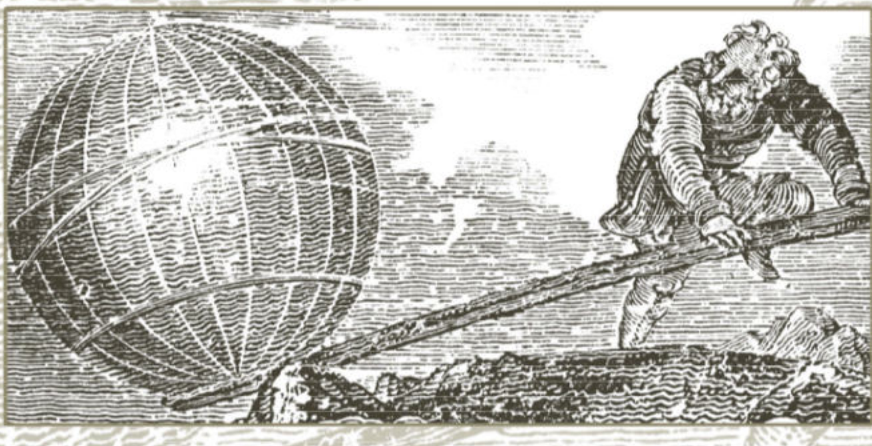
HARD PROBLEMS

WARUM SICH DIE BESCHÄFTIGUNG MIT SCHWEREN PROBLEMEN LOHNT.

PERSPEKTIVEN AUS MATHEMATIK UND INFORMATIK



ROMSEMINAR IM SS 2022
ROMWOCHE 25.9. - 2.10.2022

Eberhard Karls Universität Tübingen – Rainer Nagel

Universität Siegen – Gregor Nickel

HTW Hochschule für Technik und Wirtschaft Dresden, University of Applied Sciences – Markus Wacker

CAU Christian-Albrechts-Universität zu Kiel – Markus Haase

Michael Korey

Hard Problems

Romseminar 2022

Die Vorträge

Vorwort

Du darfst die Parallelen auf jenem Wege nicht versuchen; ich kenne diesen Weg bis an sein Ende – ich beschwöre Dich bei Gott! Lass die Lehre von den Parallelen in Frieden (…) sie kann Dich um all' Deine Muße, um die Gesundheit, um Deine Ruhe und um Dein ganzes Lebensglück bringen.

Mit diesen Worten warnt der große ungarische Mathematiker Farkas Bolyai (1775–1856) seinen ebenfalls der Mathematik verfallenen Sohn Janos (1802–1860) eindringlich davor, sich weiter mit der Suche nach einem Beweis des Euklidischen Parallelenpostulats zu befassen. Die Ironie der Geschichte ist bekannt: Janos hält sich nicht an die väterliche Warnung und löst das jahrtausendealte Parallelenproblem auf unerwartete Weise durch (Er)finden einer nichteuklidischen Geometrie. An dieser Episode zeigen sich besonders prägnant: die andauernde Bemühung der Mathematik um harte Probleme, die persönliche Verzweiflung über das Misslingen aller Versuche und schließlich die eigentümliche Fruchtbarkeit unlösbarer mathematischer Probleme.

Auch wenn manche meinen, die gesamte Mathematik und auch Bereiche der Informatik bestünden ausschließlich und unterschiedslos aus schwierigen Problemen, die für Experten auf wundersame Weise ganz leicht lösbar seien, so zeigt doch bereits ein flüchtiger Blick in ihre jeweilige Geschichte, dass die »Härteskala« eines Problems oder einer Konstellation von Problemen für die Entwicklung der Mathematik und Informatik von größter Wichtigkeit ist. Ein erheblicher Teil der mathematischen Forschung ist gerade dem Bestreben gewidmet, hinreichend schwierige, aber dennoch lösbare, also interessante, jedoch nicht hoffnungslose Aufgaben zu formulieren.

Schaut man über den Forschungsalltag hinaus, dann erweisen sich häufig auch die »unlösbar« schwierigen Probleme als extrem fruchtbar für die Weiterentwicklung der Mathematik. Hier nur einige wenige Beispiele.

- Die klassischen Konstruktionsprobleme der Geometrie – wie die Quadratur des Kreises, die Verdoppelung eines Würfels oder die Drittelung eines Winkels, jeweils nur mit Zirkel und Lineal – sind allesamt unlösbar. Sie haben aber über Jahrtausende zu reichhaltiger Mathematik angespornt.

- Leicht zu formulierende Fragen wie das Parallelenproblem oder die Suche nach einer allgemeinen Lösungsformel für Polynome höherer Ordnung haben durch ihre Unlösbarkeit zu ganz neuen Forschungsgebieten, nämlich zur nichteuklidischen Geometrie und Galoistheorie geführt.

- Die Nichtentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese, also des ersten von David Hilberts berühmten offenen Problemen um 1900, hat zu einem vertieften Verständnis der Struktur der reellen Zahlen und der Mengentheorie geführt.

Im Rahmen der Informatik entsteht zudem die Möglichkeit, den Aufwand beim algorithmischen Lösen eines Problems zu klassifizieren; die »Schwierigkeit« eines Problems kann also wiederum mathematisch gemessen werden. Ein berühmtes offenes Problem in diesem Zusammenhang ist durch die Gleichung $P = NP$ charakterisiert. Dieses noch ungelöste Problem führt die Liste der sieben vom Clay Institute im Jahre 2000 aufgestellten »Millennium-Probleme« an, für deren Lösung jeweils eine Million Dollar angeboten wird. Das Knacken harter Nüsse kann heute also sogar profitabel sein!

