild betrachten, nicht plötzlich in dem Bild erscheinen.

Der Maler hat kein Bild: Mit Foucaults These im Hinterkopf, wage ich die Interpretation, dass der von Velazquez gemalte Velazquez das Objekt einer Beobachtung ist, das zu seiner Zeit nicht zugleich noch als tätiges Subjekt gesehen werden konnte. Tatsächlich ist die Leinwand des gemalten Velazquez nur von hinten zu sehen. Doch was bekämen wir eigentlich zu sehen, könnten wir sie einsehen? Hierzu folgendes Zitat, das nochmals auf die Foucault’sche Interpretation des Verhältnisses Modell-Spiegelbild eingeht:

> Es ist nicht immer klar aus Foucaults Worten zu entnehmen, was dieser Spiegel genau wiedergibt, die Vorderseite der dem Betrachter verborgenen Leinwand oder direkt das Modell. Ich glaube aber, daß Foucault die zweite Alternative meint, denn er bezeichnet das nicht einsehbare Bild als „unberührte Leinwand“ (1966, 1995: 40). Er ist also der Meinung, daß der Maler gerade mit seiner Arbeit, der Herstellung eines Portraits des königlichen Paares, beginnt. Und dieses königliche Paar sieht sich selbst im Spiegel.[20]

Immer wieder wird Foucaults Interpretation von *Las Meninas* widersprochen, doch wird das selten mit seinen eigenen Worten bzw. mit der Interpretation seiner eigenen Worte gewagt – man begnügt sich meist mit dem Nachweis von Irrtümern, denen Foucault aufgesessen ist. Ich darf klarstellen, dass ich Foucault weder zu widerlegen, noch ihm zu widersprechen gedenke, dass ich vielmehr durch ein Ausspielen der Interpretationen gegeneinander eine *Überhöhung*[21] der Thesen erreichen will.

Wir erinnern uns an die Bemerkung bei Schwanitz, dass der Betrachter überhaupt nicht vorkommt und darin laut Foucault eine Grenze der Velazquez’schen Darstellung zu sehen war, die uns nicht sonderlich zu überraschen wusste. Das folgende Zitat nun beinhaltet aber gerade den Hinweis, dass es Velazquez überraschenderweise gelungen ist, den Betrachter ins Bild zu bannen – um es schon vorweg zu nehmen: das Arrangement der in *Las Meninas* direkt modellierten Personen, die nämlich alle aus dem Bild heraus auf das vermeintlich ausgesparte Modell schauen, zuzüglich dessen indirekte Aufnahme durch den geschickt platzierten Spiegel, bewirkt den unerwarteten Zauber, durch den auch wir als Betrachter aus dem Bild herausschauen.

> Das Herrscherpaar steht an der Stelle, die auch ein Betrachter einnimmt, wenn er *Las Meninas* anschaut. Hierdurch changieren wir, die wir das Bild betrachten. Wir sehen uns im Spiegel als das Königspaar, denn wir nehmen den Raum ein, den das Modell einnahm, und wir werden aus dem Bild heraus angesehen wie eben dieses Modell. Und dennoch sind wir es, die sehen. Modell und Betrachter werden eins.[22]

19 Dass man in dem Spiegel der Gestalten von König und Königin ansichtig wird, kann daran liegen, dass es darin zu einer Spiegelung eines Spiegelbildes (eines Spiegelbildes eines … [wie oft?]) des Königspaars oder auch eines gemalten Bildes des Königspaars kommt.

20 Rehkämper, 3 von 9. Die zitierte Literaturangabe verweist auf: M. Foucault; *Les mots et les choses*. (1966); dtsch.: *Die Ordnung der Dinge*. Frankfurt/M.: Suhrkamp (1971) [13]1995.

21 Mit dieser *Überhöhung* einher geht dann die *Auflösung* einer laut Schwanitz von Foucault vertretenen These. Damit ist dann aber weder Foucault, noch Schwanitz, noch Rehkämper gegenüber ein *Widerspruch* geleistet, da (vgl. 5.) kein wirklich geschlossener Zirkel, d.h. nur ein nicht-wirklich geschlossener, konstruiert wurde.

22 Rehkämper, 4 von 9. Dieser ständige Wechsel von Beobachter und Modell findet laut Foucault ... (Forts. nächste Seite)

Schwanitz führt die oben unterbrochenen Überlegungen mit folgender allgemeingültigen Bemerkung über den Vorgang gelingender Beobachtung weiter und bereitet damit eine *wirkliche Destruktion*[23] der Foucault'schen These vor.

> Foucault beobachtet also das, was Velazquez nicht sehen kann. Er beobachtet also Beobachtung. Nun kann man eine Beobachtung überhaupt nur beobachten, wenn man ihre Begrenztheit mit beobachtet. Und diese Grenze kann man nur beobachten, wenn man das Terrain auf beiden Seiten der Grenze beobachtet und in den Blick nimmt. Wir können also dieselbe Operation an Foucaults Beobachtung jetzt vollziehen. Mir schien sie immer unplausibel, weil man an Shakespeare das Gegenteil beobachten kann, obwohl er doch Zeitgenosse ist.[24] Und das werde ich gleich zeigen. Und jetzt habe ich noch obendrein das Vergnügen feststellen zu können, dass kein Wort von Foucaults Analyse stimmt. Er hat das Bild falsch gesehen.

Folglich hat Foucault nicht gewusst, was er eigentlich sieht, wenn er das Bild betrachtet. „Auf Grund ihrer kulturellen Konditionierung war man in der Zeit des Velazquez nicht in der Lage, den Beobachter zugleich als Subjekt und als Objekt seiner eigenen Beobachtung zu sehen." Dies kann (laut Schwanitz) nicht wahr sein, denn Shakespeare war zum einen Zeitgenosse von Velazquez[25] und zum anderen zu solch verschlungener Selbstbeobachtung fähig.[26] Die folgende Ergänzung ist nun ein ernst zu nehmender Einwand gegen die Foucault'sche Analyse des Einzelfalls *Las Meninas*, über den die Würfel noch nicht gefallen waren.

> Durch den Vergleich mit Bildern von den gleichen Figuren und der Prüfung der Säle des Escorial hat Hermann Ulrich Asemissen herausgefunden, dass die Figuren des Velazquez alle seitenverkehrt gemalt sind und dass Velazquez in Folge dessen nicht das Königspaar malt, sondern eine Spiegelwand. Das Gemälde *Las Meninas* ist also ein direktes Spiegelbild des Raumes, in dem Velazquez das Bild malt, das wir sehen.
> Foucault hat sich von Velazquez täuschen lassen, weil der Spiegel selbst unsichtbar ist.

Der praktizierte Entwurf gegen Foucault lautet also punktuell gefasst:

- Foucault als Bildbetrachter kann Dinge sehen, die der gemalte Maler Velazquez nicht sehen kann. Das wird Foucault gerne eingestanden, doch geht er zu unkritisch mit seiner gewissermaßen erhöhten Position um.
- Beobachtung von Beobachtung setzt die Beobachtung deren Begrenztheit mit voraus, d.h. man muss das Terrain auf beiden Seiten der Grenze zugleich in den Blick nehmen, d.h. dass man zum einen auf die Beobachtung einzugehen, zum anderen aber über sie hinauszugehen hat.
- Beobachten wir nun Foucaults Beobachtung, so erkennen wir als deren Fehler, dass sie diesen letzten Schritt gerade nicht geht: sie nimmt unreflektiert ihre eigene Unbegrenztheit an. Weil sie also nicht reflexiv wird, bemerkt sie die eigene Begrenztheit nicht.
- Die dargestellte Szene wird von Foucault nicht als Spiegelbild der realen Begebenheiten in Velazquez Palastatelier entlarvt, weil die Unsichtbarkeit des Spiegels keinen Argwohn aufkommen lässt. Foucaults Täuschung liegt also in der Annahme, durch das Bild einen Einblick direkt in der Raum zu bekommen, stattdessen blickt er aber in einen Spiegel – und damit letztlich in die Röhre.

4.2. Beobachtungsgrenzen in den Analysen von *Las Meninas*

Es hört sich wie eine gute Erklärung des Produktionsprozesses an: Velazquez blickt in eine große Spiegelwand und bannt auf die von hinten zu sehende Leinwand all das, was er sieht.

[22] (Forts. der vorherigen Seite) ... zentral vor dem Bilde statt. Dort ist aber für gewöhnlich der Standort des Malers. Die Frage war nun: Wie kann es gehen, dass Maler, Modell und Betrachter den gleichen Punkt im Raum einnehmen (zumindest letzterer aber zu anderer Zeit)?

[23] Die Hervorhebung tat Not, um den Gegensatz zu der Bemerkung herzustellen, die zwar Kritik übte, doch in dem eigentlichen Sinne des Wortes, indem sie sich um konstruktives Arbeiten bemühte. Die angesprochene Destruktion der Foucault'schen Begründung seiner These wird geliefert durch das Aufweisen einer Fehlleistung in der Interpretation der eigenen Beobachtung des Velazquez'schen Bildes. Wir kommen darauf zurück.

[24] W. Shakespeare (1564-1616) war sogar der ältere Zeitgenosse von Velazquez.

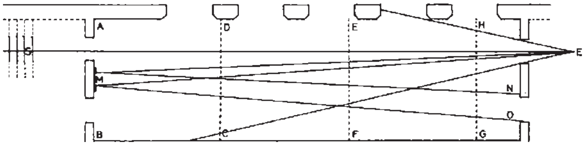
[25] Ihre Lebenszeiten überschnitten sich in den Jahren 1599 bis 1616.

[26] Vgl. 8.

Wie kommt es dann zu der Spiegelung des Königspaars, die wir als Bildbetrachter sehen? Nimmt man an, dass die Regenten neben einem großen Spiegel stehen, dessen Grenzen außerhalb des im Bild dargestellten Bereiches liegen, so könnte es im hinteren Raumteil zur Spiegelung kommen, die wir sehen. Das Gemälde, dessen Rückseite in Las Meninas abgebildet ist, sollte *Las Meninas* selbst sein. Derart argumentiert beispielsweise Searle.[27]

Wer in *Las Meninas* Velazquez Versuch sieht, uns „the whole truth about a complete visual impression“[28] zu erzählen, der wird dagegen wohl Zweifel hegen. Denn dann ist ja zu vermuten, dass Velazquez bemüht war, perspektivisch korrekt zu zeichnen und sich daher in etwa um eine zentralperspektivische Darstellung bemühte.[29] Mit den Reflexionsgesetzen im Hinterkopf, d.h. Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel, erfasst man dann sofort, dass der Lichtweg vom Königspaar zum Bild (via Spiegel an der hinteren Wand) etwa doppelt so groß ist wie der Lichtweg vom Haushofmeister zum Bild. Auf dem Gemälde *Las Meninas* sind die drei entsprechenden Köpfe aber in etwa gleich groß. Das würde bedeuten, dass die im Spiegel zu sehende Reflexion von Gestalten herrührt, die doppelte Menschengröße aufweisen. Wie wäre das möglich?

Betrachten wie den Grundriss des Palastateliers von Velazquez:



Grundriss des Raumes von *Las Meninas*[30]

Die Geschichte um die Produktion von *Las Meninas* könnte nun auch wie folgt erzählt werden. Rechts bei E stand Velazquez um das Bild zu malen. Die schräg nach oben links verlaufende Linie endet dort, wo auf dem Bild rechts vorne das Licht einfällt, da also wo Zwergin und Gnom stehen. Bei S befinden sich die Stufen, auf denen der Haushofmeister steht. Bei M befindet sich der Spiegel, der uns all die Rätsel aufgibt. In ihm spiegelt sich das Raumsegment zwischen M und NO. In diesem Kegelstumpf befindet sich etwa auf Höhe von EF die Leinwand, deren Rückseite abgebildet ist, neben der also der gemalte Velazquez steht. Auf deren Vorderseite wiederum befindet sich ein überlebensgroßes Porträt der Regenten, das uns im Spiegel gezeigt wird.

So frei erfunden ist diese Geschichte gar nicht, weil der Fluchtpunkt nach zentralperspektivischen Bildanalysen nicht dem Spiegel gegenüber liegt, wie von Foucault angenommen, sondern dem offenen Türrahmen, was zur Linie ES führt.

Von Mathematikern bzw. empirischen Wissenschaftlern mag es wohl begrüßt werden, freie assoziierende Philosophen in die Schranken zu weisen, welche Bilder und literarische Werke dafür verwenden um per normativem Selbstbezug (vgl. 8. [nicht zitiert]) ihre eigenen Theorien zu stützen. Das geometrische Handwerkszeug, sowie die geometrische Optik sind aber bei Bildern im Allgemeinen nur bedingt anwendbar und versagen zumeist vor inhaltlichen Überlegungen. Und wenn die Philosophen auch zu recht in gewisse Schranken gewiesen werden, so haben sie noch mehr an Bewegungsfreiheit, als sie jemals auszuschreiten fähig sind. Dementsprechend beendigt auch Rehkämper seine sog. „Klarstellung“ und damit seine Bildanalyse insgesamt mit den Worten:

> Foucaults und Searles Interpretation gehen von falschen Voraussetzungen aus. Eine Rekonstruktion der räumlichen Gegebenheiten aufgrund der perspektivischen Anordnungen im Bild zeigt dies sehr deutlich. *Las Meninas* ist ein faszinierendes Bild. Aber nicht aus den Gründen, die Foucault und Searle angeben. Die Gesetze der Perspektive können die philosophischen Probleme, die mit *Las Meninas* verbunden sein mögen, nicht lösen, aber sie können zeigen, daß bestimmte Probleme nicht mit diesem Bild verbunden sind.

[27] Laut Rehkämper, 4ff von 9: Searle, John Ross: ‚Las Meninas‘ and the Paradoxes of Pictorial Representation. In: W. J. T. Mitchell (Hrsg.): *The Language of Images*. Chicago und London: The University of Chicago Press 1980.

[28] Laut Rehkämper, 6 von 9: Clark, 34. – Bzgl.: Clark, Kenneth: *Looking at pictures*. London : Murray (1960) [4]1970.

[29] Vgl. hierzu Rehkämper, 6 von 9:
In der Literatur wird auch niemals angezweifelt, daß Velázquez die perspektivischen Gesetze zur Darstellung des Raumes angewendet hat.
Es erübrigt sich wohl der Hinweis, dass unser Sehempfinden nicht zentralperspektivischer Natur ist. So sehen wir statt sog. Geraden Kurven, die durch Zylinderschnitte recht gut approximiert werden. (B. Ernst, 49ff [Kapitel 8 *Untersuchungen aus dem Gebiet der Perspektive*].)

[30] Laut Rehkämper, 7 von 9: Kemp, 107. – Bzgl.: Kemp, Martin: *The Science of Art. Optical themes in western art from Brunelleschi to Seurat*. New Haven, London: Yale University Press 1990.

Bemerkung

Die vorstehenden Absätze haben den Titel dieses Arbeitspunktes „Beobachtungsgrenzen in der Analyse von *Las Meninas*" bereits in verschiedene Richtungen ausgedeutet. Doch liefert erst eine Anwendung dieser Auslegungen die wohl gewichtigste Bedeutung. Denn unter den Beobachtungsgrenzen, auf die man in dieser Arbeit direkt oder indirekt stößt, ist die erste und daher zuvorderst zu nennen: das Wissen ihres Autors.

- Er vermochte es nicht mehr in die von Schwanitz erwähnte Untersuchung von H.U. Asemissen zu blicken und dort nachzusehen, ob das Problem um die verschieden langen Lichtwege und das Rätsel um die daraus entstehenden *Größenverhältnisse* zufrieden stellend gelöst werden konnten.
- Er bleibt zudem die Antwort schuldig, wo die von Asemissen gezeigte *Seitenverkehrtheit* zu tragen kommt und wo sie deswegen bei Rehkämper noch berücksichtigt werden müsste[31].
- Die Beobachtungsgrenze liegt also gerade darin, dass die verwendeten literarischen Zeugnisse in ihren Aussagen evtl. nicht übereinstimmen (was letztlich unausgelotet blieb) und gegebenenfalls keine Begründung für eine Favorisierung geliefert wurde.

5. Selbstbezüge in der Dramatik: *Mausefallenszene*

Wir folgen Schwanitz noch weiter in seinen Ausführungen[32] über *Beobachtung als Gegenstand der Beobachtung* und speziell auch über *reflexive Beobachtung*. Er erarbeitet sich dabei die These: Die Wirkung des Theaters entspricht der Wirkung des Spiegels.

> Es ist eine der berühmtesten Szenen der Weltliteratur und doch wird sie selten richtig interpretiert. Man weiß nämlich nicht so richtig, was man sieht. Es ist die sog. *Mausefallenszene* in Hamlet, in der ein Stück im Stück aufgeführt wird.[33] Das Stück heißt *Murder of Gonzago* und handelt von einem Mord in Wien. Um die Szene zu verstehen, müssen wir auch beobachten, was die Figuren beobachten. Wir beobachten also Beobachtung. Observe mine uncle (Beobachte meinen Onkel) – bittet Hamlet Horatio,[34] bevor der Hofstaat sich zur Aufführung des Dramas versammelt.
>
> In dieses Stück wurde eine von Hamlet verfasste Textpassage eingefügt, die die Umstände wiedergibt, unter denen laut Auskunft des Geistes sein Onkel Claudius seinen Vater ermordet hat. Damit wird die Aufführung zu einer Experimentalanordnung. Der Zuschauer weiß, worauf er zu achten hat. Nun tritt der Hofstaat auf und nimmt unter doppelbödigem Wortgeplänkel von Hamlet Platz. Come hither, my dear Hamlet – sagt Getrud – Sit by me (Setz dich zu mir). Das aber will Hamlet nicht. Warum nicht? Nun, er will sich gegenüber postieren, wo er den König besser beobachten kann. Deshalb setzt er sich zu Ophelia. No, good mother, here's metal more attractive (Dieses Metall ist magnetischer). Das aber beobachtet wiederum Polonius und das deutet er als Bestätigung seiner Theorie, Hamlets Zerrüttung sei eine Folge seiner frustrierten Liebe zu Ophelia. O, ho! Do you mark that (Merkt ihr was)? – sagt er zum König. Auch Hamlet wird also beobachtet. Das weiß er aber, weil er vorher belauscht hat, wie Ophelia als Lockvogel gegen ihn eingesetzt werden soll. Die Beobachtung wird reflexiv.[35] Sie wird selbst Gegenstand der Beobachtung. For, look you, how cheerfully my mother looks – sagt Hamlet zu Ophelia. Ophelia blickt auf und sieht, dass alle sie ansehen. Man will wissen, wie der Lockvogel wirkt. Und dann beginnt das Stück.
>
> Zu Hamlets Entsetzen wird es von einer Pantomime eingeleitet. Sie droht die Pointe vorweg zu nehmen, denn sie enthält bereits die Szene mit der Vergiftung des Königs durch das Ohr. Die Kritik hat sich deshalb mit dem Problem herumgeschlagen, warum der König nicht hier schon aufspringt

---

[31] Vielleicht hat auch Schwanitz die Untersuchung von Asemissen unaufmerksam gelesen. Vielleicht war die rel. Seitenverkehrtheit zwischen Spiegelung des Königspaars und dem übrigen Motiv gemeint.