Im Romseminar wurde der Blick auch über den engeren Bereich von Mathematik und Informatik hinaus geweitet. Im gesellschaftlichen Kontext nehmen wir derzeit Herausforderungen wahr, die sich durchaus unter die Überschrift »harte Probleme« stellen lassen: Klimawandel und Nachhaltigkeit, Migration, Fragen der (sozialen bzw. internationalen) Gerechtigkeit, die Suche nach einer globalen Rechts- oder Friedensordnung und ganz aktuell der Umgang mit Pandemien. Hier zeigt gerade auch der öffentliche Diskurs – von populistischen Parolen bis zu Verschwörungstheorien –, dass immer wieder scheinbar ganz einfache Lösungen für harte Probleme angeboten werden. Und es erweist sich nun wiederum als schweres Problem, mit diesen fundamentalistischen Positionen in kluger Weise umzugehen. Häufig stehen wir bei diesen und weiteren komplexen Situationen vor der Frage, wie auf der Basis unzureichender Information und unter Zeitdruck eine legitime und vielleicht sogar eine kluge Entscheidung zu finden ist.

Schließlich zeigt ein Blick in die Geschichte, wie verschiedenste Kulturen auf verblüffende Weise in der Lage waren, schwierigste Probleme zu lösen. Dabei ist es ein faszinierendes Gebiet der Archäologie, Geschichtswissenschaft bzw. Soziologie, diesen Umgang möglichst adäquat zu rekonstruieren. Bis heute ist es eine Herausforderung zu analysieren, wie »prähistorische« Gesellschaften ein Monument wie Stonehenge errichten konnten, wie antike Völker in heutigen Wüsten ein Bewässerungssystem aufbauen und Gärten gestalten konnten oder auch wie diverse Hochkulturen Kalender entwickelt haben, die subtile Himmelsverläufe erstaunlich genau nachbilden.

Das Romseminar 2022 hat sich dem Thema »schwere Probleme« auf vielen unterschiedlichen Ebenen genähert. Insgesamt konnten wir versuchen, bei der Beschäftigung mit »Hard Problems« teilweise verblüffend und faszinierend einfache Lösungen kennenzulernen, eine kritische Urteilsfähigkeit gegenüber »zu einfachen« Lösungen zu entwickeln und vom virtuosen, oft zugleich frustrierenden und fruchtbaren Umgang mit unlösbaren Problemen zu lernen. Das vor mehr als einem Vierteljahrhundert in Tübingen begründete Romseminar wurde nun bereits zum fünfzehnten Mal in Kooperation der Hochschulen in Dresden, Siegen und Tübingen veranstaltet. Der vorliegende Band enthält die schriftliche Ausarbeitung des größten Teiles der im Romseminar gehaltenenen studentischen Vorträge und repräsentiert so die Vielfalt der Themen.

Im Jahr 2022 stand auch das Romseminar nach wie vor im Zeichen der Corona-Pandemie: Nachdem eine Exkursion im Jahr 2021 überhaupt nicht möglich war, hatten wir ursprünglich nach einem Jahr Pause unseren »traditionellen« Termin im Februar 2022 geplant. Diesen mussten wir dann kurzfristig auf September verlegen. Immerhin konnten wir auf diese Weise Rom in einer deutlich milderen Jahreszeit als sonst genießen, und wir hatten die Gelegenheit zu einer »Exkursion in der Exkursion«: Den letzten Seminartag konnten wir in Genzano am Lago di Nemi verbringen, wo wir unser Seminarprogramm im *Palazzo Sforza-Cesarini* beendet haben und zum Ausklang eine beeindruckende Wanderung um den Lago di Nemi unternahmen, samt »Rinfresco« davor und üppigem »Cena sociale« danach. Für die wunderbare Organisation vor Ort danken wir unseren langjährigen Freunden und Kollegen Dr. Carla Perazzoli und Prof. Dr. Klaus Engel.

In der Stadt Rom konnten wir in diesem Jahr eine besonders breite Palette römischer Institutionen besuchen. Zunächst in der *Villa del Priorato di Malta* führte uns Ivo Graziani, Kabinettschef des Großhospitaliers, in einem fesselnden Gespräch in die Welt der harten Probleme des souveränen Maltesordens, einer weltweit agierenden humanitären Hilfsorganisation, ein. Auch in der *Bibliotheca Hertziana* waren wir nicht zum ersten Mal zu Gast. Die Kunsthistorikerin Laura Valterio zeigte uns in einer faszinierenden Führung das Programm der Fresken in der *Villa Zuccari* und die gelungene architektonische Verschränkung von Manierismus und Moderne im Neubau des Max-Planck-Instituts für Kunstgeschichte. Digitalisierung und das Nachdenken über die Funktion verschiedener Medien spielen auch für diese Wissenschaft eine zunehmende Rolle; es war daher eine große Bereicherung, dass wir einen wunderbaren Vortrag von Dr. Sietske Fransen in unser Seminar-Programm integrieren durften. Über Führung und Vortrag hinaus waren wir zudem noch zu einem Kaffee-Empfang der Forschungsgruppe »Visualizing Science in Media Revolutions« eingeladen. Ein Besuch in der *Deutschen Akademie Rom – Villa Massimo* hat für die Romseminare bereits eine gute Tradition. So durften wir in diesem Jahr erstmals deren neue Direktorin Dr. Julia Draganović kennenlernen. Gemeinsam mit Julia Trolp gab sie uns in einer überaus intensiven Führung durch das Gelände der Villa einen Eindruck, wie sich die reiche Geschichte der Deutschen Akademie in Rom fortführt und sich zugleich leichte Schwerpunktsverschiebungen bewerkstelligen und eigene Akzente setzen lassen. Besonders erfreulich war, dass wir wiederum mit einem der Stipendiaten ins Gespräch kommen konnten; der Komponist Marcus Schmickler erläuterte uns seine Projekte einer Sonifikation von

Daten und mathematischen Strukturen und eröffnete uns ganz eigentümliche Klangräume. Es war schließlich wieder ein besonderes Privileg, dass wir unsere Kleinkunstbühne in den Räumlichkeiten der Villa aufführen durften. In der Villa Massimo fand auch ein faszinierender Vortrag von PROF. DR. VERONICA BIERMANN, Prorektorin an der Burg Giebichenstein Kunsthochschule Halle, statt, die mit ihren kunst-, philosophie- und technikhistorischen Forschungen zum Transport schwerer Lasten im Rom der Renaissance das entscheidende Vorbild für unser Seminar-Thema gegeben hatte. Bereits am Tag zuvor hatte sie uns bei einem Stadtrundgang auf Sichtachsen und topographische wie politische Markierungen im Stadtbild vor allem durch Obelisken hingewiesen und schließlich auf der Piazza Navona mit uns das Bildprogramm von Berninis Vierströme-Brunnen erarbeitet und diskutiert. Führungen zu den Ausgrabungen der Domus Aurea und in den antiken römischen Wohnkomplex unterhalb des Palazzo Valentini rundeten das Besuchsprogramm ab.

So bot auch das 25. Romseminar ganz besondere Ein- und Ausblicke in der Ewigen Stadt. All denen, die uns mit ihrem persönlichen Engagement diese Höhepunkte unseres Programms ermöglicht haben, möchten wir auch an dieser Stelle unseren großen Dank aussprechen! Das Romseminar durfte auch im Jahr 2022 die bewährte Gastfreundschaft der traditionsreichen *Accademia Nazionale dei Lincei* genießen, ihr Sitz im Palazzo Corsini in Trastevere war erneut unser zentraler Tagungsort. Auch hierfür sagen wir ein herzliches Dankeschön.

Für die finanzielle Unterstützung danken wir schließlich dem DAAD, dem International Office und dem Department Mathematik der Universität Siegen, dem Akademischen Auslandsamt der HTW Dresden, dem Mathematischen Institut der Universität Tübingen, der Firma d-fine sowie den großzügigen Spendern unter den ehemaligen Teilnehmern des Romseminars und dabei insbesondere Carla Perazzoli und Klaus Engel.

Markus Haase	Universität Kiel
Michael Korey	Staatl. Kunstsammlungen Dresden
Rainer Nagel	Universität Tübingen
Gregor Nickel	Universität Siegen
Markus Wacker	HTW Dresden

Wir müssen uns Sisyphos als einen glücklichen Menschen vorstellen.

(Albert Camus
Le mythe de Sisyphe 1942)

Die Agenda

Sonntag, 25. September 2022

Ankunft in Rom, Bezug der Unterkunft, Kennenlernen beim Pizzaessen: Pizzeria "Wanted" an der Ecke Via Leonina Via dei Serpenti (ca. 19 Uhr)

Montag, 26. September 2022 – Accademia dei Lincei

9^{30} Begrüßung, Vorstellungsrunde

10^{30} **Anastasia Boushmelev & Lukas Strauch:** *Die Große Vereinheitlichung.*

12^{00} **Nina Henn:** *Zur unverständlichen Effektivität der Mathematik.*

13^{00} Mittagspause

14^{00} **Aaron Kettner:** *Die Jagd auf Schrödingers Katze: Lieber tot als lebendig?*

15^{00} **Alice Maurer:** *Replizierbarkeit – das Problem aller empirischen Wissenschaften.*

16^{00} **Cornelia Vogel & Michael Zimmermann:** *Es werde Licht – Quantengravitation und andere philosophische Ansichten über die Entstehung der Welt.*

18^{30} Cena (Pizzeria Da Baffetto, Via del Governo Vecchio 114, Roma)

Dienstag, 27. September 2022 – Accademia dei Lincei / Villa del Priorato di Malta

9^{15} **Hannes Wagener:** *Ökonomie jenseits von Mark und Plan?*

10^{15} **Maximilian Weinberg:** *Die 'überforderte Gesellschaft'.*

11^{15} **Tobias Bungart, Dennis Loch & Jannik Marcel Nöll:** *Verschwörungstheorien.*

12^{45} Mittagspause

15^{00} **Ivo Graziani (Chief of Cabinet of the Grand Hospitaller):** *Der Malteserorden und seine harten Probleme.*

16^{30} Besichtigung der Magistralvilla und der Prioratskirche (Piranesi).

Mittwoch, 28. September 2022 – Bibliotheca Hertziana (MPI für Kunstgeschichte)

9^{00} **Dr. Sietske Fransen:** *Von der Schwierigkeit, das Unbekannte zu visualisieren. Vorstellung eines Forschungsprojekts und Einführung in die Bibliotheca Hertziana.*

9^{30} Kaffee-Empfang der Forschungsgruppe "Visualizing Science in Media Revolutions"

10^{15} **Mohammad Yousuf Ejazi:** *Härte-Maße in der Komplexitätstheorie.*

11^{15} **Justus Springer:** *Mathematik 4.0 – Die Automatisierung der Mathematik.*

12^{15} MITTAGSPAUSE IM GARTEN DES VILLINO

14^{00} **M.A. Laura Valterio:** *Die Bibliotheca Hertziana im Palazzo Zuccari.*

15^{00} **Prof. Dr. Veronica Biermann:** *Schwere Lasten in Rom.*
Ein kunsthistorischer Rundgang.

20^{00} Vielleicht – Viel-schwer. Eine literarische Soirée (Hotel Tirreno)

Donnerstag, 29. September 2022 – Villa Massimo (Deutschen Akademie Rom)

9^{30} **Tobias Schnieders:** *Wer von uns würde nicht gerne den Schleier lüften?*

10^{30} **Leon Duensing:** *Es gibt ein Ignorabimus.*

11^{30} **Dr. Julia Draganović:** *Die Deutsche Akademie Rom – Villa Massimo.*

12^{30} MITTAGSPAUSE

13^{30} **Milan Bacchetta:** *Über die schweren Probleme des Kletterns.*

14^{30} **Prof. Dr. Veronica Biermann:** *Kolossale Lasten heben oder vom Gemachtsein der Architektur.*

15^{30} Harte Probleme in der Kunst? – Werkstattberichte nach Lust und Laune.