[32] Das sind wiederum die nicht eingerückten und etwas kleiner gedruckten Zeilen.

[33] III. Akt, II. Szene.

[34] Die englischen Passagen sind Zitate aus *Hamlet*. Gegebenenfalls ist die Schwanitz'sche Übersetzung in runden Klammern angefügt.

[35] Dies liefert den geeigneten Kontext für den Hinweis, dass die oben zitierten Äußerungen Steinfelds gleichermaßen eine Beobachtung von Beobachtung darstellten, weil sie nämlich Kritik an der Sprachkritik übten – die Kritik wurde also reflexiv. Die in 6.3. angestellten Überlegungen liefen zusammenfassend unter dem Namen *Sprachkritik und deren Kritik*. Ganz analog verfährt T. Bossmann in seinem Buch Der *Dichter im Schussfeld. Geschichte und Versagen der Literaturkritik am Beispiel Günter Grass*. Es ist nämlich dem Unternehmen gewidmet, die Literaturkritik und deren Wirkprinzipien unter die Lupe zu nehmen, um künftig Fehlentwicklungen schneller zu bemerken. Die Kritik tritt also einen Schritt von ihrem eigentlichen Gegenstand zurück und beobachtet sich selbst. Von dieser Selbstbezüglichkeit *Literaturkritik und deren Kritik* erhofft sich Bossmann eine Besserung der bestehenden Verhältnisse.

> und den Saal verlässt. Der wirkliche Grund ist nicht im Text zu finden, er ist nur auf der Bühne zu sehen. Claudius beobachtet gar nicht das Stück, sondern Hamlet. Er will sehen, ob Polonius Recht hat mit seiner Theorie von der Liebesmelancholie. Derweil hören wir die langatmigen Versicherungen der player-queen gegenüber dem player-king, also des Stücks im Stück, sie würde als Witwe nie wieder heiraten. Das erregt langsam die Aufmerksamkeit der königlichen Zuschauer. Ihnen wird unbehaglich zu mute. Madam, how like you this play? – fragt Hamlet seine Mutter. The lady protests too much, me think (die Dame beteuert zu viel scheint mir) – sagt sie gepresst, und der König wird unruhig. Kennt ihr den Inhalt des Stücks? – fragt er Hamlet. What do you call the play (wie heißt das Stück überhaupt)? The Mouse-trap, sagt Hamlet und wird nun massiv ironisch. Marry, how? Tropically. Mit einem Wortspiel auf trope, das Bild, und trap, die Falle. The trope is the trap.

Dies ist kein Zitat aus Hamlet, soll aber das Wortspiel verdeutlichen. Daher wollen wir nochmals Wilde (6) zitieren, worin die Wirkungsweise der Falle Hamlets geradezu beschrieben wird: „Den Zuschauer, nicht das Leben, zeigt die Kunst im Spiegelbilde.“ Hamlet setzt die Aufführung als Falle ein. Ist der König schuldig, so sieht er im Schauspiel das Bild seiner Tat und entlarvt sich damit selbst, falls er nur genau genug beobachtet wird.

> Das Stück handelt von Verbrechen, doch was geht das uns an? Eure Majestät und wir, die wir reine Seelen haben, uns berührt das nicht. [’tis a knavish piece of work: but what o’ that? Your majesty and we that have free souls, it touches us not: let the galled jade wince, our withers are unwrung.]
> Und nun kommt der Höhepunkt. Lucianus, der Mörder, tritt auf. Aber statt seinen Text, Hamlets Text, zu sprechen, tut der Schauspieler das, was ihm Hamlet in der Anweisung an die Schauspieler vorher verboten hat. Er grimassiert, er chargiert, er mimt den Schmierenkomödianten. Dadurch droht das Überraschungsmoment verloren zu gehen. Hamlet hält es nicht mehr aus: Fang an Mörder – ruft er – lass das Fratzenschneiden und fang an! [Begin, murderer; pox, leave thy damnable faces, and begin.] Und endlich hören wir Hamlets Text. Hamlet spricht also durch den Mund eines Schauspielers, er selbst ist unsichtbar, einen Text über Unsichtbarkeit.

„Unsichtbarkeit“ meint, dass der Mord nun unbemerkt erfolgen kann. „durch den Mund eines Schauspielers“, weil Hamlet diesem mit seinem selbstverfassten Text die Worte in den Mund gelegt hat. „Er selbst ist unsichtbar“, weil Hamlet eben nicht selbst auf der Bühne steht und der König hinter den gehörten Worten laut Schwanitz also noch nicht den Hamlet als Urheber vermutet. Der Schauspieler spricht und tut nun wie Hamlet ihn geheißen – und inszeniert derart den Claudius bei dessen Frevel.

> Das Gift bereitet, die Zeit ein Verbündeter und niemand sieht zu. Das ist die Situation, in der der Mörder nun das Gift in das Ohr des schlafenden Königs gießt.
> Aber der Mörder, das ist Claudius. Hamlets Text ist Claudius Text. Wenn Claudius den Schauspieler beobachtet, beobachtet er sich selbst. Hamlet, der als Schauspieler spricht, aus dem Schauspieler spricht, mit seinem Text spricht, ist ein Spiegel geworden. Wie ein Spiegel ist er selbst unsichtbar und zeigt nur das Bild des Beobachters. Claudius sieht sich also selbst plötzlich und nur sich im Spiegel. Der Anblick überwältigt ihn. Er springt auf und stürzt aus dem Saal. Warum stellen sich aber nun die Mitglieder des Hofstaates nicht auf Hamlets Seite? Nun, sie haben etwas anderes gesehen als Claudius. In *Murder of Gonzago* ist der Mörder nicht der Bruder des Onkels wie Claudius, sondern der Neffe. Die Höflinge sehen also ein Stück, in dem der in der Thronfolge übergangene Neffe seinen königlichen Onkel ermordet.
> Für sie ist der Schauspieler Lucianus nicht Claudius, sondern Hamlet. Sie interpretieren Claudius Aufbruch nicht als Ausdruck seiner Schuld, sondern als Symptom seiner gerechtfertigten Empörung über eine unverhüllte Drohung. Der Schauspieler des Lucianus ist also ein Spiegel, der zwei verschiedene Figuren zeigt. Und welche man sieht, hängt davon ab, wo man steht. Damit führt das Drama die Wirkung des Dramas vor Augen. Die Figuren beobachten sich dabei, wie sie sich wechselseitig beobachten, während sie alle zusammen ein Stück beobachten. Das aber ist nun ein Spiegel für den Zuschauer, denn auch wir als Zuschauer beobachten ein Stück. Und was sehen wir? Wir sehen, dass alle Figuren was Verschiedenes sehen und was sie sehen hängt vom Standort ab. Wenn wir das sehen, sehen wir die Wirkung des Theaters. Sie entspricht der Wirkung des Spiegels und das bringt mich nun zur Metapher und natürlich ist das die Spiegelmetapher.[36]

[36] Ich erlaube mir zu bemerken, dass Spiegel in K. Branaghs Hamlet-Verfilmung als höchst relevantes dramatisches Gestaltungsmoment verwendet werden.

Die Wirkung des Theaters entspricht der Wirkung des Spiegels: reflexive Beobachtung.

Diese These ist in Hamlets *Mausefalle* durch Selbstbezüglichkeit inszeniert:

- Der Zuschauer sieht die Schauspieler einem Schauspiel zuschauen.
- Auf der Bühne beobachten sich die Figuren bei ihrer wechselseitigen Beobachtung, während sie allesamt ein Stück beobachten.
- Das ist ein Spiegel für den Zuschauer, da er nämlich gleichermaßen ein Stück beobachtet und sieht, dass die Figuren Verschiedenes sehen.
- Was die Figuren sehen, hängt vom jeweiligen Standort ab.
- Damit sieht der Zuschauer im Theater dargestellt die Wirkungsweise des Theaters, die wie ein Spiegel zu wirken vermag.
- Als notwendig erscheint uns nun das Reflexiv-Werden des normativen Selbstbezuges – die Selbstbeobachtung.

An Shakespeares Hamlet ist zu sehen, was Schwanitz vorher allgemein bzgl. Beobachtung gesagt hat, dass diese nämlich stets abhängig vom Standpunkt ist. Shakespeare lässt in Hamlet Beobachtung beobachten und den Zuschauer dabei zusehen. Beobachtungsbeobachtung bedingt nach Schwanitz das In-den-Blick-nehmen des Terrains zu beiden Seiten der Grenze. Und das findet auf der Bühne nicht statt. Hamlet überzeugt sich zwar der Schuld seines Oheims, doch bringt er dadurch den Hofstaat gegen sich auf. Er bedenkt nicht, dass in dessen Augen er selbst als der Aggressor auftritt. Claudius wiederum ist so beschäftigt mit seiner Beobachtung Hamlets, dass er die Aufmerksamkeit, die ihm Hamlet und Horatio zollen nicht bemerkt, das Schauspiel erst kaum verfolgt, dann aber zurückzuckt, als er seine Tat vor aller Augen sieht – zurückzuckt ohne bedacht zu haben, dass die anderen diese Entlarvung nicht als solche erkennen können. Denn es mag schon sein, dass „The trope is the trap“, doch muss das Bild auch entschlüsselt werden können.

Insgesamt dreht sich Schwanitz' Rede um die Grenzen der Beobachtung (die Differenz und den Zusammenhang von Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit). Die Inszenierung eines Stücks im Stück macht (eine Form von) *Selbstbezüglichkeit wunderbar einsichtig.*

6. Selbstbezügliche Großprojekte der Literatur / Sprache

6.1. **Kontextualität**: Bekannte Werke als *Folien* bzw. als *Code*

6.1.1. **Vermischtes** (…)

6.1.2. **Romane von** J.W. von Goethe **und** U. Plenzdorf (…)

6.2. I. **Kant**: Unausgeschöpftes Phänomen

Natürlich können wir uns hier die Mühe sparen auf Kant detailliert einzugehen – soweit das überhaupt gemacht werden darf und man sich nicht etwa jederzeit an Kant versuchen sollte.

Vor hier beim Leser der falsche Eindruck entsteht und die Enttäuschung ihn dann umso stärker packt, soll er lieber den Spatzen glauben, die ihm vom Dache zwitschern, dass hier nicht der rechte Ort für eine Kant-Exegese[37] ist. Der Autor will und kann sie nicht leisten, d.h. er will sie schon gerne leisten können. Doch erwächst aus diesem Mangel keine Leerstelle - und das nicht etwa, weil sie *falsch* gefüllt würde.

> Man kann vor allem Irrtum gesichert bleiben, wenn man sich da nicht unterfängt zu urteilen, wo man nicht so viel weiß, als zu einem bestimmenden Urteile erforderlich ist. Also ist Unwissenheit an sich die Ursache zwar der Schranken, aber nicht der Irrtümer in unserer Erkenntnis.[38]

Leerstellen treten einfach nicht zu Tage unter der Hinsicht, wie sie sich für die hier zu stellenden Fragen ergibt. Daher wollen wir also forschen Schrittes die Schwierigkeiten schnell hinter uns lassen.

---

37 Über die Kant-Exegese haben bereits Schiller/ Goethe in ihren Xenien (Schiller, 736) zu vermelden gewusst:
Kant und seine Ausleger
Wie doch ein einziger Reicher so viele Bettler in Nahrung
Setzt! Wenn die Könige baun, haben die Kärrner zu tun.

38 Kant; Was heißt: sich im Denken orientieren?
Für den Interessierten möchte ich noch Kants konzentrierte Antwort auf diese Titelfrage zitieren, die er in Fußnote 2 des Aufsatzes gibt:
Sich im Denken überhaupt orientieren heißt also: sich, bei der Unzulänglichkeit der objektiven Prinzipien der Vernunft, im Fürwahrhalten nach einem subjektiven Prinzip derselben bestimmen.

Um es nochmals ganz deutlich zu sagen: wir wollen gerade nicht behaupten, dass wir die Gefahrenstellen sich zu übernehmen geschwind durchschritten und schnell überwunden hätten. Das würde nicht gelingen und Glück haben wir lediglich darin, dass die Probleme gar nicht auf unserem Weg liegen. Und doch findet sich bei Kant für diesen Zusammenhang ein ausgezeichnetes Beispiel. Und weil es uns nur ganz speziell darum geht, bleibt Kant ein unerkundetes und unausgeschöpftes Phänomen.

6.2.1. *Kritik der reinen Vernunft*

Bei diesem epochalen Werk bereitet dem Leser bereits der Titel gewisse Schwierigkeiten, die darin zu finden sind, dass das „der" zwar einen nachfolgenden Genitiv andeutet, dass aber unklar bleibt, ob es „an der" Vernunft oder durch „durch die" Vernunft bedeuten soll. Diese angedeuteten Möglichkeiten heißen in grammatikalisch sauber gewähltem Vokabular: *genitivus subjectivus* und *genitivus objectivus*. Ich habe mir sagen lassen (und möchte dies hier ebenso in den Raum stellen), dass sich dahinter sogar folgende Überlegung versteckt: die Alternative ist zwar *syntaktisch* nicht zu entscheiden (und das gewolltermaßen), doch verbirgt sich *semantisch* hinter dem kurz gefassten Titel das Bonmot einer *Kritik an der reinen Vernunft durch die reine Vernunft*.

Wie Kant diese Kritik durchzuführen versucht und welche Erfolge er erzielt, damit wollen und können wir uns angedeutetermaßen hier nicht weiter beschäftigen. Doch bleibt interessant, was er über die Konzeptionierung der reinen Vernunft in seinen *Prolegomena* zu vermelden weiß.

6.2.2. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*

In der ersten Textstelle aus den *Prolegomena* geht es um die Beschaffenheit des eben genannten Sub- und Objekts – d.h. also: um die reine Vernunft. Ihre Struktur wird veranschaulicht als ein System von Knoten und Kanten, bei welchem die Knoten die wahren Teile stellen, die Kanten aber die gegenseitige Einflussnahme symbolisieren sollen.

> Allein reine Vernunft ist eine so abgesonderte, in ihr selbst so durchgängig verknüpfte Sphäre, daß man *keinen Teil* derselben antasten kann, ohne alle übrige zu berühren, und nichts ausrichten kann, ohne vorher jedem seine Stelle und seinen Einfluß auf den andern bestimmt zu haben, weil, da nichts außer derselben ist, was unser Urteil innerhalb berichtigen könnte, jedes Teiles Gültigkeit und Gebrauch von dem Verhältnisse abhängt, darin er gegen die übrige in der Vernunft selbst steht, und, wie bei dem Gliederbau eines *organisierten* Körpers, der *Zweck jedes Gliedes* nur *aus dem* vollständigen Begriff des *Ganzen* abgeleitet werden kann.[39]

Wie ein Spinnennetz als Ganzes bei der Berührung eines einzelnen Teiles erzittert, so wird auch jedes Glied der reinen Vernunft vom Rest mitbestimmt. Die innere Beschaffenheit des *etwas* führt zur Selbstbezüglichkeit durch den im Prolog genannten *Bezug der Teile untereinander*.

Nun ist noch zu klären, weshalb überhaupt die Sprache auf die Kritik der reinen Vernunft kam. Wir wollen ihn zuerst selbst zu Wort kommen lassen:

> Ob aber gleich ein bloßer Plan, der vor der Kritik der reinen Vernunft vorhergehen möchte, unverständlich, unzuverlässig und unnütze sein würde, so ist es dagegen um desto nützlicher, wenn er darauf folgt. Denn dadurch wird man in den Stand gesetzt, das Ganze zu übersehen, die Hauptpunkte, worauf es bei dieser Wissenschaft ankommt, stückweise zu prüfen, und manches dem Vortrage nach besser einzurichten, als es in der ersten Ausfertigung des Werks geschehen konnte.[40]

Die Antwort auf die gestellte Frage haben wir damit schon vor uns. Für Kant selbst gehören die beiden Werke nämlich gewissermaßen zusammen, weil sie dem gleichen Problem unter verschiedenen Gesichtspunkten gewidmet sind, verschiedene Fragen stellen. Weil es sich hier letztlich um eine ganz allgemeine Alternative handelt, die auch beim Erarbeiten von Texten die primäre Rolle spielt, sei eine diese beiden Zugangsweisen beschreibende Textstelle zitiert:

> *Aus der Vogelperspektive*: Was sind die groben Linien? Was ist der Gegenstand des vorliegenden Textes? Was sind die zentralen Begriffe und Definitionen, was sind die zentralen Aussagen und Sätze? Was sind die groben Beweisstrukturen? Wozu macht man das alles?
> *Aus der Froschperspektive*: Wie wird es im Detail gemacht? Wie funktioniert ein Beweis? Wozu braucht man die Voraussetzungen im Satz? Was passiert, wenn man sie weglässt?[41]

[39] Kant, Prolegomena, 19f [Hervorhebung durch M.R.].
[40] Kant, Prolegomena, 20.
[41] Lehn, 1 [Hervorhebung durch M.R.].

Kant hat seiner detaillierten Durchführung in der Froschperspektive (*Kritik der reinen Vernunft*) den aus der Vogelperspektive gezeichneten Plan/ das Konzept (*Prolegomena*) hinterhergeschickt.

Die Werke stützen sich gegenseitig bzw. können durch- und voneinander gewinnen.

Damit haben wir ein weiteres Beispiel für die Kontextualität literarischer Werke (vgl. 6.1. [nicht zitiert]). Dabei sehe ich es als selbstverständlich an, die hier genannten Bücher unter dem Begriff *Literatur* mitlaufen zu lassen. Wem das nicht von vornherein ganz geheuer zu sein scheint, dem kann man das immerhin noch über die Kant'sche Art zu schreiben nahe bringen. Über sie weiß nämlich R. Malter folgendermaßen zu äußern:

> Kants Schriften sind, aller Schwierigkeit zum Trotz, auch genuine Sprachkunstwerke, die ihren individuellen Klang und Rhythmus haben.[42]

Es steht uns also frei, die Kant'schen Schriften als große, wunderbar sprachlich konstruierte Geschichten zu lesen.

6.3. **Sprachkritik**: Zwischen Möglichkeit (?) und Notwendigkeit (!)