16^{15} MUSISCHE UNTERHALTUNG

Freitag, 30. September 2022 – Genzano Palazzo Sforza-Cesarini / Lago di Nemi

9^{00} Abfahrt am Hotel Tirreno

10^{00} **Prof. Dr. Rainer Nagel / Prof. Dr. Markus Haase:** *Lohnt die Beschäftigung mit schweren Problemen?*

11^{00} **Jens Borgemeister:** *Wissenschaft und Verantwortung.*

12^{00} Abschlussgespräch

13^{00} IMBISS AUF DER TERRASSE DES PALAZZO

14^{00} Wanderung nach Nemi, Sentiero degli acquedotti

18^{00} Rückfahrt von Nemi nach Genzano

19^{00} CENA SOCIALE (GENZANO)

Samstag, 1. Oktober 2022 – Alternative Besichtungen

11^{45} **Besichtigung:** *Domus Aurea*

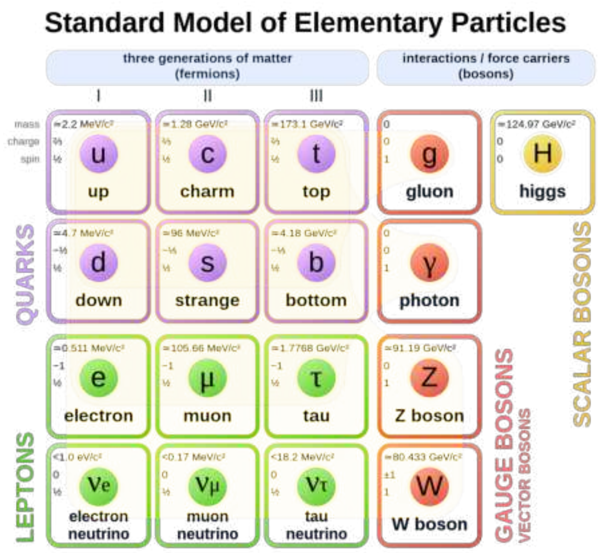
15^{00} **Besichtigung:** *Case Romane*

Sonntag, 2. Oktober 2022

Abreise

Weltformeln
Die große Vereinheitlichung

Anastasia Boushmelev und Lukas Strauch

Einführung und Geschichte

Um überhaupt erstmal über die eine Weltformel sprechen zu können, müssen wir uns erst einmal klarmachen, was eine Weltformel ist. Dies lässt sich am besten klären, indem man eine präzise Definition fordert.

»Eine *Weltformel* oder eine *Theorie von Allem* (englisch: Theory of Everything, ToE oder TOE) ist eine hypothetische Theorie, gebildet aus theoretischer Physik und Mathematik, die alle physikalischen Phänomene im bekannten Universum präzise beschreiben und verknüpfen soll« (WIKIPEDIA [2]).

Im Folgenden werden wir sehen, dass die Suche nach der Weltformel fast so alt wie die Menschheitsgeschichte selbst ist.

Antikes Griechenland: Im antiken Griechenland ging man davon aus, die Bewegung und Kollision von Atomen (altgr.: »atomos«: *unteilbar*, geht auf Demokrit zurück) würde alle beobachtbaren Phänomene beschreiben, was ein erster philosophischer Versuch einer Vereinheitlichung war.

Im Gegensatz dazu stand der *Holismus*, der aussagte, dass natürliche Systeme als Ganzes und nicht nur als Zusammensetzung ihrer Teile betrachtet werden.

Spätes 17. Jahrhundert: In dieser Zeit gelang es Sir Isaac Newton, eine Fernwirkung der Schwerkraft nachzuweisen. Er entwickelte die heutige *Theorie der Gravitation*, in der er die Erdanziehungskraft und die Keplerschen Planetenbewegungen, also zwei völlig unterschiedliche Bewegungsarten, durch das sogenannte *Newtonsche Gravitationsgesetz* vereinheitlicht.

Weiter führte Pierre Simon Laplace in dieser Zeit die These an, ein ausreichend mächtiger Intellekt hätte die Möglichkeit, jeden vergangenen und jeden zukünftigen Zustand zu berechnen und zu determinieren, was aber später durch die Entdeckung der Quantenmechanik zu einem Widerspruch führt. Dieser ausreichend mächtige Intellekt wird heute unter dem Namen *Laplacescher Dämon* gehandhabt.

Im 17. Jahrhundert wurde also die Kombination von Gravitation und Mechanik als Theorie von Allem angesehen.

19. Jahrhundert: Beginnend mit Hans Christian Oersted, der die magnetische Wirkung des elektrischen Stroms entdeckte, wurde eine erste Vereinheitlichung von Elektrodynamik und Magnetismus hergestellt. Die Vollendung dieser kam durch James Clerk Maxwell, der durch Vervollständigung der heute nach ihm benannten *Maxwell Gleichungen* erkannte, dass viele gängige Beispiele von Kräften, z. B. Kontaktkräfte, Elastizität, Viskosität, Reibung oder Druck, aus elektrischen Wechselwirkungen zwischen den kleinsten Teilchen der Materie resultieren.

20. Jahrhundert: Im Jahre 1900 war es David Hilbert, der in seinen berühmten *Hilbertschen Problemen* die Axiomatisierung der gesamten Physik forderte (Hilberts sechstes Problem). Diese Axiomatisierung ist das, was heutzutage wohl am nächsten an eine Theorie von Allem herankommt.

Weiter wurde im 20. Jahrhundert durch u. a. Paul Dirac eine Quantentheorie (Quantenmechanik) aufgestellt, die u. a. zeigt, dass chemische Bindungen zwischen Atomen nur Beispiele zugrundeliegender (quanten-) elektrischer Kräfte sind. Daraus resultierend sieht man, dass die Quantenmechanik und die Elektrodynamik einen großen Teil der Physik beschreiben kann.

Weiter war es Albert Einstein, der durch seine spezielle Relativitätstheorie (SRT) eine vereinheitlichte Theorie über die Bewegung von Körpern und Feldern in Raum und Zeit entwickelte. Die durch diese Vereinheitlichung von Elektrodynamik und Mechanik gewonnenen neuen Phänomene sind z. B. die Massen-Energie-Äquivalenz, die Zeitdilatation oder die Lorentzkontraktion. Durch seine allgemeine Relativitätstheorie (ART) kam erneut Albert Einstein auf das Konzept, die Gravitation als Eigenschaft der gekrümmten Raumzeit anzusehen.

Die ART erweitert damit die spezielle Relativitätstheorie und das Newtonsche Gravitationsgesetz. Damit begann die Suche nach einer einheitlichen Feldtheorie, die die Gravitation und den Elektromagnetismus miteinander verbinden könnte.