Aus dem weiten Felde der sog. Sprachkritik seien zwei Zitate gezogen – ein klassisch zu nennendes und ein sehr aktuelles, noch recht umstrittenes.

6.3.1. **H.v. Hofmannsthal**: *Chandos-Brief*

> Dies ist der Brief, den Philip Lord Chandos, jüngerer Sohn des Earl of Bath, an Francis Bacon, später Lord Verulam und Viscount St. Albans, schrieb, um sich bei diesem Freunde wegen des gänzlichen Verzichtes auf literarische Betätigung zu entschuldigen.
> Es ist gütig von Ihnen, mein hochverehrter Freund, mein zweijähriges Stillschweigen zu übersehen und so an mich zu schreiben.[43]
> (…)
> Ich wollte, es wäre mir gegeben, in die letzten Worte dieses voraussichtlich letzten Briefes, den ich an Francis Bacon schreibe, alle die Liebe und Dankbarkeit, alle die ungemessene Bewunderung zusammenzupressen, die ich für den größten Wohltäter meines Geistes, für den ersten Engländer meiner Zeit im Herzen hege und darin hegen werde, bis der Tod es bersten macht.
> A.D. 1603, diesen 22ten August.
> Phi. Chandos.[44]

Dem zitierten Text ist seine Eigenartigkeit nicht direkt zu entnehmen – es spielt auch hier der Kontext eine Rolle. Man muss nämlich zusätzlich wissen, dass der eigentliche Verfasser der etwa 28-jährige Österreicher Hugo von Hofmannsthal war. Es erschien dieser besagte Brief am 18./19. Okt. 1902 in der Zeitung *Der Tag*. Der Autor gibt sich den Anschein ein anderer[45] zu sein – und das auch noch in einem Brief, der eigentlich privatesten Form literarischer Fiktion.[46] Wir haben damit einen scharfen Gegensatz zu den obigen Fällen um Kundera und Marías. Diesen sagt man nach, sie hätten in den erwähnten Büchern über sich gesprochen, was in Romanen vom Autor nicht verlangt wird, sondern eher überrascht. In einem Brief, und sei es auch ein öffentlicher, würde man eine Ich-Erzählung erwarten, doch wird sie in diesem Fall von Hofmannsthal nicht geliefert.

Nun aber noch zwei kleine Abschnitte aus der Durchführung der Gedanken:

> Mein Fall ist, in Kürze, dieser: Es ist mir völlig die Fähigkeit abhanden gekommen, über irgend etwas zusammenhängend zu denken oder zu sprechen. (...)
> Es gelang mir nicht mehr, sie mit dem vereinfachenden Blick der Gewohnheit zu erfassen. Es zerfiel mir alles in Teile, die Teile wieder in Teile und nichts mehr ließ sich mit einem Begriff umspannen. Die einzelnen Worte schwammen um mich; sie gerannen zu Augen die mich anstarrten und in die ich wieder hineinstarren muß: Wirbel sind sie, in die hinabzusehen mich schwindelt, die sich unaufhaltsam drehen und durch die hindurch man ins Leere kommt.[47]

---

42 Kant, 176.
43 Hofmannsthal, Z. 2-6.
44 Hofmannsthal, Z. 196-202.
45 Die Person des Lord Chandos ist aber genauso wie die des Francis Bacon authentisch.
46 Das zitierte Schriftstück ist letztlich in das literarische Genre *offener Brief* zu zählen.
47 Hofmannsthal, Z. 10f u. 42-46.
48 Namentlich nennt er: das Reden von „Geist“, „Seele“, „Körper“ und das Lügen. Es stören ihn beispielsweise im Futur-II ausufernde würde-/ hätte-/ könnte-/ wollte-Überlegungen und selbst nennt er noch folgendes Symptom:
Es wurden mir auch im familiären und hausbackenen Gespräch alle die Urtheile, die leichthin und mit schlafwandelnder Sicherheit abgegeben zu werden pflegen, so bedenklich, daß ich aufhören mußte, an solchen Gesprächen irgend teilzunehmen.

Das Grundproblem dieses verzärtelt und kränklich wirkenden Knaben ist seine Unfähigkeit Worte weiterhin als Begriffe und diese als Greif-Werkzeuge verwenden zu können. Mit gesellschaftlichen Gepflogenheiten seiner Zeit[48] kommt er nicht mehr zu recht: Solch Spiel zu spielen vermag er weiter nicht.

6.3.2. **E. Jelinek**: *Im Abseits*

Nun zur sog. „Nobelvorlesung“ vom Dez. 2004, dem traditionellen Beitrag des jeweils neuen Nobelpreisträgers für Literatur, zwei Tage vor der eigentlichen Verleihung. Sie gab nämlich Anlass zu mancher Überraschung. Es ist zum einen eigentümlich, doch gut möglich, dass der zu Ehrende nicht zugegen ist. E. Jelinek hat sich diese Freiheit herausgenommen und ist nur per Videoaufzeichnung in Erscheinung getreten. Die Möglichkeit solchen ausschließlich medialen Erscheinens ist natürlich ein Kind unserer Zeit. Nach Art der Gestaltung des Mittwochabends zu Zeiten unseres Romaufenthaltes möchte ich hier nun ebenfalls eine literarische Streifvisite versuchen:

> Im Abseits
>
> Ist Schreiben die Gabe der Schmiegsamkeit, der Anschmiegsamkeit an die Wirklichkeit? Man möchte sich ja gern anschmiegen, aber was geschieht da mit mir? Was geschieht mit denen, die die Wirklichkeit gar nicht wirklich kennen? Die ist ja so was von zerzaust. Kein Kamm, der sie glätten könnte. Die Dichter fahren hindurch und versammeln ihre Haare verzweifelt zu einer Frisur (...) [Das Haar aber steht] unwillkürlich zu Berge (.) vor Entsetzen vor dem, was dauernd geschieht. Es lässt sich einfach nicht ordnen. Es will nicht. So oft man auch mit dem Kamm mit den paar ausgebrochene Zinken hindurchfährt – es will einfach nicht. (…)
>
> Die Wirklichkeit ist das, was unter die Haare, unter die Röcke fährt und sie eben: davonreißt, in etwas anderes hinein. Wie soll der Dichter die Wirklichkeit kennen, wenn sie es ist, die in ihn fährt und ihn davonreißt, immer ins Abseits. Von dort sieht er einerseits besser, andererseits kann er selbst auf dem Weg der Wirklichkeit nicht bleiben. Er hat dort keinen Platz. Sein Platz ist immer außerhalb. (…)
>
> Verschieden ist er noch nicht, aber im Abgeschiedenen ist er immerhin schon. Von dort sieht er diejenigen, die von ihm verschieden sind, voneinander aber auch, in ihrer Vielfalt an, um sie in Einfältigkeit darzustellen, um sie in Form zu bringen, denn die Form ist das Wichtigste, von dort aus also sieht er sie besser. Aber auch das wird ihm angekreidet (…)
>
> Dazu jede Menge Kehlen, aus denen es heraussingt wie Mundgeruch, nur lauter. Das ist das, was auf dem Weg gesehen werden könnte, befände man sich noch auf ihm. Man geht dem Weg aus dem Weg. Vielleicht sieht man ihn aus der Erne, wo man allein bleibt, und wie gern, denn den Weg will man sehen, aber nicht gehen. (…)
>
> Mir stehen, wie gesagt, die Haare zu Berge, und kein Festiger da, der sie wieder zum Niederlegen zwingen könnte. Auch keine Festigkeit in mir. Nicht auf mir, nicht in mir. Wenn man im Abseits ist, muss man immer bereits sein, noch ein Stück und noch ein Stück zur Seite zu springen ins Nichts, das gleich neben dem Abseits liegt. (…)
>
> Es läuft zur Sicherheit, nicht nur um mich zu behüten, meine Sprache neben mir her und kontrolliert, ob ich es auch richtig mache, ob ich es auch richtig falsch mache, die Wirklichkeit zu beschreiben, denn sie muss immer falsch beschrieben werden, sie kann nicht anders, aber so falsch, dass jeder, der sie liest oder hört, ihre Falschheit sofort bemerkt. Die lügt ja! Und dieser Hund Sprache, der mich beschützen soll, dafür habe ich ihn ja, der schnappt jetzt nach mir. Mein Schutz will mich beißen. Mein einziger Schutz vor dem Beschriebenwerden, die Sprache, die, umgekehrt, zum Beschreiben von etwas anderem, das nicht ich bin, da ist – dafür beschreibe ich ja soviel Papier –, mein einziger Schutz kehrt sich also gegen mich. (…)
>
> Doch auf einmal sprechen wir plötzlich, in aller Strenge, wie einer, der die Wahl hat, auch nicht zu sprechen. Was immer geschieht, nur die Sprache geht von mir weg, ich selbst, ich bleibe weg. Die Sprache geht. Ich bleibe, aber weg. Nicht auf dem Weg. Und mir bleibt die Sprache weg. (…)
>
> Sie ruft mich an, die Sprache, das kann heute jeder, denn er hat seine Sprache in einem kleinen Gerät immer bei sich, damit er sprechen kann, (…) meine Sprache ist mir weggeblieben, sie muss daher anrufen, (…) sie schreit mir ins Ohr, dass es keinen Sinn hat, etwas auszusprechen, das tut sie schon selber, ich soll einfach sagen, was sie mir vorsagt; denn noch weniger Sinn hätte es, sich einmal auszusprechen mit einem lieben Menschen, der der Fall ist und dem man vertrauen kann, weil er gefallen ist und nicht so schnell wieder aufstehen kann, um einen zu verfolgen und ein wenig, ja, zu plaudern. Es hat keinen Sinn. (…)
>
> Meine Sprache wälzt sich bereits wohlig in ihrer Suhle, dem kleinen provisorischen Gab auf dem Weg, und sie schaut hinauf zum Grab in den Lüften, sie wälzt sich auf den Rücken, ein zutrauliches Tier, das den Menschen gefallen möchte wie jede anständige Sprach, sie wälzt sic, macht die Beine breit, wahrscheinlich um sich streicheln zu lassen, warum denn sonst. Sie ist ja süchtig nach Liebkosungen. (…)

Aber je mehr [meine Muttersprache] weiß, umso nichts sagender wird sie. Sie sagt natürlich dauernd etwas, aber sie ist nichts sagend. Und schon nimmt die Abgeschiedenheit ihren Abschied. Sie wird nicht gebraucht. Keiner sieht, dass ich ja noch drinnen bin, in der Abgeschiedenheit. Man achtet meiner nicht. Man achtet mich vielleicht schon, aber meiner achtet man nicht. Wie erreiche ich, dass all diese Worte von mir etwas sagen, das uns etwas sagen könnte? Nicht, indem ich spreche. Ich kann ja gar nicht sprechen, meine Sprache ist derzeit nämlich leider nicht zu Hause. (…)
Sie hört dort drüben auf dem Pfad Geheimnisse, die ich nicht wissen soll, meine Sprache, und sie sagt sie weiter, diese Geheimnisse, andren, die sie nicht hören wollen. Ich würde schon wollen, es stünde mir auch zu, ja, auch gut zu Gesicht, meinetwegen, aber sie bleibt nicht stehen, und sprechen zu mir, das tut sie auch nicht. Sie ist im Leeren, das sich gerade dadurch auszeichnet und von mir unterscheidet, dass sich sehr viele dort befinden. Das Leere ist der Weg. Ich bin sogar abseits der Leere. Ich habe den Weg verlassen. Ich habe immer nur nachgesagt. Man hat mir vieles nachgesagt, aber das stimmt fast alles nicht. Ich habe selber nur nachgesagt, und ich behaupte: Das ist jetzt das eigentlich Sagen. Wie gesagt – einfach sagenhaft! So viel gesagt ist schon lange nicht worden. Man kommt mit dem Zuhören gar nicht mehr nach, obwohl man zuhören muss, um etwas zu können. In dieser Hinsicht, die in Wirklichkeit ein Wegschauen ist, auch ein Wegschauen von mir selbst, kann man mir aber nichts nachsagen, da gibts nichts, das gibt nichts her. (…)
Ich bin nicht stolz auf dieses Kind [(ihre) Sprache], glauben sie mir auch das, bitte! Ich habe an seinem Anfang gewollt, dass es so leise bleibt wie damals, als es noch sprachlos war. Ich will auch jetzt nicht, dass es über etwas hinwegfegt wie ein Sturm, dass es andre dazu bringt, noch lauter zu brüllen und die Arme hochzureißen und mit harten Gegenständen zu werfen, die meine Sprache gar nicht mehr fassen und fangen kann, sie ist ja, auch meine Schuld, immer so unsportlich gewesen. Sie fängt nicht. Sie wirft zwar, aber fangen kann sie nicht. Ich bleibe in ihr gefangen, auch wenn sie weg ist. Ich bin die Gefangene meiner Sprache, die mein Gefängniswärter ist. Komisch – sie passt ja gar nicht auf mich auf! (…)
Wenn sie mir auch wegrennen mag, ich komme ihr nicht abhanden. Ich bin ihr zu Handen, aber dafür ist sie mir abhanden gekommen. Ich aber bleibe. Was aber bleibt, stiften nicht die Dichter. Was bleibt, ist fort. Der Höhenflug wurde gestrichen. Es ist nichts und niemand eingetroffen. Und wenn doch, wider jede Vernunft, etwas, das gar nicht angekommen ist, doch ein wenig bleiben möchte, dann ist dafür das, was bleibt, das Flüchtigste, die Sprache, verschwunden. Sie hat auf ein neues Stellenangebot geantwortet. Was bleiben soll, ist immer fort. Es ist jedenfalls nicht da. Was bleibt einem also.

Ja, klar, das war jetzt schon etwas viel. Vieles und verschiedenes! Da sind zu nennen Passagen, in welchen sie über ihre Menschenferne spricht, die verschuldet wird erstens durch ihr Dasein als Dichter, zweitens durch ihr persönliches Naturell und drittens durch ihr eigenes Verständnis der Aufgaben der Dichter. Ihr Werkzeug ist einer der fraglos wichtigsten Mittler zwischen den Menschen: die Sprache. Um sie dreht sich die Rede vornehmlich, zumindest anscheinend. Denn scheinbar wird die Vokabel metaphorisch verwendet und gibt dem Hörer daher die Aufgabe, Deutungsarbeit zu leisten, hinter das Eigenleben und die Eigenarten der *Sprache* zu steigen. Sprache, Botschaft, message, das zu Tage getragene Wesen der Menschen, soziale Fühler, … Doch war bisher von der Rede und ihren Hörern die Rede, so versteckt sich dahinter bereits ein Problem. Es war den Zitaten ja die Seltsamkeit zu entnehmen, dass der Vortrag kaum für jemand anderen als die Denkerin selbst stattfand. Als Selbstvergewisserung? Der Text wählt sich kein Gegenüber, sucht nicht danach, kümmert sich erst spät darum. Fast zu Ende gekommen liefert er, womit man kaum mehr gerechnet hat: eine Anrede.

> Dabei ist sie meine! Wie finden Sie das? Ich kann Ihnen gar nicht sagen, wie ich das finde.

Dieses so späte Erfolgen einer Anrede, dieses Nachreichen betont sogar noch das lange Ausbleiben. E. Jelinek schreibt für niemanden, Lesen darf sie jeder, ihren Unfrieden stören keiner. An diesem Nimbus, diesem Schauermärchen ihrer Geziertheit arbeitet sie selbst unentwegt, und sie webt selbst die verwegensten Muster darein.

T. Steinfeld weiß über die Rede zu berichten:

> Der verlesene Text blieb Text, kam daher ohne Ansprache, ohne Dramaturgie und ohne Abschluss, ein gleichförmiges Tableau von prinzipiell gleichartigen Sätzen, in denen die Autorin wie ein klaustrophobischer Hamster um sich selbst rotierte. (…)
> Von der Sprache handelte der Vortrag, oder genauer: von der angeblichen Unmöglichkeit, sich in der Sprache einzurichten, mit ihr zurechtzukommen, sie zu Zwecken der Verständigung, des Ausdrucks, der Gemeinschaft einzusetzen (…)
> Auch auf hundert und zweihundert Seiten wäre er in Struktur und Inhalt derselbe gewesen, hätte sich jeder Erfahrung verschlossen und sich in seinem radikalen Narzissmus weiter in sich selbst gebohrt. (…)
> Elfriede Jelinek ist mit ihrem Publikum äußerst ungnädig umgegangen. Und hat es sich dabei sehr gemütlich gemacht. [49]

Erneut wollen wir eine Engführung des gezeigten Materials versuchen (vgl. 3.3. [nicht zitiert]), so sich auch die Analyse Steinfelds vornehmlich auf das gesamte Genre sprachkritischer Texte stürzt.

6.3.3. Sprachkritischer Narzissmus

Als Epiphänomene aller und mancher sprachkritischer Arbeiten können verzeichnet werden: ein Grundwiderspruch, die Selbstgefälligkeit und die aggressive Genügsamkeit.

> Mit den Mittel der Sprache versucht der Sprachzweifler seine Zuhörer oder Leser davon zu überzeugen, dass mit den Mittel der Sprache nichts zu erreichen sei. Diese Art von selbstreferentieller Skepsis neigt nicht zufällig zur verschärften Koketterie. Oder zum Wahn. (…)
> [D]ann bemerkt der Leser, dass es sich innerhalb dieser sogenannten Sprachkritik zuweilen sehr gemütlich leben lässt: Sie kostet nichts, kann aber jederzeit und überall als unendliche Forderung eingesetzt werden. (…)
> [S]o addiert sich die schiere Masse der Kalauer in all ihrer Kurzatmigkeit zu einer ebenso gigantischen wie theatralischen und offenbar grundlosen Klage. Einer Klage zudem, die neben sich gar nichts gelten lässt und umso offensiver auftritt, je mehr sie sich mit Gesten von Bescheidenheit, von Zurückhaltung, von Vorsicht verbindet.[50]

Interessant bleibt, dass manche Rede über die Schwachheit des Redens mehr besticht, als lautstarkes Plädieren für das Gegenteil.

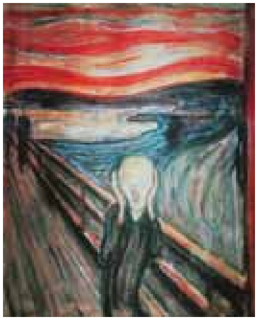
Es ist eine schmerzliche Alltagserfahrung, dass ...

- wir manchmal nicht auszudrücken vermögen, was wir empfinden;
- wir unter zu viel „Geschwätz und Geschnatter“ leiden;
- Erklärungsversuche manchmal scheitern;
- das Eigentliche nicht auf den Punkt gebracht wird.