Heute: Heutzutage gibt es vier grundlegende Wechselwirkungen:

- *Schwache Kernkraft*: Diese hat als Trägerteilchen (Kräftevermittler) die $W^{\pm}$, Z Bosonen, welche auf Quarks und Leptonen wirken.
- *Elektromagnetische Kraft:* Hat als Trägerteilchen das Photon, welches wiederum auf Quarks, geladene Leptonen und $W^{\pm}$ wirkt.
- *Starke Kernkraft:* Mit dem Gluon als Kräftevermittler, was wieder auf Quarks und Gluonen wirken kann.
- *Gravitation:* Die Gravitation wirkt auf alles. Man würde hier ein Graviton als Kräftevermittler vermuten, damit die Gravitationstheorie auch als Quantentheorie beschrieben werden kann. Dies wurde aber leider noch nicht beobachtet. Durch Entdeckung dieses Teilchens würde einer Theorie von Allem nichts mehr

Im Folgenden werden noch Anforderungen an die Theorie von Allem gestellt, die unbedingt erfüllt werden müssen:

- Die ART sollte erhalten sein, und es sollte eine Quantenfeldtheorie sein.
- Sollte alle beobachtbaren Kräfte des Standardmodells erklären
- Sollte Massen, Kopplungskonstanten und Mischungswinkel des Standardmodells erklären können.
- Das Standardmodell der Kosmologie beschreiben.
- Die Natur der Dunklen Materie und der Dunklen Energie sollte erklärt werden.
- Sie sollte eine konsistente, renormierbare Quantentheorie der Gravitation beinhalten zusammen mit der Beschreibung oder der Vermeidung von Singularitäten.

Große vereinheitlichte Theorie

Große vereinheitlichte Theorien (GUTs - Grand Unified Theories) verfolgen das Ziel drei der vier fundamentalen Grundkräfte in einer Theorie zu vereinigen. Wie wir bereits gesehen haben, fand historisch bereits eine Vereinigung von der elektro-magnetischen und der schwachen Wechselwirkung in Form des elektroschwachen Theorie (QED) statt. Die starke Wechselwirkung wird durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben. Die QED und QCD bilden zusammen das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik.

Nun ist es so, dass diese physikalischen Theorien durch übergeordnete Symmetriegruppe beschrieben werden. Gruppen sind mathematische Konstrukte, in diesem Fall Symmetrieeigenschaften der einzelnen physikalischen Theorien. Im

Nachfolgenden werden vor allem Gruppen der Form $U(n)$, $SU(n)$ und $SO(n)$ von großem Interesse sein.

Erstere wird durch Gruppe der unitären $n \times n$-Matrizen, zweite durch die spezielle Gruppe unitärer $n \times n$-Matrizen mit Determinante $\det(M) = 1$ und letztere durch die Gruppe der orthogonalen $n \times n$-Matrizen mit Determinante $\det(M) = 1$ beschrieben.(1)

Im Standardmodell werden Teilchen in verschiedenen Kategorien klassifiziert: Fermionen und Bosonen. Zweite mediieren die o. g. Wechselwirkungen.

Nun kommen wir zu der mathematischen Beschreibung mit Hilfe von Gruppentheorie: Diese WW Teilchen sind eng mit sog. Generatoren der Symmetriegruppen verknüpft. Die Symmetrieeigenschaften der QCD werden durch die $SU(3)$ und die der QED durch

$$SU(2) \times U(1)$$

beschrieben, sodass die Eichgruppe des gesamten Standardmodells durch

$$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$$

gegeben ist.

Schreibt man nun die gesamte Theorie auf, wird man sehen, dass die Stärke einzelner Wechselwirkungen durch sog. Kopplungskonstanten charakterisiert wird und man durch die o.g. Gruppenstruktur drei Kopplungskonstanten erhält. Eine Motivation von einer Vereinheitlichung der QED und QCD in Form einer GUT ist die Vereinheitlichung dieser Kopplungskonstanten in einer Kopplungskonstante. Dies kann weiter über das Zusammentreffen der drei energieabhängigen Kopplungskontanten des Standardmodells bei hohen Energien motiviert werden, jedoch die Einführung der Methodik von Renormierung fordert und den Rahmen dieser Ausarbeitung sprengt.

Das Standardmodell hat noch weitere unerklärte und problematische Aspekte, die GUTs versuchen zu erklären und zu lösen. Ein weiteres Beispiel ist die Reduzierung von freien Parametern im Standardmodell, die nicht theoretisch vorhergesagt werden können. Weitere Schlüsselworte in diesem Zusammenhang sind die Baryonasymmetrie, die drei Generationen, gedrittelte Elementarladungen von Quarks usw.

Ein Ansatz für GUTs sind größere Gruppen (im Sinne von einer größeren Anzahl an Generatoren), in die sich die Symmetriegruppe des Standardmodells einbetten lässt. Das einfachste Beispiel dafür ist die $SU(5)$. Diese hat den gleichen Rang, eine weitere Eigenschaft von Gruppen, wie die Gruppe des Standardmodells. Dieses Modell erklärt bspw. die drittelartige Ladung von Quarks und hat

(1) Es ist M eine unitäre Matrix, wenn $MM^* = M^*M = I$ und orthogonale Matrix, wenn $MM^\mathrm{T} = M^\mathrm{T}M = I$

nur eine Kopplungskonstante, jedoch hat diese Gruppe mehr Generatoren, welche neue Wechselwirkungen hervorrufen, die einen Protonenzerfall zur Folge haben.

Ein weiteres Modell, welches einen anderen Ansatz verfolgt, ist das sog. Pati-Salam Modell. Dieses hat nicht das Ziel, die Kopplungskonstanten zu vereinigen, sondern verfolgt den kreativen Ansatz, eine vierte Color von Quarks (im Standardmodell haben diese drei sog. Colors) einzuführen, die dann als Leptonen interpretiert werden kann. Führt man diese Theorie weiter aus, stellt man schnell fest, dass hier ein weiteres Problem des Standardmodells in Angriff genommen wird: massive Neutrinos sind hier durch den Seashaw Mechanismus möglich. Nachdem die Neutrino Oszillation nachgewiesen wurde und so auch gezeigt wurde, dass Neutrinos nicht masselos sind, erlangt dieses Modell an Popularität, doch auch hier gibt es Problematiken, sodass es das Standardmodell nicht ablöst.