Hier nun ein Zitat über die Grenzen im Gebrauch der Begriffe und einen möglichen, von manchem Leser wohl skeptisch beäugten Ausweg:

> Die menschliche Sprache reicht nicht aus, um in begrifflicher Fassung die Gewißheit einer wirklichen Gegenwart auszudrücken, denn alle unsre Gewißheiten sind abgeleitet, und die Erfahrung ist für die meisten Menschen nach einem langen Leben nur das Ende einer Langen Reise um ihr eigenes Nichts. Die Vernunft kennt nur die unbezweifelbare Sicherheit der Denkgesetze, und nur das Weltbild der Arten und Gattungen ist gegeben. Kein andres Feuer außer dem göttlichen spaltet und schmilzt das Eis der Begriffe.[51]

Sprachkritik ist also durchaus angebracht, doch ein seltsames Unterfangen, falls sie sprachlich formuliert auftritt – und das tut sie oft.[52] Alternativ könnte man zu anderen Mitteln der Mitteilung greifen, um auf die Grenzen der Sprache hinzuweisen. Und ein solches Unterfangen wollen wir hiermit einfach probeweise in E. Munchs *Der Schrei* sehen.Dieser der Sprache gewidmete Punkt richtete das Augenmerk auf die Selbstbezüglichkeit *sprachlicher Sprachkritik* – ihren Grundwiderspruch also. Gleichzeitig soll der Hinweis erfolgen, dass nicht nur wir im Alltag mit Sprache einen vertrauensvollen Umgang haben, sondern dass Dichter auch heutzutage das Geschäft sprachlichen Arbeitens – neue Dramatik, Lyrik, Prosa zu schaffen – durchaus betreiben: *mit heißem Bemühn*.



E. Munch: *Der Schrei*.

49 Steinfeld, Sp. 1, 1, 4, 4. – Nicht zuletzt, weil sich Steinfelds Besprechung lediglich auf die sprachkritischen Bemerkungen der Nobelvorlesung versteift, habe ich obige Streifvisite versucht, um dem Leser die Chance zu geben, von der assoziativen Metaphorik der Rede angesprochen zu werden.

50 Steinfeld, Sp. 1, 3, 4.

51 Bernanos, 179.

52 Die Auflösung dieses inneren Widerspruchs (glaubhaft eine ernst zu nehmende Skepsis an der Sprache sprachlich vorzutragen) war Antrieb zu Arbeiten, denen wir heutzutage das Vorliegen einiger Sprachtheorien bzw. bestimmter Modelle von Kommunikation verdanken. Ein Urquell dieses Schaffens sind Wittgensteinsche Überlegungen und damit der Ansatz, dass die betreffenden Theorien über sich hinaus zeigen müssen auf die Praxis, denn in und mit Sprache kann man aber nie allein stehen und erst *regelgeleitete Praxis der Sprache* („Sprachspiele“) ist bedeutend und verständlich.

6.3.4. Der Blick aus dem Abseits

Die obige Wiedergabe der Nobelvorlesung war etwas länglich, die nachfolgenden Bemerkungen manchem Leser vielleicht etwas zu kurz. Dieses Missverhältnis wird nun sogar noch etwas verstärkt. Aus seinem Abseits des Weges – einem Offset gleich – wirft der Dichter einen Blick auf das Geschehen und benennt es anschließend. Neben dem dann Erwähnten bleibt aber stets auch Unerwähntes zu finden und zudem der Mangel, dass wenn auch vieles gut, so doch nichts bestens in der Sprache nachgeformt wurde. Das trifft aber nicht nur beim Schreiben der Werke zu, sondern auch beim Besprechen der Werke.[53] Wie auch immer man einen Text endlich zu beschreiben versucht, etwas wird dabei stets verschwiegen.

Daher liegt die Kunst guter Beschreibung in noch möglicher Ausbeutbarkeit, in griffiger und doch zugleich offener Deutlichkeit. So zumindest E. Jelinek, doch der Leser sehe selbst:

> Nur was er [der Dichter] aus dem Außen hineinsagt, kann aufgenommen werden, und zwar weil er Zweideutigkeiten sagt. Und da sind auch schon zwei Passende, zwei Richtige, die mahnen, dass nichts passiert, zwei, die es in unterschiedliche Richtungen ausdeuten, ausgreifen bis auf den unzureichenden Grund, der längst herausgebrochen ist wie die Reißzähne des Kamms [man die Wirklichkeit kämmen wollte; s.o.]. Entweder oder. Wahr oder falsch. (…)
> Aber das Unzureichende, das in ihr Blickfeld gerät, reicht den Dichtern trotzdem immer noch für etwas, das sie aber auch lassen könnten. (…) Der Blick trifft genau. Das von diesem Blick Getroffene sagt noch im Hinsinken, obwohl es ja kaum angeschaut wurde, (…), das Getroffene sagt niemals, dass es auch etwas andres hätte sein können, bevor es dieser einen Beschreibung zum Opfer gefallen ist. Es besagt genau das, was besser ungesagt geblieben wäre (weil man es hätte besser sagen können?), was immer unklar bleiben musste und grundlos.

Also wollen wir uns als gelehrige Leser Jelineks zeigen und dem wehrlosen Text nicht weiterhin mit evtl. bereits vorgefassten Thesen zu Leibe rücken, sondern diesen Punkt mit vier Xenien beschließen, die nochmals Dichtung, Dilettantismus und wahre Leserschaft aufgreifen:[54]

Sprache Warum kann der lebendige Geist dem Geist nicht erscheinen?*Spricht* die Seele, so spricht ach! schon die *Seele* nicht mehr.

An den Dichter Laß die Sprache dir sein, was der Körper den Liebenden; *er* nurIsts, der die Wesen trennt und der die Wesen vereint.

Dilettant Weil ein Vers dir gelingt in einer gebildeten Sprache,Die für dich dichtet und denkt, glaubst du schon Dichter zu sein.

Der berufene Leser Welchen Leser ich wünsche? Den unbefangensten, der mich,Sich und die Welt vergisst und in dem Buche nur lebt.

7. Ursachen der selbstbezüglichen Großprojekte der Literatur / Sprache

7.1. Reflektion auf Hölderlin und Sokrates (…)

7.2. Reflektion über M.C. Eschers *Bildgalerie* (…)

8. Normativer Selbstbezug: Das Selbstanwendungsgebot (…)

9. Zusammenschau: Übersicht über das (auch Nicht-) Betrachtete

Bislang wurde dem ersten Teil des Titels dieser Arbeit genüge getan, denn es sind in der Tat **Beispiele für Selbstbezüglichkeit in Literatur und Kunst** vorgestellt worden; wir wollen die verschiedenen Ausführungen kursorisch Revue passieren lassen:

Über drei verschiedene Arten des Zustandekommens von Selbstbezügen, hatte man sich (im Prolog) schnell geeinigt. Selbstbezüge werden attraktiv, wenn sie zugleich über sich selbst noch hinausweisen und in den Dienst anderer Zwecke gestellt werden. Die untersuchten Formen nahmen im Umfang stets zu. Da waren die Kurzschriften, Schleifenwörter, Schleifensätze und ein Gedicht (in 2.). Selbstbezüge dieser Arten werden in Zeitschriften oft in Rätselfragen gekleidet, so dass man sich mit Knobeleien die Zeit vertreiben kann. Für gewichtigere Verwendungsmöglichkeiten haben wir uns zunächst nicht interessiert, sogar Mühe walten lassen, um nicht doch noch, was die Schleifensätze betrifft, in das problematische Gebiet von Paradoxien abzukommen.[55] Im Bereich der Epik (in 3.) betrieben wir keine Spiele mit den Selbstbezüglichkeiten, sondern sie spielten selbst eine wichtige Rolle im Produktionsprozess (3.1.). Texte von Marko (über Simone de Beauvoir), Kundera und Marías haben uns gehol-

[53] D.h.: Zu trifft es nicht nur auf die Beschreibungen der „zerzausten“ Wirklichkeit (der anderen), sondern auch auf die erfolgten Beschreibungen selbst.

[54] Schiller, 734 (tabulae votivae von Schiller und Goethe). – Dabei beachte man, dass diese Arbeit erscheint in der Reihe: *Als Dilettant über* ….

fen, zu einigen Gedanken über das verwickelte Verhältnis zwischen Autor/ Erzähler/ Figuren zu kommen (3.2.). (…) In der Auseinandersetzung mit Kant (6.2.) ging es uns primär um zwei Punkte: der eine war der von Kant bedachte Gegenstand selbst, weil dessen Seinsform im Zitat als selbstbezüglich par excellence beschrieben worden war; der andere war das Kantsche Unternehmen, eben diese ‚reine Vernunft' – als kritisierende und kritisierte zugleich – in einen selbstbezüglichen Erhellungsprozess zu zwingen. Sein Schreiben, so Malter, war durchaus originär zu nennen und übertrat damit die Grenzen des herkömmlichen Vokabulars. Doch war Kant Optimist genug, an die Möglichkeit zu glauben, dass seine Formulierungen das Metier dem Verständnis des Lesers erschließen können, weil dieser den rechten Verstandesgebrauch einzuüben vermag. Von der Möglichkeit des konstruktiven Sprachgebrauchs ist ausgegangen worden. Sprachkritik (6.3.), das dritte Großprojekt der Literatur / Sprache, entspringt gerade der *Skepsis* gegenüber dieser starken Hypothese. Hofmannsthal beschrieb (aus seinem *Erleben* heraus) ein sich einstellendes Unvermögen mit Sprache weiterhin zu kommunizieren und Jelinek fokussierte diese Erfahrung hauptsächlich auf dichterisches Schaffen. Steinfeld holte dann zum Generalschlag gegen Sprachkritik in ihrem narzisstischen Selbstverständnis aus. Kritik an der Sprache ist eine hehre Angelegenheit, die manchmal als notwendig erscheint. Doch muss zudem um die Antwort auf die Frage gerungen werden: Wie ist Sprachkritik überhaupt erst möglich? Weil diese Großprojekte eben nicht auf den Schultern Einzelner ruhen, sondern sich auf breite Unterstützung berufen können,[56] vermuteten wir als Ursache dieser Phänomene eine im Mensch- bzw. Person-Sein schlechthin verankerte Eigenschaft. Wir behaupten, sie liege in der Fähigkeit zur *Reflexion* begründet. Um diesen Begriff scharen sich nämlich – als Beispiele für Selbstbezüglichkeit par excellence – die gebräuchlichen Wörter mit dem „Selbst": Selbstbewusstsein, Selbsterfahrung, Selbsterhaltung, Selbstenthaltung, Selbstverständnis, Selbstvertrauen, Selbstbeobachtung, Selbstinszenierung, etc. (…) Die aufgestellte These lautet, dass wir in Literatur und Kunst Selbstbezüge nach dem Vorbild unseres Ich-Konzepts hineinkonstruieren und späterhin als eingestreutes Muster wieder entdecken (in 7.). Wir sind nun dort angelangt, wo literarisch/ künstlerische Selbstbezüglichkeiten über sich hinaus und auf den Menschen zeigen. Ihrem Schöpfer stehen sie zu Diensten! Weil er sie sich dienstbar macht!! Und in die Pflicht genommen werden sie last but not least durch den Akt des normativen Selbstbezugs (in 8.)!!! Am deutlichsten zu Tage trat diese Verzweckung bei den nachgezeichneten philosophischen Analysen der beiden Werke *Las Meninas* (Maler – Modell – Bildbetrachter; in 4.) und *Mausefallenszene* (Wirkungsweise/ Grenzen des Theaters; in 5.). Wie Foucault seine These über das ‚kulturelle a priori' (*Episteme*) zu Zeiten Velazquez' durch seine Bildinterpretation zu belegen versucht, hat Schwanitz skizziert und anschließend zweifachen Widerspruch vorgetragen: zum einen hat er Foucaults Interpretation durch seinen Verweis auf H.U. Asemissens Bildanalyse vernichtet; zum anderen hat er die These selbst widerlegt, weil seine Ausdeutung der Shakespeareschen *Hamlet*szene *Mausefalle* („The trope is the trap.") gewissermaßen ein Gegenbeispiel liefert. Besondere Beachtung verdienten die allgemeinen Bemerkungen über die Grenzen von Beobachtung, die eine gesunde Skepsis (keinen radikalen Zweifel) gegen die eigene Perspektive empfehlen bzw. die Reflexivität von Beobachtung einfordern. Und weil wir die Schwanitzschen Ausführungen ernst zu nehmen gewillt waren, haben wir sie aufgegriffen und befolgt (Normativer Selbstbezug!). Für die reflexive Beobachtung haben wir als weitere Quelle die Analyse Rehkämpers herangezogen und versucht, im Vergleich die jeweiligen Beobachtungsgrenzen zu entdecken und tiefer in das Problem zu blicken. Zu Tage trat da die eigene Beobachtungsgrenze, die nicht über den Rahmen hinausgeschoben werden darf, der diesem Aufsatz im Romseminarbüchlein gesteckt ist. Als bemerkenswerte Erkenntnis wollen wir festhalten, dass es als intellektuell redlich erschient, einen Gegenstand erst einer bestmöglichen Analyse zu unterziehen, bevor man ihn den eigenen Interpretationsgelüsten unterzieht.[57] Hat Foucault das gewusst? Hat er es bedacht

[55] Einer der Fremdzwecke, denen diese Selbstbezüge dienen können, ist Rechner in eine Endlosschleife zu zwingen.

[56] Der gesamte kulturelle Hintergrund bestimmt sogar erst diese weiteren und tieferen Bedeutungsebenen.

[57] Diese Erkenntnis ist wirklich bemerkenswert und zugleich trivial; sie ist zwar stets neuwertig, doch nicht neuartig. – Vgl. bereits Kant; Was heißt: sich im Denken orientieren?
Man kann vor allem Irrtum gesichert bleiben, wenn man sich da nicht unterfängt zu urteilen, wo man nicht so viel weiß, als zu einem bestimmenden Urteile erforderlich ist. Also ist Unwissenheit an sich die Ursache zwar der Schranken, aber nicht der Irrtümer in unserer Erkenntnis.
Vgl. des Weiteren Ratzinger, 108:
Wir [i.W.: die Glaubenskongregation] versuchen auch, unsere Grenzen einzusehen und auf das Antworten zu verzichten, wo es nicht möglich ist.

und beachtet? Auch bei Kant lässt sich über einen allgemeineren Fall derartiges lesen, wenn er empfiehlt, subjektive Gründe (Interpretationen) für Erklärungen erst dann zu verwenden, wenn alle objektiven (die fachwissenschaftlich geleiteten Analysen) notwendigerweise versagen.

> Endlich kann ich diesen Begriff noch mehr erweitern, da er denn in dem Vermögen bestände, sich nicht bloß im Räume, d. i. mathematisch, sondern überhaupt im Denken, d. i. logisch zu orientieren. Man kann nach der Analogie leicht erraten, daß dieses ein Geschäft der reinen Vernunft sein werde, ihren Gebrauch zu lenken, wenn sie von bekannten Gegenständen (der Erfahrung) ausgehend sich über alle Grenzen der Erfahrung erweitern will, und ganz und gar kein Objekt der Anschauung, sondern bloß Raum für dieselbe findet; da sie alsdann gar nicht mehr im Stande ist, nach objektiven Gründen der Erkenntnis, sondern lediglich nach einem subjektiven Unterscheidungsgrunde, in der Bestimmung ihres eigenen Urteilvermögens, ihre Urteile unter eine bestimmte Maxime zu bringen.[58]

(…)

Der Leser darf weiterhin, ja soll geradezu – auch wider besseres Wissen – skeptisch bleiben, denn hier ist über Selbstbezüge bislang nichts zwingend nachgewiesen. Wir haben literarische Phänomene betrachtet und als Selbstbezüge angesehen und als verschiedene Arten klassifiziert.

Dem Vorliegen eines Selbstbezuges aber wiederum versuchten wir in jedem Einzelfall etwas Gewinnbringendes abzuringen. Wer aber in den ausgewählten Beispielen keine einzige Selbstbezüglichkeit finden konnte/ wollte, dem mussten wohl alle Erläuterungen vorkommen als ein – hoffentlich verzeihliches – **viel Lärm um nichts**.

10. Notwendige Ergänzungen

10.1. Scheiternde Rechtfertigung (…)

10.2. Ein paar Worte zum Vortrag (…)

10.3. Ein paar Worte zum Titel (…)

[58] Kant; Was heißt: sich im Denken orientieren? Für den Interessierten möchte ich noch Kants konzentrierte Antwort auf diese Titelfrage (gegeben in Fußnote 2) zitieren:
Sich im Denken überhaupt orientieren heißt also: sich, bei der Unzulänglichkeit der objektiven Prinzipien der Vernunft, im Fürwahrhalten nach einem subjektiven Prinzip derselben bestimmen.

Epilog: Der methodische Grundsatz

Dieser Epilog fand Aufnahme in die vorliegende Arbeit, um nochmals und damit etwas detaillierter als es im Vorstehenden schon versuchsweise der Fall war, das *Selbstverständnis* dieser Bearbeitung des im Titel gewählten Themas zu explizieren; nämlich zu dilettieren über Selbstbezüglichkeiten in Literatur und Kunst. Die Art ihrer Formulierung, d.h. das für die Erläuterungen gewählte Tempus, ist einer intellektuellen Aufrichtigkeit geschuldet und demgemäß müssten die folgenden Zeilen dem ganzen Text, dem sie nun folgen, eigentlich einleitend voran stehen. Weil diese Geradlinigkeit aber auf Kosten der Verständlichkeit gegangen wäre und den Leser verschreckt hätte, war und ist die gewählte Methodik eine Erklärung a posteriori.

Triebfeder des Vortrages (sowie seiner Textung) ist die Skizzierung eines Entwurfes einer potentiell möglichen Theorie über Selbstbezüge in Kunst und Literatur, der seinen Ausgang bei den Phänomenen sucht.

Wem das nun für eine schnelle Aufschlüsselung der Bedeutung vorstehenden Satzes zu viele sinnvage Abstrakta auf einem Haufen waren, dem kann vielleicht durch folgende satzzerfleddernde Aufschlüsselung geholfen werden.

Analyse der Formulierung des methodischen Grundsatzes:

„**Triebfeder**“: Das an diesen Vortrag bzw. Aufsatz geknüpfte Ansinnen ist die folgendermaßen streng fixierte, von allem Anfang an ausbedingte Beschränkung, die motivierend ist, insofern sie eine Übersteigerung der Ansprüche verhindert bzw. weil geringe Arbeit schneller geleistet, kleine Ziele einfacher erreicht und wenige Versprechen leichter gehalten werden als die großen ihrer Art.

„**Eine Theorie**“: Nicht erhoben wird der Anspruch die einzig mögliche Theorie zu thematisieren, denn alles geht auch anders und besser. (Systematisierung der Wirkprinzipien, die Selbstbezüge verursachen)

„**Entwurf**“ : Theorie = Skelett : Körperlichkeit: D.h. von der Theorie, auf die abgezielt wird, findet eine Darstellung nur das sie tragende, stützende, haltende Skelett. (Unvollständigkeit (i.S.v.: Unabgeschlossenheit) der Theorie)

„**Skizzierung**“: Von dieser Grobstruktur selbst werden aufgezeigt lediglich einige wenige besonders markante Stellen in einer reduzierten Darstellung (vgl. Projektion). (Unausführlichkeit des dargestellten Entwurfes)

„**Potentiell möglich**“: Ob die gewählte, nur angedeutete Systematisierung auch wirklich durchführbar ist und gegebenenfalls in sich konsistent zu bestehen vermag, bleibt ungeklärt. (Nichts obligat, alles höchstens optional)

„**Ausgang**“: Die geführten Argumentationen sind lokalisiert zwischen den Extremen, d.h. sie sind pragmatisch eingebettet in die Trinitas aus Deduktion, Abduktion und Induktion. (Konzeptionelle Herangehensweise)

Synthese in vier Sätzen:

Weil erstens die definitorische Fassung des Begriffs des Selbstbezuges zwischen Alles und Nichts hängen bleibt, wird zumindest versucht eine Verortung und Ordnung der „**Phänomene**“, d.h. den Erscheinungen in „**Literatur und Kunst**“, zu leisten.

Um zweitens zu klären, welche Arten von „**Selbstbezügen**“ (Selbstbezüglichkeiten) unter welchen Gesichtspunkten erkannt werden können, soll zunächst nichts Neues entworfen, sondern bereits in der kulturellen Welt Vorliegendes sondiert werden.

Es soll also drittens anschaulich (und bestenfalls ansehnlich) gearbeitet werden, indem an ausgewählten Textstellen zum einen Richtlinien gewonnen und zum anderen geprüft werden.

Dabei wird davon ausgegangen, dass das Allgemeine nicht generell im Dissens mit dem Speziellen liegen kann, dass über die konkreten Ausprägungen (Textbeispiele) also die Freiheiten des Prinzipiellen eingeschränkt werden, dass also durch ein *pars pro toto* eine Vororientierung auf die Theorie hin erreicht werden kann.

Die zu leistende Betrachtung wird leider im Detail wie auch im Ganzen in den Problemen stecken bleiben bzw. optimistisch formuliert: sie muss sich in Umfang und Tiefgang einen an Effektivität und Pragmatismus orientierten Rahmen stecken. Der geneigte Interessent hört also immerzu ein „Alles nur vorläufig!“ mit und wird daher leider die Durchführung der bereits angedeuteten Überprüfung von ermittelten Kriterien doch missen müssen.

Darin braucht aber kein Scheitern auf ganzer Linie gesehen werden, da das immerhin einer Befolgung der von Luhmann im März 1987 in seiner Rede anlässlich der Einweihung des ersten geisteswissenschaftlichen Graduiertenkollegs in Deutschland (das war an der Universität-Gesamthochschule-Gießen vor Ministern und dem damaligen DFG-Präsidenten) getätigten Empfehlung recht nahe bleibt: Die Weisung an die Kollegiaten war nämlich, …

> nur ja nie Lösungen für Ihre Probleme zu finden, sondern Probleme zu identifizieren und zu hegen und zu pflegen und zu hätscheln.[59]

Anhang I.

Rechtfertigung als Programm: Der verantwortungsvolle Auftrag (…)

Anhang II.

Prädispositionierung des Inhalts durch die Form: Eitle Selbstbespitzelung (…)

Anhang III.

Erinnernder Überblick durch die piktorellen Etikettierungen (…)

59 H.U. Gumbrecht (in der elften Minute).

Bilddokumente

E. MUNCH; *Der Schrei*. (http://www.gymnasium-baesweiler.de/faecher/kunst/beschreibung.htm [Zugriff am 20.04.05])
K. REHKÄMPER; Searle, Foucault und *Las Meninas*. (zitiert nach vom Autor direkt erhaltenem doc-file) (veröffentlicht in: K. SACHS-HOMBACH/ K. REHKÄMPER (Hrsg.); *Bildgrammatik*; Scriptum Verlag, 1999.)
D.R.deS. VELAZQUEZ; *Las Meninas*. (http://artchive.com/graphics/meninas.jpg [Zugriff am 30.04.05])

Textdokumente

G. BERNANOS; *Die Sonne Satans*; Bertelsmann Lesering.
B. ERNST; *Der Zauberspiegel des M.C. Escher*; Taschen Verlag Köln, 1994.
W.L. BÜHL; Grenzen der Autopoiesis. In: *Kölner Zeitschrift für Soziologie und Sozialpsychologie*, Nr. 39, 1987, p. 225-254. (zitiert nach www.vordenker.de/buehl/wlb_grenzen-autopoiesis.pdf [Zugriff: 29.04.05])
A.E. HERZER (Ltg.); *Velazquez*; Manesse Verlag, 1953.
H.v. HOFMANNSTHAL; Ein Brief (auch: Brief des Lord Chandos an Francis Bacon); Erstdruck in der Zeitung *Der Tag*, 18./19.10.1902. (zitiert nach http://gutenberg.spiegel.de/hofmanns/prosa/chandos.htm [Zugriff: 21.01.05])
E. JÄGER/ M.I. KAGANOW; *Grundlagen der Festkörperphysik*; Verlag Harri Deutsch, 2000.
E. JELINEK; Im Abseits (© Die Nobelstiftung 2004). (zitiert nach http://nobelprize.org/literature/laureates/2004/jelinek-lecture-g.html)
I. KANT; *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können*; Philipp Reclam jun. Stuttgart, 2001. (zitiert nach der Paginierung der Originalausgabe A1 von 1783)
I. KANT; Was heißt: sich im Denken orientieren? (zitiert nach Digitale Bibliothek Band 2: Philosophie)
M. KUNDERA; *Die unerträgliche Leichtigkeit des Seins*; Fischer Taschenbuch Verlag, ^{35}2003.
M. LEHN; Wie halte ich einen Seminarvortrag; Fassung vom 1. April 2004. (zitiert nach http://www.mathematik.uni-mainz.de/~lehn/seminarvortrag.html [Zugriff: 13.06.05])
J. MARÍAS; *Schwarzer Rücken der Zeit*; Klett-Cotta, ^{2}2000.
G. MARKO; *Schreibende Paare: Liebe, Freundschaft, Konkurrenz*; Artemis & Winkler, 1995.
M. RATHGEB; Beispiele für Selbstbezüglichkeit in Literatur und Kunst – Viel Lärm um nichts? aus der Reihe: Als Dilettant über ... . (zitiert nach vom Autor direkt erhaltenem doc-file)
J. KARDINAL RATZINGER; *Salz der Erde: Christentum und katholische Kirche an der Jahrtausendwende. Ein Gespräch mit Peter Seewald*; Deutsche Verlags-Anstalt, ^{6}1997.
K. REHKÄMPER; Searle, Foucault und *Las Meninas*. (zitiert nach vom Autor direkt erhaltenem doc-file) (veröffentlicht in: K. SACHS-HOMBACH/ K. REHKÄMPER (Hrsg.); *Bildgrammatik*; Scriptum Verlag, 1999.)
F. SCHILLER; *Werke in drei Bänden. Band II*; Carl Hanser Verlag München, 1966.
W. SHAKESPEARE; *Hamlet*. (zitiert nach http://www.william-shakespeare.info/act3-script-text-hamlet.htm [Zugriff am 30.04.05])
T. STEINFELD; Die Leere ist der Weg, und das Leerste bin ich. Elfriede Jelineks Nobelpreisrede: Stockholm bewundert eine Maschine zur Verfertigung von Kalauern. In: *SZ – Feuilleton*, 08.12.04.
R. WELLER; *Arbeitstexte für den Unterricht. Sprachspiele*; Philipp Reclam jun. Stuttgart, 1977.

Tondokumente

H.U. GUMBRECHT; „Alteuropa“ und „Der Soziologe“ – Wie verhält sich Niklas Luhmanns Theorie zur philosophischen Tradition? (05.12.1999). In: *Freiburger Reden – Denker auf der Bühne: Niklas Luhmann, Beobachtungen der Moderne*; 4 Audio-CDs von Stephan Krass, Peter Fuchs, Norbert Bolz, Hans U. Gumbrecht; CD - Carl-Auer-Systeme Verlag, 2000.
D. SCHWANITZ; Die Beobachtung der Beobachtung oder die theatralische Teilung der Welt (27.06.1999). In: *Freiburger Reden – Denker auf der Bühne: Niklas Luhmann, Beobachtungen der Moderne*; 4 Audio-CDs von Stephan Krass, Peter Fuchs, Norbert Bolz, Hans U. Gumbrecht; CD - Carl-Auer-Systeme Verlag, 2000.


Quattro coronati
05-03-01

Teil V

Rom

Christina Guschelbauer

Rom - San Pietro

1. Einleitung

Der Petersdom ist die berühmteste Kirche der Christenheit. Er ist dem Apostel Petrus geweiht, dem ersten Bischof von Rom. Als Grabeskirche des heiligen Petrus ist der Petersdom ein zentrales Heiligtum und eine der wichtigsten Pilgerstätten der katholischen Kirche. Er ist die Kirche des Papstes und somit die Kirche aller, Kathedrale der Welt. In Rom gehört er neben S. Giovanni in Laterano, S. Paolo fuori le Mura und S. Maria Maggiore zu den Patriarchalbasiliken, ebenso ist er auch eine der sieben Pilgerkirchen: S. Giovanni in Laterano, S. Pietro in Vaticano, S. Poalo fuori le Mura, S. Maria Maggiore, S. Lorenzo fuori le Mura, S. Croce in Gerusalemme, S. Sebastiano ad Catacumbas.

Der Petersdom weist eine interessante Baugeschichte auf, hatte viele verschiedene Architekten und viele verschiedene Baupläne bis er sein heutiges Aussehen bekam. Dies erfordert eine genauere Betrachtung.

2. Anfänge – Zirkus, Petrus

In der Antike hieß die Gegend, in der sich heute der Petersdom befindet, Ager Vaticanus. Dies hatte eine sumpfige Beschaffenheit, war ungesund und die Menschen gingen selten dorthin. Im 1. Jahrhundert nach Christus wurde dieses Gebiet trockengelegt. Kaiser Caligula (12-41 n. Chr. – Regierungszeit: 37-41 n. Chr.) ließ dort den Bau eines Zirkus beginnen, der durch Kaiser Nero (37-68 n. Chr. Regierungszeit: 54-68 n. Chr.) fertig gestellt wurde. In der Mitte dieses Zirkus stand ein Obelisk aus Ägypten, der später in die Mitte des Petersplatzes versetzt wurde. Noch heute kann man seinen ursprünglichen Standort innerhalb der Mauern des Vatikans rechts des Petersdoms sehen. In diesem Zirkus wurden viele Christen getötet, die Kaiser Nero beschuldigte, den Brand von Rom 64 n. Chr. gelegt zu haben. Darunter befand sich auch der Apostel Petrus. Er soll sich schon wieder auf dem Weg aus Rom hinaus auf der Via Appia befunden haben, um vor der Verfolgung des Kaisers Nero zu flüchten, als ihm Christus erschien, woraufhin Petrus umkehrte und wieder in die Stadt zurückging, bereit zu sterben. Er starb nicht weit vom Obelisken im Zirkus des Caligula. Petrus wurde am nordöstlichen Abhang des vatikanischen Hügels in einer heidnischen Nekropole (Massengrab) in einem für Arme vorbehaltenem Sektor begraben. Sein Grab war dort im westlichen Endteil.

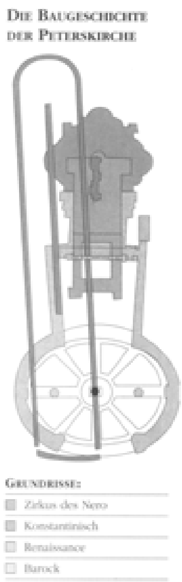


Abb. 1: Überblick über die verschiedenen Bauepochen und die Lage von Circus, Konstantinsbasilika und Petersdom.

3. Konstantinsbasilika

Kaiser Konstantin (zwischen 270 und 288-337 n. Chr. - Regierungszeit: 306-337 n. Chr.) ließ Anfang des 4. Jahrhunderts den Abhang des Hügels eben machen und baute zu Ehren des Apostelfürsten Petrus eine Basilika. Er hatte zuvor den Christen volle Freiheit gewährt und wollte nun mit dem Bau der Basilika über dem Grab des heiligen Petrus ein Zeichen setzen. Papst Silvester weihte die Konstantinsbasilika am 18. November 326, der Bau wurde allerdings erst im Jahr 349 fertig gestellt. Die Basilika lag zum Teil über der Nekropole, in der auch Petrus begraben wurde. Allerdings blieb die Begräbnisstätte des Heiligen Petrus unversehrt. Das Grab bekam Stützmauern zu drei Seiten hin, nach Osten hin blieb es offen, damit die Gläubigen es sehen konnten.

3.1 Aussehen

Die Kirche hatte die Maße 85 Meter x 64 Meter. Sie bestand aus 5 Schiffen, einem Querschiff und einer Apsis. Vor ihrer Fassade war ein Hof, der von Säulen umgeben war. In seiner Mitte stand ein Brunnen mit einem Becken für die Waschungen. Die fünf Schiffe waren mit 4 Säulenreihen zu je 22 Säulen voneinander getrennt. Der Fußboden war aus Marmor, die Decke aus Holz. Die Wände wurden über die Jahrhunderte hinweg mit Mosaiken, Wandgemälden und Statuen geschmückt, unter anderem wirkten Künstler wie Giotto di Bondone (1267-

Christina Guschelbauer, Stefano Cardanobile, Vatikanische Gärten, Rom 4.3.2005.

1337) daran mit. Heute ist jedoch fast nichts mehr davon enthalten.

Abb. 2: Querschnitt der fünfschiffigen Konstantinsbasilika.

Über dem Grab des heiligen Petrus, in der Mitte der Basilika, bauten Kaiser Konstantin und seine Mutter Helena (ca. 255-330 n. Chr.) ein schlichtes Monument aus Marmor mit einem goldenen Kreuz. Dieses Monument wurde von einer „Pergola" überdacht, die von 6 gewundenen Säulen, die mit Weinranken dekoriert waren, getragen wurde. In der Mitte der Pergola war die königliche Krone angebracht. Darunter wurde bei Messen ein Altar aufgebaut. Erst unter Gregor dem Großen (540-604 - Papst von 592-604 n. Chr.) gab es einen fest angebrachten Altar. Die Konstantinsbasilika wurde von da an ein Vorbild für den christlichen Kirchenbau.

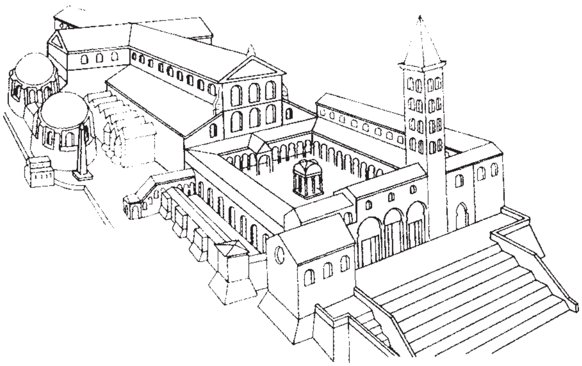


Abb. 3: Ansicht der Konstantinsbasilika.

3.2 Mehrmaliger Umbau

Nach der Plünderung der Basilika durch Sarazenen im Jahr 846 ließ Papst Leo IV. (ca. 790-855 n. Chr. – Papst von 847-855 n. Chr.) eine Wehrmauer um die Kirche bauen. Dadurch schuf er eine befestigte Zitadelle – ´Civitas Leoniana'. Während des 13. Jahrhunderts hatte sie eine doppelte Funktion: zum einen diente sie als Zittadelle, zum anderen teilte sie sich abwechselnd mit dem Lateran-Palast die Funktion der Residenz des Bischofs von Rom. Zusätzlich entstanden noch Säle, Loggien und Gärten. Einer der Säle war die Cappella Palatina, woraus später die Sixtinische Kapelle entstand. Unter anderem wurde auch ein Gang von der Konstantisbasilika zur Engelsburg in den Mauern von Papst Leo gebaut.

Nach mehrmaliger Renovierung und Erweiterung, sowie mehrmaligen Plünderungen durch Barbaren bestand 1000 Jahre nach ihrem Bau die Gefahr, dass die Konstantinsbasilika einstürzt. Während dem Exil der Päpste in Avignon im 14. Jahrhundert verwahrloste die Kirche zusehends. Dies, sowie atmosphärische Einflüsse und die Umbaumaßnahmen, hatte zur Folge, dass die Konstantinsbasilika immer mehr verfiel. Deshalb beauftragte Papst Nikolaus V. (1397-1455 n. Chr.) Leon Battista Alberti (1404-1472 n. Chr.), Pläne für den Neubau zu erstellen; Bernardo Gamberelli (1410 – 1464 n. Chr.), der Rossellino genannt wurde, bekam die Bauleitung der Basilika. 1455, kurz nach Beginn der Bauarbeiten, starb der Papst. Daraufhin schliefen allerdings die Arbeiten unter den nachfolgenden Päpsten ein und wurden erst 1506 wieder aufgenommen. Papst Julius II. (1443-1513 n. Chr. – Papst von 1503 - 1513 n. Chr.) veranlasste einen Teilabbruch der Konstantinsbasilika und die Wiederaufnahme des Baus. Nachdem es eine Konfrontation zwischen dem Papst und Guiliano da Sangallo (1445-1516 n. Chr.), der eigentlich die Pläne für die Petersbasilika machen sollte, gab, bekam Donato Bramante (1444-1514 n. Chr.) den Bauauftrag zu einem kompletten Neubau. Von dem Beschluss von Papst Nikolaus V. bis zur Vollendung des neuen Kirchengebäudes vergingen etwas mehr als 150 Jahre. Dies erscheint, als wäre es eine lange Zeit. Berücksichtigt man jedoch die unermessliche Größe an Arbeiten, die durchgeführt werden mussten, und die Planungsschwierigkeiten, so sind 150 Jahre kurz.