Schlussendlich gibt es in diesem Bereich der Teilchenphysik, der sich Model Building nennt, weitere zahlreiche und kompliziertere Modelle. Dieses Gebiet erinnert schon fast an Puzzeln, da man mit den Gruppenstrukturen spielt und so versucht, Probleme zu lösen, dabei jedoch immer wieder auf neue Probleme stößt. Nicht zu vernachlässigen sei der Fakt, dass größere Gruppen auch die Anzahl der freien Parameter in die Höhe treibt, sodass man irgendwann an Grenzen stößt. Nichtsdestotrotz ist das Standardmodell nach wie vor das erfolgreichste Modell zur Beschreibung vieler Phänomene in der Teilchenphysik. Einer der größten Erfolge ist z. B. die Vorhersage des Higgs Teilchens, dessen Entdeckung dieses Jahr 10-jähriges Jubiläum feiert. Der Drang nach Perfektion lässt die Wissenschaftler nicht ruhen und immer weiter nach verbesserten Theorien suchen.

Wer sich für dieses Thema interessiert und mehr über komplexere Ansätze und Gruppen nachlesen möchte, kann dies gerne unter Slansky [1] tun.

Literatur

[1] R. Slansky: *Group Theory for Unified Model Building*. Phys. Rept. **79** (1981) 1–128.

[2] Wikipedia: *Weltformel*. 2022
URL: https://de.wikipedia.org/wiki/Weltformel (aufgerufen am 07. 12. 2022).

The Unreasonable Effectiveness of Mathemathics

Nina Henn

» *La mathematica e l'alfabeto nel quale Dio ha scritto l'universo.*« (1)
Galileo Galilei (1564-1642)

Mathematik und ihre Wirksamkeit

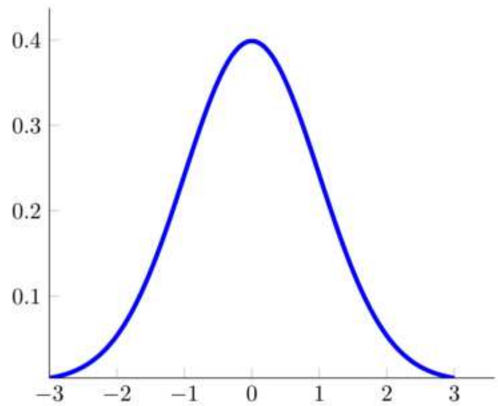
Mathematik ist in zahlreichen Wissenschaften und Lebensbereichen allgegenwärtig und dient dabei als effektives Hilfsmittel. Beispielhaft seien die Physik, Informatik, Chemie und Wirtschaft genannt. Aber auch in der Politik und den sozialen Wissenschaften werden Entscheidungen aufgrund von mathematischen Daten gefällt, man denke zum Beispiel an die Corona-Politik abhängig von den

(1) Mathematik ist das Alphabet, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.

Inzidenzzahlen. Mathematische Zeichenbzw. Formulierungen tauchen oft an Stellen auf, wo wir sie nicht erwarten. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, warum sich die Mathematik so gut zur Beschreibung der Natur und sogar unseres Alltags eignet? Diese Frage ist nicht neu und bekannte Wissenschaftler, wie der Physiker Eugene Wigner (1902-1995), haben sich damit auseinander gesetzt.

Eugene Wigner

Wigner ging in Budapest zusammen mit John von Neumann zur Schule und siedelte während der NS-Zeit in die USA über. Er bekam 1963 für seine Beiträge in der Kernphysik den Nobelpreis für Physik verliehen. In seinem Artikel von 1960 – *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* – beschreibt WIGNER [3] die unerklärbare Wirksamkeit von Mathematik in der Physik. In der Einleitung seines Artikels verweist Wigner auf die Standardnormalverteilung, welche in den verschiedensten Bereichen für Modellierungszwecke verwendet wird. Aber warum taucht in der zugehörgien Dichtefunktion ausgerechnet die Kreiszahl π auf? Schon hier wird die mysteriöse Effizienz der Mathematik deutlich.



Standardnormalverteilung

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

Mathematische Konzepte wie komplexe Zahlen, Ableitung, Hilbertraum, Differentialgeometrie werden dort effektiv eingesetzt zur Beschreibung und Auswertung physikalischer Beobachtung. Viel mehr noch die mathematischen Konzepte erlauben Vorhersagen für weitere Experimente zu machen ausgehend von den bereits gemachten Beobachtungen.

Wigners Mathematikbild

»Mathematics is the science of skillful operations with concepts and rules invented just for this purpose.« (WIGNER [3]).

Wigner sieht die Mathematik vollständig unabhängig von ihren Anwendungen. Die Mathematik erfüllt einen Selbstzweck, ihre Konzepte und Regeln sind allein für das Betreiben von Mathematik da.

Was die innere Struktur der Mathematik angeht, betont Wigner die Wichtigkeit von »formaler Schönheit«. Damit ist gemeint, dass die erfundenen Konzepte und Regeln die Entwicklung einer reichhaltigen Theorie zulassen. In diesem Zusammenhang stellt sich die Frage, woher man bei der Einführung eines neuen Konzepts weiß, ob dieses eine reichhaltige Theorie zulässt. Für Wigner gehört diese Einschätzung zur Genialität eines Mathematikers. Am Beispiel der komplexen Zahlen soll im Folgenden gezeigt werden, dass nicht nur die Wirksamkeit von Mathematik in den Naturwissenschaften schwer zu erklären ist, sondern auch die Reichhaltigkeit von mathematischen Konzepten durchaus verwunderlich sein kann.