4. Peterskirche

Die Grundsteinlegung der neuen Petersbasilika fand am 18. April 1506 statt. Bramantes Pläne bestanden aus einem Zentralbau mit Kuppel, der den Grundriss eines griechischen Kreuzes hatte. Bramante wollte das „Pantheon auf die Konstantinsbasilika“ bauen. Der Bau wurde unterbrochen durch den Tod des Papstes Julius II. im Jahr 1513 und durch Bramantes Tod ein Jahr später. Zu diesem Zeitpunkt standen erst die vier Pfeiler der Kuppel und der südliche Teil des griechischen Kreuzes. Im Anschluss wurde der Kirchenbau unter den nachfolgenden Päpsten fortgeführt, allerdings gab es häufige Wechsel der Baupläne, ebenso hatte der Bau mehrere Architekten. So gut wie alle in Rom tätigen großen Baumeister waren am Bau des Petersdoms beteiligt, u. a. Donato Bramante (Baumeister von 1506-1514), Antonio da Sangallo d. Ä. (1455-1534 n. Chr. - Baumeister von 1520-1538), und Raffael (Raffaelo Santi, 1483-1520 n. Chr. - Baumeister von 1514-1520).

Unter Raffael wurde der ursprüngliche Entwurf verworfen und der Grundriss einer dreischiffigen Basilika mit Seitenkapellen, einem Querhaus und der Form eines lateinischen Kreuzes gewählt. Dies konnte aber durch den frühen Tod von Raffael nicht realisiert werden. Es folgten Peruzzi (Baumeister von 1538-1546), Antonio da Sangallo d. J. (1483-1546 n. Chr.), Michelangelo (Baumeister ab 1546 bis zu seinem Tod 1564). Zu diesem Zeitpunkt war Michelangelo bereits 72 Jahre alt, dennoch gab er 16 Jahre lang dem Bau des Petersdoms seine Note. Nach Michelangelos Tod waren die folgenden Baumeister Vignola (1564 bis zu seinem Tod 1572), Giacomo della Porta (ab 1572), Domenico Fontana, Carlo Maderno (1608-1612) und Giovanni Lorenzo Bernini (1598-1680).

Der endgültige Bauplan stammte von Michelangelo. Er nahm den ursprünglichen Plan von Bramante wieder auf, vereinfachte und änderte ihn aber ab. So bekam die Peterskirche den Grundriss eines griechischen Kreuzes mit 5 Schiffen, war jedoch kleiner als die ursprünglich von Bramante geplante Kirche, aber größer als die Konstantinsbasilika. Mittelpunkt sollte eine Kuppel über dem Petrusgrab bilden.

Vignola baute nach Michelangelos Tod rückwärtig links und rechts der Kuppel zwei kleinere Türme mit Nebenkuppeln, die Michelangelo schon geplant hatte. Carlo Maderno wandelte das ursprünglich griechische Kreuz, wie Michelangelo es entworfen hatte, in ein lateinisches Kreuz um. Das heißt, dass das Langhaus länger ist als das Querhaus. Vor dem Langhaus entstand eine Vorhalle mir Barockfassade. Ebenso wurden die zwei kleinen Türme links und rechts wieder entfernt.

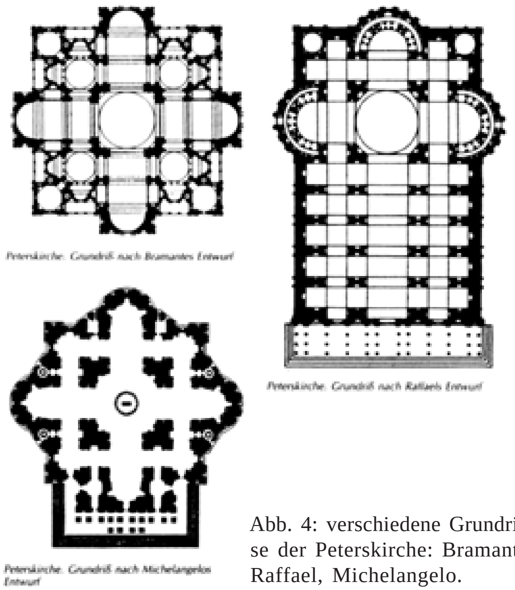


Abb. 4: verschiedene Grundrisse der Peterskirche: Bramante, Raffael, Michelangelo.

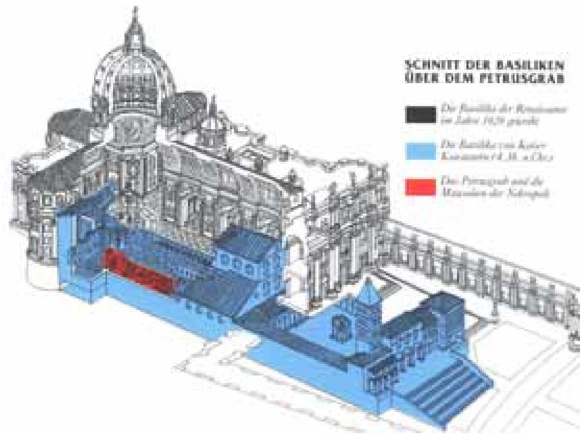


Abb. 5: Schnitt durch das Petrusgrab, die Konstantinsbasilika und den Petersdom.

4.1 Michelangelo

Michelangelo wurde im Jahre 1475 als Sohn einer Bauernfamilie in Caprese bei Arezzo geboren. Sein voller Name ist Michelagniolo di Ludovico di Buonarroto Simoni. Kurz nach seiner Geburt kehrte seine Familie wieder nach Florenz zurück. Dort kam er schon als Junge als bezahlter Assistent in die Werkstatt von Domenico Ghirlandaio. Später führte ihn sein Weg unter anderem mehrmals nach Bologna, Florenz und Rom. Bei seinem zweiten Aufenthalt in Florenz schuf der die David-Statue, die er aus einem Marmorklotz schlug. Die Sixtinische Kapelle gestaltete er während seinem zweiten Romaufenthalt. Besonders hervorzuheben sind hier das „Jüngste Gericht“ an der Wand hinter dem Altar und das Deckenfresko. Bei seinem dritten Romaufenthalt wurde Michelangelo zum Baumeister des Petersdoms ernannt, da sein Entwurf für den Neubau der Peterskirche angenommen wurde. Er wollte kein Honorar für seine Arbeit am Petersdom. Die Kuppel war sein Hauptanliegen, sie wurde allerdings erst durch seinen Nachfolger Giacomo della Porta vollendet. Michelangelo starb 1564 in Rom.

4.2 Die Kuppel des Petersdoms

Michelangelo hatte die Kuppel geplant und entworfen, und konnte die Bauarbeiten bis zur Fertigstellung des Tambours leiten. Seine Vorstellung der Kuppel war, eine ruhende halbkugelförmige Kuppel zu errichten. Zur Veranschaulichung baute er ein kleines Kuppelmodell aus Holz, wofür er 3 Jahre brauchte. Die Endgültige Fertigstellung der Kuppel übernahm Giacomo della Porta, da Michelangelo sie nicht mehr erlebte. Della Porta veränderte allerdings Michelangelos Entwürfe noch geringfügig und hob die Höhe der Kuppelwölbung noch um 7 Meter an. Dies verlieh der Kuppel den Eindruck einer größeren Schlankheit. Sie hat eine Höhe von 137 Metern und einen Durchmesser von 42,34 Metern. Daraus kann man ersehen, dass sie ihr Durchmesser 86 cm kleiner ist als der der Kuppel des Pantheons, dafür ist sie aber um 43,20 Meter höher. Die Kuppel ist das größte freitragende Ziegelbauwerk. Sie ist von jeder Stelle Roms aus zu sehen. Bei der Kuppel handelt es sich um eine Doppelkuppel mit einer inneren Raumschale und einer äußeren Schutzkuppel. Zwischen der inneren Raumschale und der Schutzkuppel liegt ein Hohlraum, in dem zwei Treppen zum Umgang der Laterne hinaufführen. Basilika und Kuppel sollten eine fortlaufende Außenwand haben, die den ganzen Bau auf derselben Höhe einhüllt. Über der Außenwand sind der Tambour und die Kuppelhaube.

Im Inneren des Petersdoms sind an der Kreuzung von Langhaus und Querhaus die vier Kuppelpfeiler, die die riesige Kuppel tragen. Diese Pfeiler haben einen Umfang von 71 Metern und einen Durchmesser von 24 Metern. Innen hat die Kuppel eine Höhe von 120 Metern. Der große Höhenunterschied zwischen Innerem und Äußerem der Kuppel ist durch die Doppelkuppel zu erklären.

Zwischen Pfeilern und dem Tambour gibt es an jedem Pfeiler einen Zwickel. Auf diesen Zwickeln sind Mosaiken der 4 Evangelisten angebracht: Matthäus mit dem Ochsen, Markus mit dem Löwen, Lukas mit dem Engel und Johannes mit dem Adler. Darüber befindet sich im Sockel des Tambours die lateinische Inschrift, die die Schlüsselübergabe von Jesus an Petrus verdeutlicht: „Tu es Petrus et super hanc petram aedificabo ecclesiam meam et tibi dabo claves regni caelorum“ (Du bist Petrus, und auf diesen Fels werde ich meine Kirche bauen und ich werde dir die Schlüssel des Himmelreichs geben.) Diese schwarze, auf goldenem Hintergrund geschriebene Inschrift wird durch die 16 Fenster beleuchtet, die oberhalb der Inschrift den Tambour durchbrechen. Vom Tambour aus ist die Laterne durch 16 Rippen verbunden und ebenso in 16 Fenster aufgeteilt. Zwischen diesen Rippen sind Mosaiken, auf denen u. a. Heilige, Päpste, Christus, Maria und die Apostel dargestellt sind, zu sehen.

Abb. 6: Blick vom Inneren der Kirche zur Kuppel.

4.3 Fassade

Die Fassade an der Vorderseite des Petersdoms ist ein Werk von Carlo Maderno. Sie hat eine Länge von 117,70 Metern und eine Höhe von 45,50 Meter, daher ist sie im Verhältnis zu ihrer Länge ziemlich niedrig. Der Grund hierfür ist jedoch, dass sie den Blick auf den „cupolone“ (= das ist der Name für die Kuppel von St. Peter) nicht verdecken sollte. Die Fassade ist aus Travertin und wird durch 8 Säulen eingeteilt. 4 Pfeiler in korinthischem Stil tragen das Gesims, auf dem eine mit Fenstern unterbrochen Attika ist. Auf der Balustrade darüber stehen 13 Statuen, die jeweils 5,70 m hoch sind. Sie stellen Christus, Johannes den Täufer und 11 Apostel dar. Petrus und Paulus fehlen, da ihre Statuen auf dem Petersplatz am Fuße der Treppe stehen. Auf der Fassade stehen links und rechts 2 Uhren, die allerdings erst aus dem 18. Jahrhundert stammen: die rechte Uhr hat nur einen Zeiger und zeigt die mitteleuropäische Uhrzeit an, die linke Uhr zeigt die genaue römische Zeit. Unter ihr ist die große Glocke von St. Peter. Sie läutet jedes Mal an Weihnachten, Ostern, zum Fest von Peter und Paul und beim Papstsegen „Urbi et Orbi“. Auf dem Hauptquerträger des Gesimses ließ Carlo Maderno im Auftrag von Papst Paul V. eine lateinische Inschrift anbringen: „In onorem Principis Apostoli Paolus V Burghesius Pont. Max. anno MDCXII – Pont. VII“ (Zu Ehren des Apostelfürsten. Paul V. Borghese, Römischer Papst im Jahr 1612, dem 7. seines Pontifikats). Zwischen den Säulen sind 9 Loggien. Die mittlere Loggia ist die Benediktionsloggia. Von ihr aus wird die Wahl des neuen Papstes verkündet. Unter ihr ist eine Darstellung der Schlüsselübergabe von Jesus an Petrus zu sehen.

4.4 Innenraum der Kirche

Der Innenraum des Petersdoms hat grandiose Dimensionen. Er ist mit vielen Kunstwerken im Barockstil angefüllt, die hauptsächlich ein Werk von Bernini sind. Von der Vorhalle des Petersdoms kann man durch 5 Tore ins Innere der Kirche gelangen. Das linke der fünf Tore ist die Porta Santa. Diese Pforte ist von innen zugemauert und wird im Heiligen Jahr und in Jubeljahren vom Papst geöffnet, damit die Pilger durch sie hindurch eintreten und Ablass erhalten. Am Ende dieses Jahres wird sie wieder verschlossen. Im Inneren des Petersdoms gibt es noch 8 kleinere Nebenkuppeln, insgesamt ca. 800 Säulen und 390 Statuen aus Travertin, Marmor, Bronze und 45 Altäre.

Kommt man durch die Vorhalle in die Peterskirche, so betritt man das *Mittelschiff*. Es ist 45 Meter hoch (mit Ausnahme der Stelle, an der die Kuppel ist, dort ist es innen 120 Meter hoch), 27 Meter breit (mit Ausnahme des Bereichs, wo sich das Querhaus befindet, hier hat es eine Breite von 140 Metern.) und 187 Meter lang. Durch Pfeilerpaare wird es von den Seitenschiffen abgegrenzt. Die Decke ist ein mit Kassetten geschmücktes Tonnengewölbe, das auf jeder Seite von je drei Bögen, die von Pfeiler zu Pfeiler gehen, gestützt wird. Auf dem Boden des Mittelschiffs sind die Längsabmessungen der größten Kirchen der Welt mit Messingbuchstaben gekennzeichnet. Gemessen wurde von der Apsis her. Eine weitere Inschrift auf dem Boden der Basilika ist zum Gedenken an das von Papst Pius XI. ausgerufene Jahr der Erlösung 1933. Die bedeutendste Statue im Mittelschiff ist die des heiligen Petrus an der linken Seite des Mittelschiffs, neben dem ersten rechten Kuppelpfeiler.

Die *Seitenschiffe* wurden auch nach einem Entwurf von Carlo Maderno gebaut. Sie beinhalten mehrere Kapellen. Die Seitenschiffjoche werden jeweils von einer ovalen Kuppel überhöht. In den ersten zwei Jochen befinden sich Seitenkapellen. Die erste Kapelle rechts hinten ist die Cappella della Pietà, in der man die Pietà von Michelangelo bewundern kann. Sie wurde von 1498 bis 1500 von Michelangelo während seinem ersten Aufenthalt in Rom aus weißem Carrara–Marmor gestaltet. Im dritten Joch liegt die Sakramentskapelle, auf der gegenüberliegenden Seite die Chorkapelle. Bernini gestaltete den Tabernakel in der Sakramentskapelle mit vergoldeter Bronze.

Die *Confessio* bildet das Zentrum der Peterskirche. Es ist der Ort über dem Grab des heiligen Petrus. Eine Doppeltreppe führt hinunter, etwa auf die Höhe, auf der die Konstantinsbasilika stand. Dort ist die Kapelle, unter der sich das Grab des heiligen Petrus befindet. Am Fuße der Treppe sind Statuen der Apostelfürsten aufgestellt.

In der Mitte des durch die Kuppelpfeiler abgegrenzten Raumes, neben der Confessio, steht der *Papstaltar*. Dadurch ist er im Zentrum der Basilika. Er wird von einem Baldachin aus Bronze überdacht. Dies war Berninis erstes Werk in der Basilika. Seine Fertigstellung dauerte 9 Jahre (1624 – 1633) und er entspricht dem Barockstil des 17. Jahrhunderts. Der Baldachin wird von 4 Säulen getragen, die 20 Meter hoch und mit Wein- und Lorbeerranken verziert sind. Seine Decke hat eine zwiebelartige Konstruktion: Von den 4 Ecken aus gehen geschwungene Bronzerippen in die Mitte des Baldachins, wo sie eine vergoldete Weltkugel mit Kreuz tragen.

Die *Apsis*, ganz vorne im Mittelschiff bildet den Abschluss des Mittelschiffs. Auch hier befindet sich eines von Berninis Werken: Der Altar der Kathedra des Heiligen Petrus. Die Kathedra Petri ist ein Thronsessel, an dem Stücke aus Akazienholz zu sehen sind. Dies soll der Lehrstuhl sein, auf dem der heilige Petrus einst gesessen hatte. Bernini entwarf einen Thron aus Marmor, Bronze und vergoldetem Stuck, der seither aus Schutzhülle für die Kathedra Petri dient.

Hinter der Kathedra befindet sich ein ovales Fenster mit einer Taube, die von der Sonne erleuchtet wird, dem Symbol des heiligen Geistes.

Unter dem Mittelschiff des Petersdoms befinden sich die *vatikanischen Grotten* mit den Gräbern vieler Päpste und Regierenden. Einige frühchristliche Sarkophage und Architekurelemente stammen auch noch aus der Konstantinsbasilika. Unterhalb der Kuppelpfeiler befindet sich der Eingang zu den vatikanischen Grotten. Hier kann man die Überreste der Konstantinsbasilika sehen, da der Petersdom höher als die Basilika gebaut wurde. Deshalb kann man hier das Fundament der Konstantinsbasilika betrachten. Ebenso sind hier auch die Überreste des römischen Friedhofs zu sehen, in

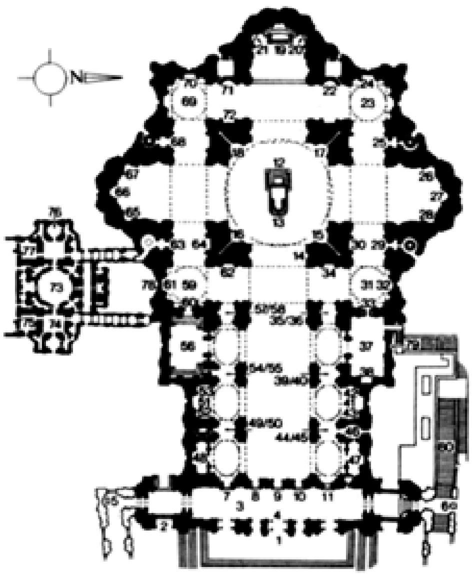


Abb. 7: Grundriss Petersdom (Quelle: Kunstführer Rom).

dem neben heidnischen Gräbern auch christliche Gräber gefunden wurden. Zudem wurden entlang der Mauer unterhalb der Stützpfeiler die Gräber der Päpste angelegt. 24 (Papst Johannes Paul II eingeschlossen) der insgesamt 164 Päpste wurden dort bestattet. Johannes Paul II. bekam die ehemalige Gruft von Johannes XXIII als letzte Ruhestätte.

4.5 Petersplatz

Nach dem Abschluss des Petersdomneubaus sah man die Notwendigkeit, vor der Petersbasilika einen Platz anzulegen, der größere Volksmassen fassen kann. Papst Alexander VII. führte die Gestaltung des Platzes fort, nachdem Papst Sixtus V. bereits den Obelisk, der einst im Zirkus des Caligula stand, in die Mitte des Platzes versetzen ließ. Er weihte ihn dem Heiligen Kreuz. Seither hat er die Inschrift:“ Christus vincit, Christus regnat, Christus imperat“. So bekam der Platz seine heutige Gestalt. Bernini bekam von Papst Alexander VII. die Bauleitung für die Gestaltung des Platzes. Seine Bauzeit betrug nur 10 Jahre (1657-1667). Der Petersplatz hat die Form einer Ellipse, die durch einen doppelten Säulengang, den Kollonaden eingegrenzt ist. Zum Petersdom hin geht der Platz in ein Trapez über, da die Kollonaden auf der Seite des Petersdoms schmaler geöffnet sind, als die Fassade der Kirche. Dadurch erscheint die breite Fassade schmaler, außerdem wird die Kuppel hervorgehoben. Die Kollonaden bestehen aus 284 dorischen Säulen, die in 4 Reihen angeordnet sind und 88 Pfeilern aus Travertin. Dadurch bekommen die Kollonaden eine Breite von 17 Metern. Insgesamt haben die Kollonaden eine Höhe von 21 Metern. Auf der Balustrade über den Säulen stehen 140 Statuen von Heiligen und Märtyrern, die alle 3 Meter hoch sind. Auf dem Petersplatz gibt es links und rechts des Obelisken eine Stelle, an der man, wenn man die Kollonaden betrachtet nur eine Säulenreihe anstatt der vier Säulenreihen sieht. Rechts und links der Obelisken stehen zwei Brunnen. Der rechte von ihnen wurde 1613 von Carlo Maderno entworfen, der linke Brunnen erst 64 Jahre später 1677 von C. Fontana. Wenn man auf den Petersplatz kommt, so fühlt man sich aufgenommen und umarmt von den geöffneten Armen der Kollonaden.

Abb. 8: Blick von der Kuppel auf den Petersplatz mit Obelisk, Kollonaden und den beiden Brunnen.

Abb. 9: Blick auf den Obelisk und die Kollonaden dahinter.

Literaturangaben

[1] Kunibert Bering: Die Peterskirche in Rom – Architektur und Baupropaganda, Verlag und Datenbank für Geisteswissenschaften, 2003
[2] Herbert Rosendorfer: Kirchenführer Rom, Edition Leipzig, 1999
[3] Merian live!: Rom, Graefe und Unzer Verlag GmbH München 2000
[4] Nicolò Suffi: Sankt Peter – Führer für Petersplatz und Basilika, Libreria Editrice Vaticana, 1999
[5] Baedecker: Rom, Baedecker-Verlag Ostfildern, 2002
[6] R. A. Staccioli: Rom – die Monumente einst und jetzt, Vision s.r.l. 2001
[7] Anton Henze: Kunstführer Rom, Reclam 1994
[8] Horst Bredekamp: Sankt Peter in Rom und das Prinzip der produktiven Zerstörung, Verlag Klaus Wagenbach 2002
[9] Arnoldo Mondadori, Fabio Ratti: Pilger in Rom – ein spiritueller Kunstführer, Verlag Schnell + Steiner GmbH Regensburg 2002
[10] Roma Sacra – Guide to the churches in the eternal city, Libreria Editrice Vaticana 2001

Beate Lohner, Richard Mohr

Augustus und die Macht der Bilder — Das Mausoleum des Augustus in Rom —

Augustus

Augustus – Begründer des römischen Kaisertums, Vorbild für Herrscher bis heute und bestimmende Figur des Übergangs der römischen Republik zum Prinzipat. Er gab einer ganzen Epoche ihren Namen, sein eigener Name wurde zum Herrschaftsattribut.

Abb. 1: Die Augustusstatue von Prima Porta, um 17 v. Chr., Vatikanische Sammlungen.

Augustus wurde im Jahre 63 v. Chr. in der kleinen Stadt Velitrae ca. 30 km südöstlich von Rom als Gaius Octavius geboren. Sein Vater, ebenfalls Gaius Octavius, gehörte dem Ritterstand an und schaffte den Aufstieg in den Senat. Seine Mutter Atia war eine Nichte von C. Julius Caesar. Diese Verbindung bestimmte das weitere Leben des jungen Octavius und das Schicksal Roms. Caesar selbst hatte keine Kinder und Octavius war sein nächster männlicher Verwandter. Nachdem Caesar die Alleinherrschaft errungen hatte, baute er seinen Großneffen zum Nachfolger auf, setzte ihn im Testament als Haupterben ein und adoptierte ihn. In der Folge nannte er sich Gaius Julius Caesar, den Beinamen Octavianus verwandte er selbst nie, da dieser an seine Adoption erinnerte (Bei einer Adoption erhält der ursprüngliche Namen die Endung -*ianus*.).

Als Caesar im Jahre 44 v. Chr. ermordet wurde, befand sich Octavius in Makedonien auf einer Art Bildungsreise. Die Entscheidung, das politische Erbe seines Großonkels anzutreten, fasste er erst in Rom, nachdem ihm die Bestimmungen des Testamentes bekannt geworden waren. Schnell gelang es ihm, die Parteigänger Caesars für sich zu gewinnen und Rückhalt in der Bevölkerung Roms zu erhalten. Doch seine Stellung war keinesfalls gesichert, verfügte er doch über keinen öffentlichen Auftrag und kein Amt. In den folgenden Jahren brach der Bürgerkrieg zwischen den mächtigsten Männern und Heerführern Roms erneut aus, und Augustus konnte sich erst nach einiger Zeit durchsetzen. Die Entscheidung fiel im Jahre 31 v. Chr. in der Seeschlacht vor Actium, als er die Flotte von Marcus Antonius und Cleopatra vernichtete und ein Jahr später deren Heer bei Alexandria schlug. Octavianus war nun Alleinherrscher im *Imperium Romanum*. Doch wie sollte die *res publica* regiert werden, welche Form sollte das Gemeinwesen erhalten? Dabei waren zwei Punkte unverrückbar und klar: Octavianus hatte nicht die Absicht, seine Macht wieder abzugeben, aber er konnte diese nicht wie Caesar als offene Monarchie ausüben. Das Ergebnis der Verfassungsreform wird heute als Prinzipat bezeichnet – Octavianus selbst prägte dafür den Begriff der *res publica restituta*.

In welchem Maße Augustus – dieser Ehrentitel wurde ihm 27 v. Chr. vom Senat verliehen – die folgenden Jahrzehnte prägte, soll und kann hier nicht Thema sein. Für unser Thema relevant ist erst wieder sein Tod im Jahre 14 n. Chr., denn damit rückt der Gegenstand dieses Aufsatzes in den Mittelpunkt. Am Tag an dem er bestattet wurde, kam das ganze öffentliche und private Leben in Rom und Italien zum Erliegen, hunderttausende Menschen beteiligten sich an den Trauerfeierlichkeiten. Diese selbst fanden ihren Abschluss mit der Beisetzung der Asche in seinem Mausoleum in Rom, einem monumentalen Grabmal, von Augustus bereits zu Lebzeiten erbaut.


Beate Lohner, Richard Mohr, vor dem Augustusmausoleum, Rom 4.3.2005.

In der unüberschaubaren Menge von historischen Monumenten in der Stadt Rom nimmt die letzte Ruhestätte des ersten Kaisers eine Ausnahmeposition ein: Eine vergessene Ruine inmitten faschistischer Profanarchitektur aus den 1930er Jahren. Es erinnert nichts an die – zumindest nominelle – Bedeutung des Ortes, ebensowenig lädt die Umgebung zum Verweilen ein.

Abb. 2: Das Augustusmausoleum heute mit den faschistischen Rahmenbauten.

Dieser Aufsatz versucht, der Geschichte des Augustusmausoleums nachzugehen. Neben der Baugeschichte soll ein Blick auf die Umstände seiner Errichtung geworfen werden, denn der Anlass und damit auch eine erste Deutung sind keineswegs unumstritten. Auch ist das Bauwerk nicht isoliert zu betrachten, denn zumindest zum Zeitpunkt der Beisetzung der Überreste des Kaisers war es eingebunden in ein Architekturensemble, das die Stellung des Herrschers über seinen Tod hinaus repräsentieren und bewahren sollte.

Das Grabmal der *Gens Iulia*

In Anlehnung an die hellenistische Repräsentationsarchitektur war der Bau landschaftsbeherrschend zwischen dem Tiber und der Via Flaminia schon zu Lebzeiten des Augustus aufgerichtet worden. Das Monument erhob sich inmitten eines ausgedehnten Parks, was seine Größe und herausgehobene Position betonte. Als Standort wurde das nördliche Ende des Marsfeldes gewählt. Auf diesem Areal unmittelbar vor den Toren Roms befanden sich die Ehrengräber römischer Bürger und bedeutender Frauen. Dieses Feld war seit alten Zeiten Staatseigentum gewesen und diente bis zum Ende der Republik Zwecken der Administration, des Exerzierens und des Sports. Der *Campus Martius* wurde erst ab dem frühen Prinzipat dichter bebaut.

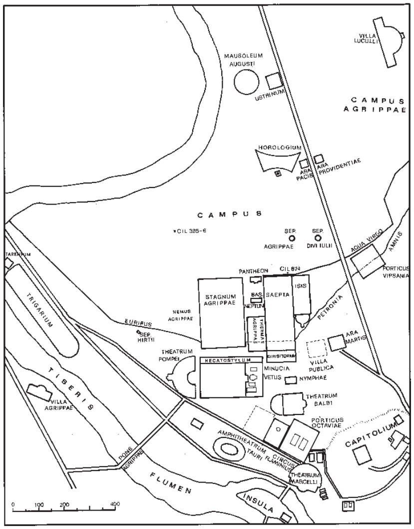


Abb. 3: Das Marsfeld zur Zeit des Augustus.

Konzipiert war das Grab von Anfang an als Familiengrab, in welchem die gesamte *Gens Iulia* begraben werden sollte. Hier wird die bewusste Gegenkonstruktion zu Marcus Antonius und Cleopatra deutlich. Denn Augustus knüpft an die alte, hoch angesehene römische Patrizierfamilie der Julier an, die sich auf Aeneas zurückführte – eine unmissverständliche Betonung der römischen Wurzeln des Prätendenten. Als erster wurde in diesem Grabmal 23 v.Chr. Marcellus, ein Neffe und potentieller Erbe des Augustus beigesetzt. Es folgte 12 v.Chr. Agrippa, der engste Weggefährte, Freund und Feldherr von Augustus, der auch seine Tochter Julia geheiratet hatte. Nach Drusus Maior, dem Sohn seiner dritten Frau Livia aus deren erster Ehe, der im Jahre 9 v. Chr. starb und seinen Enkeln Lucius (2 n. Chr.) und Gaius Caesar (4 n. Chr.), wurde schließlich im Jahre 14 n. Chr. Augustus selbst in seinem Mausuleum beigesetzt. Danach wurden noch 23 n. Chr. Drusus Minor, der Sohn Kaiser Tiberius, die Ehefrau von Augustus Livia und Tiberius (37 n. Chr.) hier beigesetzt. Ob auch Claudius und Vespasian hier bestattet wurden, ist unbekannt. Kaiser Caligula ließ die Asche seiner Mutter Vipsania Agrippina und seiner Brüder Nero (nicht der Kaiser!) und Drusus Caesar in das Mausoleum bringen. Hingegen wurde Kaiser Nero ebenso wie schon zuvor schon Julia, die Tochter des Augustus, aus dem Herrschergrab ausgeschlossen.

Das Mausoleum und andere monumentale Bauten, Statuen und Inschriften standen letztlich in einem nicht aufzulösenden Widerspruch zur offiziellen Rhetorik der *res publica restituta*. Augustus wollte und konnte nicht offen als Monarch, als König und Dynast auftreten, tat aber genau dies beispielhaft mit seinem Mausoleum. Offiziell hieß das Grabmal *tumulus Iuliorum*. Das klang zwar altrömisch, unterstrich aber in Anbetracht seiner Monumentalität und Nutzung den dynastischen Anspruch des Erbauers. Und bei jedem feierlichen Begräbnis wurde dies aufs Neue verdeutlicht und vorgeführt.

Das Mausoleum

Die Ruinen des Bauwerkes liegen heute einige Meter unter dem Straßenniveau und sind eingerahmt von faschistischer Architektur. Sie stehen nicht mehr frei wie zur Zeit ihrer Erbauung, und dennoch entfalten die Mauern – die Mauer des äußeren Zylinders ist immer noch ca. neun Meter hoch – eine gewaltige und beeindruckende Wirkung.

Das Grabmal hat durch jahrhundertelange Plünderungen so stark gelitten, dass heute sogar eine zeichnerische Rekonstruktion schwer fällt. So liegen verschiedene Angebote zur Rekonstruktion vor, die sich im Kern ähneln, aber im Detail sehr stark divergieren. So lassen der erkennbare Befund und frühere Zeichnungen eine aus mehreren Mauerringen zusammengesetzte Anlage erkennen. Über den Aufriss allerdings herrscht nach wie vor Unsicherheit. Erste systematische Untersuchungen größerer Teile der antiken Anlage wurde in den Jahren 1926 und 1927 vorgenommen. Hierbei wurden sogar einzelne Stollen bis zum Kern des Baus gegraben, um seine innere Struktur zu erfassen.

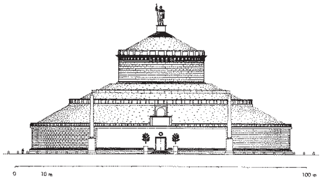


Abb. 4: Das Augustusmausoleum, Rekonstruktionszeichnung nach Henner von Hesberg.

Im Folgenden orientieren wir uns an den Ausführungen Henner von Hesbergs und Paul Zankers. Der gewaltige Rundbau hatte einen Durchmesser von ungefähr 87 Metern und eine Gesamthöhe von über 45 Metern. Seine Gestalt wird bis heute durch insgesamt 5 ineinanderliegende Zylinder bestimmt. Davon sind zwei, der äußere und der vierte, in besonderer Weise formgebend. Diese gewaltigen Mauerringe waren mit Marmor und Travertin verkleidet und im Gegensatz zu den anderen stark hervorgehoben und in die Höhe gezogen. Zwischen diesen Ringen wurde die Erde schräg aufgeschüttet und mit Bäumen bepflanzt, so dass ein „Grabhügel“ entstand. Dieser Erdkegel erweckte die Vorstellung eines künstlichen Hügels mit Gartenanlage.

Der stoische Historiker und Geograph Strabon (64/ 63 v. Chr. — 23 n. Chr.) beschrieb das Bauwerk kurz nach der Vollendung (Strabon 5, 3, 9.):

„Am sehenswürdigsten ist das sogenannte Mausoleion, ein über einem Sockel aufgeführter großer Hügel am Fluss. Er ist bis zur Spitze mit immergrünen Bäumen bepflanzt. Oben steht das bronzene Standbild des Kaisers Augustus. Im Hügel sind die Gräber für ihn, seine Verwandten und Freunde. Dahinter befindet sich ein großer Hain mit herrlichen Wegen, in dessen Mitte eine Erhöhung (*ustrinum*), wo der Leichnam des Augustus verbrannt wurde.“

Diese spezielle Gestalt weckte bei den Zeitgenossen Assoziationen mit den Heroengräbern der Frühzeit, ein gelegentlich auch von alten und reichen Familien genutzter Effekt, um ihren besonderen Rang herauszustellen. Auch Augustus knüpfte bei seinem Projekt an diesen archaischen Geschmack der Menschen an, jedoch stieß er in ganz andere Dimensionen vor. Schon in vorrömischer Zeit galt der Erdkegel als eigentliches Zeichen für ein Grab, und der Bewuchs mit Bäumen schuf die Vorstellung und Aura eines heiligen Hains und sakralisierte den Ort.

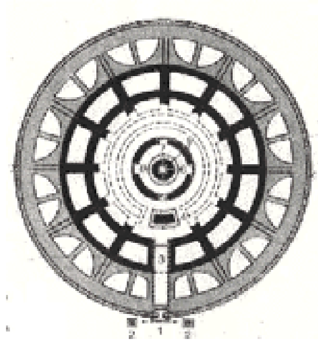


Abb. 5: Der Grundriß des Augustusmausoleums.

Die eigentliche Grablege befand sich tief unter dem Grabhügel im Inneren des Monuments. Hierhin gelangte man durch den noch heute erhaltenen gewaltigen Eingang im Süden des Rundbaus, der direkt und schnurgerade in den Innenraum führte. Von der inneren Halle gingen 12 radial angeordnete Räume ab. Diese bildeten eine Art Vorhalle, an deren Stirnseite sich eine Mauer mit zwei Durchgängen befand. Dahinter waren die eigentlichen Grablegen, hier wurden die Urnen mit der Asche der Verstorbenen in Nischen beigesetzt.

Ebenso wie die Außenseite mit Marmor und Travertin verkleidet war, wurden auch die Mauern im Inneren entweder mit diesen Steinen ausgeschmückt, oder mit Tuffstein verkleidet. Dort wurden nach und nach weitere Inschriften befestigt, die Taten, *pietas* und *virtus* der Verstorbenen priesen, sowie Skulpturenschmuck angebracht.

Der Grabhügel besaß nur einen einzigen Eingang. Dieser wurde durch zwei Bronzetafeln flankiert, auf denen der Tatenbericht des Augustus (*res gestae*) zu lesen war. Davor standen zwei Obelisken aus rosa Granit. Sie dienten als Begrenzung und zugleich Markierung eines bestimmten, rechtlich hervorgehobenen Bezirks und standen somit an den Eckpunkten des Monuments. Die beiden Obelisken vom Augustusmausoleum stehen heute, so die Vermutung, zum einen auf der Piazza dell´ Esquilino vor der Basilika Santa Maria Maggiore und zum anderen vor dem Quirinalspalast.

Die vergangene Zukunft

Mit Nerva wurde im Jahr 98 n. Chr. der letzte römische Kaiser im Augustusmausoleum beigesetzt. Nach dem Untergang des *Imperium Romanum* blieb es ungenutzt und verfiel. Im 12. Jahrhundert baute die römische Patrizierfamilie der Colonna das Mausoleum zu ihrem Kastell aus, um in den Adelskämpfen in Rom über eine sichere Zufluchtstätte zu verfügen. Diese Adelssippe stieg zu Beginn des 13. Jahrhunderts zu einer der bedeutendsten und mächtigsten Familien in Rom und im Latium auf und war in die Auseinandersetzungen um den Heiligen Stuhl verwickelt, der in jenen Jahren zu einem Beute- und Prestigeobjekt des römischen Adels verkommen war. Unter Papst Gregor IX. (1227-1241) kam es jedoch zum Bruch der kaiserfreundlichen Colonna mit dem Papsttum, und Gregor ließ die Mausoleumsfestung schleifen.