Die komplexen Zahlen – formale Schönheit

Für eine ausführliche Behandlung der Geschichte der komplexen Zahlen sei beispielsweise auf NAHIN [2] verwiesen. Skizzenhaft wird hier auf einige wichtige Ereignisse dieser Entwicklung eingegangen.

Heute wird zur Motivation der komplexen Zahlen oft die Gleichung

$$x^2 = -1$$

aufgebracht. Interessanterweise war es jedoch nicht diese, für uns aus heutiger Sicht »intuitive« Motivation, die zur Einführung der komplexen Zahlen geführt hat. Gleichungen dieser Art wurden lange Zeit schlicht und ergreifend als nicht lösbar erklärt und nicht weiter untersucht. Erstmals tauchten negative Quadratwurzeln in dem Werk Ars Magna des italienischen Mathematikers Gerolamo Cardano aus dem Jahr 1545 auf (siehe CARDANO & SPON [1]). Das Interesse an ihnen wurde von Cardanos Lösungsformeln für kubische Gleichungen abgeleitet. Beispielhaft wird hier die Lösungsformel für Gleichungen der Form

$$x^3 = px + q$$

angegeben:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Dabei kann die Zahl unter der in blau hervorgehobenen Quadratwurzel negativ sein, auch wenn alle drei Lösungen reell sind.

Inspiriert durch die Anwendung der Lösungsformel wurde mit negativen Quadratwurzeln als Zwischenergebnissen gerechnet, nach den Rechenregeln, die sich ergeben, wenn man

$$\mathbb{R} \times \sqrt{-1}\,\mathbb{R}$$

zu einem Körper machen möchte. Diese negative Wurzeln wurden erstmals nur als Rechenhilfe verwendet. Ihnen konnte keine anschauliche Bedeutung zu geordnet werden und die verfügbaren Operationen mit ihnen waren noch sehr beschränkt.

Damals war noch nicht absehbar, zu welch vielfältiger mathematischen Theorie (Funktionentheorie) diese negativen Wurzeln führen würden. Cardano selbst hatte sogar noch Probleme beim Rechnen nur mit seinen Formeln. Im Allgemeinen konnte er nicht angeben, wie man eine dritte Wurzel aus einer komplexen Zahl zieht. Dies gelang kurz darauf dem italienischen Mathematiker Rafael Bombelli durch das Lösen eines linearen Gleichungssystem, nicht jedoch mit dem heute üblichen Verfahren mittels Polarkoordinaten. Es gab aber weiterhin keine Anschauung zu diesen negativen Wurzeln.

Diese wurde erst im 18ten Jahrhunder durch den dänischen Mathematiker Caspar Wessel (1745-1818) geliefert und stimmt mit unserer heutigen Auffassung der komplexen Zahlen als Zahlenebene im wesentlichen überein. Das Ergebnis, die Funktionentheorie, ist eine unglaublich starke und schöne Theorie, die in einigen Aspekten sehr viel reichhaltiger als die Theorie der reellen Funktionen ist, was Wigners Bild von »formaler Schönheit« entspricht. Aber auch außerhalb der Mathematik haben die komplexen Zahlen Bedeutung erlangt und tauchen in so gut wie jedem Ingenieursstudium auf.

Fazit ist eine verblüffende Wirksamkeit der negativen Wurzeln sowohl innerhalb als auch außerhalb der Mathematik, die bei deren Einführung so nicht vorhersehbar war.

Rolle der Mathematik in den Naturwissenschaften

Möchte man sich mit der Frage auseinandersetzen, warum die Mathematik so effektiv in den Naturwissenschaften ist, stellt sich zuerst einmal die Frage, welche Zwecke und Aufgaben die Mathematik in den Naturwissenschaften erfüllt. Dabei ist es wichtig, sich klar zumachen, dass die Mathematik weitaus mehr leistet als die bloße Auswertung naturwissenschaftlicher Experimente oder Beobachtungen. Viel mehr kann man durchaus sagen, dass die Mathematik als »Sprache der Naturgesetze« gilt, wie schon dem Einstiegszitat von Galileo Galilei zu entnehmen ist. Mittels mathematischer Formulierungen lassen sich neue Vorhersagen treffen, die anschließend experimentell überprüft werden können. Neben der Möglichkeit, Vorhersagen zu treffen, dienen die mathematischen Formulierung aber auch für Klarheit und Sprachunabhängigkeit für die schriftlichen Kommunikation. Dabei kennzeichnen sich die verwendeten, mathematischen Konzepte sowohl durch ihre Einfachheit als auch durch ihre Eignung, weiter Theorien zu entwickeln und einheitlich zu formulieren. Als Beispiele nicht trivialer, mathematischer Konzepte in den Naturwissenschaften seien die Differentialgeometrie in der Relativitätstheorie, die Hilbertraumtheorie in der Quantenmechanik oder Differentialrechnung in der klassischen Mechanik genannt.

Mathematik und ihre Wirksamkeit – Warum?

Warum die Mathematik so wirksam zur Beschreibung naturwissenschaftlicher Phänomene ist, ist in vielen Fällen nur schwer erklärbar. Ein möglicher Ansatz ist, dass in einigen Fällen die Mathematik nicht vollkommen unabhängig von ihrer naturwissenschaftlichen Anwendung entwickelt wurde, so zum Beispiel die Differentialrechnung im Zusammenhang mit der klassischen Mechanik. Dieser Ansatz lässt sich allerdings nicht allgemein übertragen, wie hier am Beispiel der komplexen Zahlen verdeutlicht wurde, da diese unabhängig von ihren heutigen Anwendungen entwickelt wurden. Eine weiterer Erklärungsansatz ist der, dass die Naturwissenschaftler speziell Physiker nichts anderes kennenbzw. es gewohnt sind, mit mathematischen Formulierungen zu arbeiten. Denn schon von Anfang des Physikstudiums wird stets in mathematischer Sprache formuliert und zahlreiche Mathematikkurse sind auch für Physiker Pflicht. Warum sollte man etwas neues versuchen, wenn die Mathematik in den Naturwissenschaften sich schon so lange bewährt hat? Dennoch bleibt die Frage, warum die Mathematik so wirksam in den Naturwissenschaften und technischen Gebieten zu sein scheint. Wir vertrauen oft sehr stark auf die Richtigkeit der Mathematik zum Beispiel beim Brückenbau (bei der Berechnung von Eigenfrequenzen) oder bei selbstfahrenden Fahrzeugen.