Seit der Renaissance diente die nun in ihrem Zentrum offen liegenden Ruine als Villa stadtrömischen Adels, dann als Theater, Weinberg und Stadtgarten. Ende des 19. Jahrhunderts stellte der italienische Staat, der mittlerweile Eigentümer des Objekts geworden war, dem Bildhauer Chiaradina das Monument zu Verfügung, welcher in den Innenräumen sein Atelier einrichtete. Dort schuf dieser unter anderem die Reiterstatue Vittorio Emanueles II. für das italienische Nationaldenkmal „Vittoriano“ (vgl. Mohr, Richard: „Dann reitet mein König wohl über mein Grab“ – Inszenierung von Nation am Beispiel des Monumento Nazionale Vittorio Emanuele II. in Rom, in: Romseminar 2003. Regel und Ausnahme, hrsg. von Rainer Nagel et al.; Tübingen 2003.).

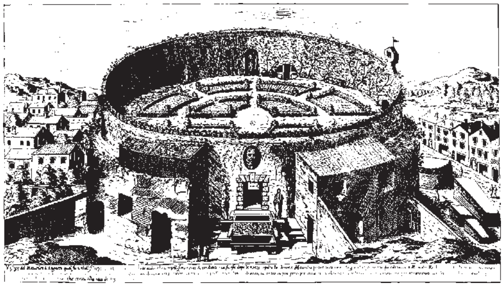


Abb. 6: Das Augustusmausoleum im Jahre 1575, Zeichnung von Etienne Du Pérac.

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts ging die Ruine in den Besitz der Stadt Rom über und diente als Konzerthalle. Im Zuge der Machtergreifung der Faschisten in Italien 1922 erwuchs ein stark gesteigertes Interesse an der Antike. Mussolini und seine Anhänger sahen sich als die wahren Nachfolger der antiken römischen Weltherrschaft und strebten eine Anknüpfung an diese „glorreiche und mächtige Zeit“ an. Da nimmt es nicht Wunder, dass seit den 1920er Jahren auch am Augustusmausoleum erste archäologische Untersuchungen angestrengt wurden. Bis dahin war das Monument fest in die urbane Baustruktur eingebunden gewesen und die städtische Bebauung reichte bis an seine Außenmauern heran. Ab dem Jahre 1936 wurde der Grabhügel, bzw. was noch davon übrig war, freigelegt und in die heutige Situation gebracht. Die umliegenden und angrenzenden Häuser wurden abgerissen und der heutige freie quadratische Platz mit den faschistischen Rahmenbauten geschaffen. Dies zeigt, wie der italienische Faschismus bewusst danach strebte, die antiken Stätten zu besetzen, eben auch ganz konkret und materiell, um sich als Erbe und Erneuerer in eben diese Tradition zu stellen. Die propagierte Nachfolgeschaft materialisiert sich somit im Augenschein und in der symbolischen Überhöhung des neuen *Dux Italiae*.

Romidee und Siegesdenkmal: Eine neue Zeit

Caesar hinterließ Augustus eine ganze Reihe unvollendeter Bauprojekte, darunter die *Basilica Julia*, die neue *Curia* und anderes mehr. Doch machte dieser sich nicht an die Vollendung dieser Bauten, sondern er konzentrierte sich auf zwei Monumente, die vor allem seiner Selbstverherrlichung dienten: den Apollotempel und das Mausoleum.

Das Grabmal wurde zwischen 32 und 28 v. Chr. errichtet, also zu einer Zeit, als die Auseinandersetzung mit Marcus Antonius noch keinesfalls entschieden war, bzw. als Augustus seine Macht noch nicht konsolidiert und in die neue Gestalt transformiert hatte. Warum baut der gerade 30 Jahre alt gewordene Augustus sein Grabmal? Und warum in Rom?

Entscheidend für die Rekonstruktion seiner Intention und damit der Freilegung einer ersten Bedeutungsebene ist nicht so sehr der Zeitpunkt des tatsächlichen Baubeginns oder der Fertigstellung sondern vielmehr der Zeitpunkt der Propagierung. Die neuere Forschung ist sich weitgehend einig, den Entschluss zum Bau und seine Konzeptionierung im Zusammenhang mit der (widerrechtlichen!) Eröffnung des Testamentes von Marcus Antonius durch Augustus zu sehen. Für das Grabmalprojekt relevant ist darin der Wunsch von Marcus Antonius, in Alexandrien neben Cleopatra begraben zu werden. Denn diese Bestimmung diente Marcus Antonius´ Gegnern als Beweis dafür, dass dieser Rom verraten und die Hauptstadt des Reiches nach Alexandrien verlegen wolle, um eine hellenistische Despotie zu errichten. In Anbetracht der riesigen Ausmaße des Mausoleums, aber eben auch seiner unzureichenden Ausgestaltung, scheint für Paul Zanker die Entschlussfassung unmittelbar nach dem Sieg bei Actium im Jahre 31 v. Chr. am plausibelsten. In dieser Interpretationslinie erscheint das Grabmal als Manifestation der Treue des Augustus zu Italien, zu Rom und zur Idee der Einheit von Stadt und Weltkreis. Es ist damit eine Demonstration des Römischen, ein Bekenntnis zur Tradition und zur römischen Sache, eine Darstellung des Römischen bei Augustus und eine bewusste Gegenüberstellung zum „Hellenistisch-orientalischen“ oder Despotischen (so zumindest die anti-antonianische Propaganda) bei Marcus Antonius. Das Mausoleum erhält dadurch in seiner Entstehung eine eindeutige anti-antonianische Bedeutung: Augustus steht für Rom und den Erhalt der Welt, was in der Vorstellung der Römer untrennbar verknüpft ist mit der Einheit von *orbis terrarum* und *orbis romanus*. Das Fortbestehen des Weltenkreises ist eben existentiell an Rom als *caput mundi* gebunden – eine Vorstellung übrigens, die im Christentum ebenfalls zu finden ist und in der Abfolge und Propagierung der verschiedenen Roms konzeptionell gefasst wurde. Das Mausoleum ist damit in seiner Entstehung für Augustus ein wichtiges Mittel im Kampf gegen den Widersacher im Osten und zur Gewinnung der stadtrömischen und italischen Bevölkerung.

Gesichert ist jedenfalls, dass im Jahre 28 v. Chr. die zum Bauwerk gehörenden großen Parkanlagen der Bevölkerung übergeben werden konnten, zu einem Zeitpunkt also, als Augustus längst die Alleinherrschaft errungen hatte und sein Widersacher in Alexandria begraben war. Mochte der konkrete Anlass für den Bau die Auseinandersetzung mit Marcus Antonius und Cleopatra gewesen sein, nach seiner Vollendung musste er jedoch sehr viel weiter gehende Assoziationen hervorrufen.

Das Grabmal war nun in erster Linie eine Demonstration der Größe und Macht seines Erbauers. Von Anfang an wurde der das gesamte Marsfeld beherrschende Grabhügel „Mausoleum“ genannt. In diesem Ausdruck zeigt sich das Erstaunen und die Bewunderung über das riesige und bis dahin unbekannte Ausmaß eines solchen Baus. Der Name ist aber auch bewusst gewählt worden. Das berühmteste Grabmal der Antike überhaupt war das des Mausolos in Halikarnaß und von seinem Namen leitet sich der Begriff „Mausoleum“ ab. Das Grab dieses karischen Dynasten aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. galt als eines der sieben Weltwunder und war das einzige mit dem Augustusmausoleum vergleichbare Bauwerk seiner Art. Durch diese Namensgebung versetzte sich der Princeps in die Nachfolge der hellenistischen Herrscher und in die Tradition der Alleinherrscher. Das riesige Monument erhält nun eine dynastische Konnotation, denn von Anfang an sollten dort neben Augustus auch die Angehörigen seiner Familie und seine engsten Weggefährten ihre letzte Ruhe finden.

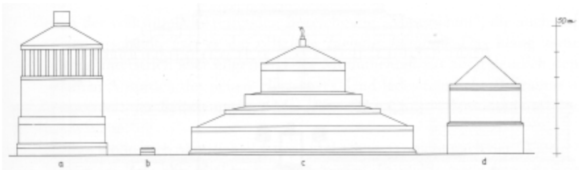


Abb. 7: Größenvergleich, von links nach rechts: Grabmal des Mausolos (4. Jahrhundert v. Chr.); Staatsgrab des Konsuls A. Hirtius (43 v. Chr.); Augustusmausoleum; Mausoleum der Caecilia Metella (Ende 1. Jahrhundert v. Chr.).

Eine weitere Traditionslinie scheint ebenfalls aus dem Osten in das Baukonzept eingeflossen zu sein. Das große Vorbild antiker Herrscher, der jugendliche und heroenhafte Eroberer der Welt Alexander der Große scheint ebenfalls Vorbild gewesen zu sein. Augustus war zum Zeitpunkt seines Sieges etwa so alt wie Alexander als dieser seinen Eroberungszug ans Ende der Welt abgeschlossen hatte. Dessen Grabmal befand sich in Alexandria in Ägypten und es gilt als sicher, dass Augustus es besucht hat. Und weiter ist davon auszugehen, dass es von der Gestalt her ein kreisrunder Grabhügel gewesen ist, Augustus sich also auch in diese Linie stellte. Dieser Sachverhalt erhält zusätzliche Plausibilität, wenn man bedenkt, dass der Entschluss zum Bau im Osten während der entscheidenden Auseinandersetzung mit dem Herrscher des Ostens Marcus Antonius gefallen war.

Eine eher altrömische Traditionslinie des Monuments mit seiner äußeren Gestalt, die sich an einen Grabhügel anlehnt, führt zurück zu den Etruskern. Denn auffallend ist doch diese bestimmte Silhouette, die in deutlichem Kontrast zu den zeitgenössischen Formen der Gräber steht. Das Mausoleum des Augustus hingegen weist zumindest seiner Form nach deutliche Ähnlichkeit zu einem *tumulus* auf, dem Grabhügel der Etrusker.

Augustus knüpfte also an dynastische Traditionen an, indem er selbst durch Adoptionen und Errichtung der Grablege die alte Aristokratenfamilie der Iulier erneuerte, stellte sich in eine Linie mit den antiken Heroen und nahm altitalisch-etruskische Elemente aristokratischer Totenrepräsentation auf. Es ist davon auszugehen, dass die Zeitgenossen und Adressaten dieser Bildersprache wussten, auf was der neue Princeps anspielte. Dieser Anspruch war neu und unerhört. Dass er dennoch hingenommen wurde, zeigt die Position des „Friedenstifters“, andererseits aber auch, dass die Zeit reif war für einen Augustus und seine Herrschaft. Denn dass dies in Konkurrenz zur offiziellen Politik der *res publica restituta* stand, war den Römern ebenso klar.

Das Mausoleum besitzt keine eindeutige Aussage und auch keine kohärente Gestalt. Dies ist einerseits auf die Umstände seiner Entstehung zurückzuführen: Geplant und propagiert wurde es im Umfeld der Schlacht bei Actium und dem darauf folgenden Siegestaumel und der damit verbunden Hektik. Die andere Sicht drängte sich erst nach der Erringung der Alleinherrschaft in den Vordergrund, dafür aber umso stärker und dauerhafter. Bekrönt war der *tumulus Iuliorum* durch eine bronzene Kolossalstatue des Augustus. Der stufenartige Grabhügel trat nunmehr in seiner Bedeutung als romorientierte Grabstätte in den Hintergrund und fungierte als bloßer Unterbau, als ein überdimensionales Podest für das riesige Standbildnis des Siegers. In Verbindung mit den ägyptischen Obelisken wurde aus dem Grabmal ein Siegesdenkmal mit einer raumbeherrschenden Subkonstruktion aus den beiden sichtbaren, weiß leuchtenden Zylindern, eine imposante Wirkung die durch die parkartige Umgebung noch gesteigert wurde.

Das Mausoleum war von nun an eingebunden in die Bildersprache und Repräsentation der Herrschaft des Princeps. Augustus verband Herrschen mit Mythos, und eben dieser Mythos schöpfte seine Kraft aus einer feingliedrigen und elaborierten Bilderwelt. In den folgenden Jahren wurde um das Grabmal ein Architekturensemble von unerhörtem Anspruch und mit bis ins unermessliche gesteigerter Aussagekraft geschaffen. In den Jahren von 13 v. Chr. bis 9 v. Chr. ließ Augustus in unmittelbarer Nähe seines Grabmals die *Ara Pacis Augustae* errichten. Und schon zuvor war gegenüber eine riesige Sonnenuhr installiert worden, das *Solarium* oder *Horologicum Augusti*. Im Zusammenspiel dieser drei Architekturmonumente wird die neue Zeit versinnbildlicht, die mit dem ersten Princeps anbrach und an deren Verewigung dieser seit Actium arbeitete.

Der Friedensaltar ist eines der wichtigsten Kunstwerke der frühen Kaiserzeit. Er wurde im Jahre 1568 wiederentdeckt, als neun Marmorblöcke mit kunstvollen Reliefs gefunden wurden. Allerdings wurden sie erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts mit dem Friedensaltar des Augustus identifiziert, woraufhin dann erste systematische Grabungen begannen. Der Altar feiert den Frieden, den Augustus dem Reich brachte, indem er durch seine Siege die Bürgerkriege beendete hatte. Im Vergleich zu anderen antiken Friedensaltären, insbesondere dem Pergamonaltar, ist die *Ara Pacis Augustae* von bescheidenem Ausmaß. Die Anlage besteht aus einem rechteckigen 11 Meter auf 10 Meter großen Bezirk, der auf einem 1,30 Meter hohen Podium steht, zu dem eine Treppe hinaufführt. Die den

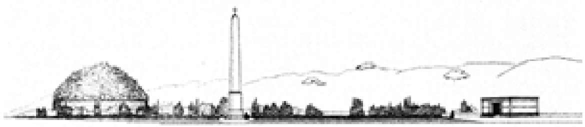


Abb. 8: Rekonstruktion der Gesamtansicht von Augustusmausoleum, Obelisk und *Ara Pacis.*

Bezirk abschließende Umfassungsmauer ist innen und außen mit Reliefs verziert. Sie zeigen an den beiden Längsseiten eine breit angelegte Opferprozession, die Augustus mit seinen Angehörigen und der gesamten *domus principis* darstellen und die *pietas* des Princeps feiern, welcher ja die *pax Augusta* zu verdanken war. Die Felder neben den beiden Türen stellen auf der Vorderseite das Opfer des Aeneas in Lavinium sowie Romulus und Remus dar. Auf der Rückseite ist die auf Waffen sitzende Göttin Roma und die mit Attributen des Friedens und des Wohlstandes ausgestattete Göttin Italia zu sehen.

In nur ca. 90 Metern Entfernung vom Friedensaltar erhob sich ein ungefähr 30 Meter hoher Obelisk. Er wurde während der Bauzeit des benachbarten Altars aus Ägypten nach Rom gebracht und feierte die Eingliederung der Provinz *Aegyptus* in das *Imperium Romanum* im Jahre 30 v. Chr. durch Augustus. Doch war dies nicht der einzige und nicht einmal der entscheidende Grund seiner Errichtung an dieser Stelle. Denn der von einer Kugel bekrönte Obelisk fungierte als Schattenwerfer und riesiger Zeiger einer Sonnenuhr gewaltigen Ausmaßes. Dieses *Solarium* umfasste neben der Uhr noch einen Kalender, dessen Liniennetz sich über etwa 400 Meter ausbreitete. Von seinen Erforschern wurde dieses Bauwerk als die größte Uhr und der größte Kalender aller Zeiten bewertet.

Die tiefe Symbolik und der propagandistische Gehalt des Ensembles erschließt sich nun insbesondere aus dem Zusammenspiel der drei erwähnten Bauten. Der Archäologe Edmund Buchner beschreibt dies wie folgt (Buchner, Edmund: Die Sonnenuhr des Augustus; Mainz 1982; S. 37.):

„Welch eine Symbolik! Am Geburtstag des Kaisers (...) wandert der Schatten von Morgen bis Abend etwa 150 Meter weit (...) genau bis zur Mitte der Ara Pacis*; es führt so eine direkte Linie von der Geburt dieses Mannes zu* Pax*, und es wird sichtbar demonstriert, dass er* natus ad pacem *ist. Der Schatten kommt von einer Kugel, und die Kugel (...) ist zugleich wie Himmels- so auch Weltkugel, Symbol der Herrschaft über die Welt, die jetzt befriedet ist. Die Kugel aber wird getragen von dem Obelisken, dem Denkmal des Sieges über Ägypten (und Marcus Antonius) als Voraussetzung des Friedens. An der Wendelinie des Capricorn, der Empfängnislinie des Kaisers, fängt die Sonne wieder an zu steigen. Mit Augustus beginnt also – an* Solarium *und* Ara Pacis *ist es sichtbar – ein neuer Tag und ein neues Jahr: eine neue Ära, und zwar eine Ära des Friedens mit all seinen Segnungen, mit Fülle, Üppigkeit, Glückseligkeit.“*

Literatur

[1] Buchner, Edmund: Die Sonnenuhr des Augustus; Mainz 1982.
[2] Christ, Karl: Geschichte der römischen Kaiserzeit; 3. Aufl., München 1995.
[3] Eck, Werner: Augustus und seine Zeit; München 1998.
[4] Hesberg, Henner von/ Panciera, Silvio: Das Mausoleum des Augustus. Der Bau und seine Inschriften (Bayrische Akademie der Wissenschaften, Phil.-Hist. Klasse, Abhandlungen N.F. 108); München 1994.
[5] Kornemann, Ernst: Mausoleum und Tatenbericht des Augustus; Leipzig 1921.
[6] Nagel, Rainer et al. (Hrsg.): Romseminar 2003. Regel und Ausnahme; Tübingen 2003.
[7] Rader, Olaf B.: Grab und Herrschaft. Politischer Totenkult von Alexander dem Großen bis Lenin; München 2003.
[8] Zanker, Paul: Augustus und die Macht der Bilder; 3. Aufl., München1997.

Marc-Oliver Pahl

Documentatio spectaculi

Auch zum Romseminar 2005 gibt es eine **Webseite**:

Auf der Seite finden sich diesmal neben vielen **Bilder**n auch **Ton**- und **Videodokumente**, die ein wenig von der tollen Atmosphäre in Rom zu vermitteln suchen.

Es gibt von fast jedem Vortrag einen kurzen Videoausschnitt und auch der $\mathbb{Q}\mathbb{N}\int\mathbb{T}$-Abend und die Kompositionen von Herrn Spring finden sich in Auszügen wieder.

Die Seite lässt sich über die AGFA-Seite

http://www.fa.uni-tuebingen.de

oder direkt über

http://www.fa.uni-tuebingen.de/extern/RomSem/2005/

ansprechen.

Ein Abzug der Seite auf CD ist bei der AGFA zu erhalten.

Produktion: Marc-Oliver Pahl 2005
http://www.m-o-p.de