Gleichzeitig scheint es auch in den Sozialwissenschaften einen Trend zur Mathematisierung zu geben. Dabei werden häufig mathematische Modelle verwendet, welche dann Einfluss auf die Entscheidungsfindung in der Politik nehmen können, so beispielsweise während der Corona-Krise. Hierbei können die zu treffenden Entscheidungen weitreichende Folgen für Millionen von Menschen haben. Die Frage nach der Verlässlichkeit dieser Entscheidungshilfen ist folglich sehr relevant. Diese Frage bleibt derzeit offen und das vermutlich noch sehr lange.

Literatur

[1] G. Cardano & C. Spon: *Ars magna (1545)*. Opera Omnia **4** (1968) 221–302.

[2] P. J. Nahin: *An imaginary tale*. Princeton University Press (2010).

[3] E. P. Wigner: »The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences«. *Mathematics and Science*. World Scientific 1990 S. 291–306.

Jagd auf Schrödingers Katze
Lieber Tot als Lebendig

Aaron Kettner

Wenn Menschen über Quantenmechanik reden, wird eines meist vergessen: Die Quantenmechanik, zumindest in ihrer üblichen Formulierung, ist keine konsistente physikalische Theorie! Grund ist das Messproblem, anschaulich dargestellt durch das Gedankenexperiment Schrödingers Katze.

Sperrt man eine Katze mitsamt einer einfachen physikalischen Versuchsanordnung in eine Box, hängt der Zustand der Katze davon ab, ob während des Vorganges die Box geöffnet oder geschlossen ist. Dies liegt an den zwei grundsätzlich verschiedenen Arten von Zeitentwicklung der Wellenfunktion, die in der Quantenmechanik existieren. Welcher angewandt werden muss, hängt vom Vorhandensein einer »Messung« ab — ein Begriff, der nicht genau definiert wird.

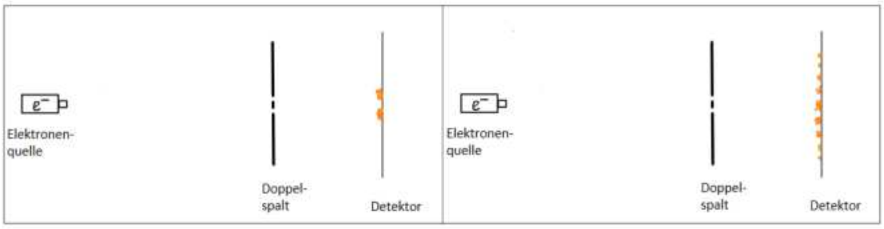


Abbildung 1: Doppelspaltexperiment mit klassisch erwartbarem Ausgang links und tatsächlich gemessenem Interferenzmuster rechts

Das Doppelspaltexperiment

In der klassischen Mechanik wird der aktuelle Zustand eines Systems von Punktteilchen (z. B. eines aus vielen kleinen Molekülen bestehenden Gases) eindeutig durch die Angabe der Orte und Geschwindigkeiten aller Teilchen beschrieben. Daraus kann dann mittels bestimmter Bewegungsgleichungen der Zustand des Systems zu allen späteren Zeitpunkten ermittelt werden. Insbesondere ist die klassische Mechanik also deterministisch.

Sollen Teilchen auf noch kleineren Größenskalen, wie zum Beispiel Protonen oder Elektronen, beschrieben werden, liegt der Gedanke nahe, dass prinzipiell dieselben Gesetzmäßigkeiten gelten. Das sogenannte *Doppelspaltexperiment* zeigt allerdings, dass dies nicht sein kann. Es ist folgendermaßen aufgebaut (siehe Abb. 1): Eine Elektronenquelle wird auf einen Schirm mit zwei vertikalen Schlitzen, einen Doppelspalt, gerichtet. Hinter dem Doppelspalt befindet sich ein Detektor. Gemäß der Vorstellung von Elektronen als klassischen Teilchen wäre erwartbar, dass nur unmittelbar hinter den Spalten Elektronen auf den Detektor auftreffen. Stattdessen wird ein Interferenzmuster gemessen: Die Elektronen treffen in Streifen auf den Detektor auf. Ein solches Interferenzmuster wird in der klassischen Physik bei Wellen beobachtet. Das Elektron muss daher in irgendeiner Weise Welleneigenschaften besitzen, die klassische Beschreibung als Punktteilchen mit Angabe von Ort und Geschwindigkeit reicht folglich nicht aus (für eine genauere Beschreibung des Doppelspaltexperiments siehe FEYNMAN [1]).

Mathematisch wird das Elektron deshalb durch die sogenannte Wellenfunktion beschrieben. Diese ordnet zu einem bestimmten Zeitpunkt jeder möglichen Position des Elektrons eine komplexe Zahl zu. Das Betragsquadrat dieser gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass das Elektron an diesem Ort gemessen wird. Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion erfolgt durch die Schrödingergleichung, eine lineare partielle Differentialgleichung.

Der abstrakte Formalismus

Für allgemeinere Quantensysteme funktioniert der Formalismus völlig analog. Der Zustand des Systems wird durch eine Wellenfunktion beschrieben, welche sich durch die Schrödingergleichung in der Zeit entwickelt. Dies resultiert in einer stetigen, deterministischen Zeitentwicklung, hier symbolisch mit U bezeichnet (Penrose [3] folgend).

Messungen werden, etwas vereinfacht, folgendermaßen beschrieben (siehe Nolting [2]): Jeder Messgröße, wie Ort oder Impuls, wird eine selbstadjungierte Matrix zugeordnet, deren Eigenwerte die möglichen Messergebnisse sind. Eine beliebige Wellenfunktion kann als eine Linearkombination aus Eigenvektoren der Matrix geschrieben werden, wobei jeder Eigenvektor mit einem bestimmten Koeffizienten auftritt. Das Betragsquadrat dieses Koeffizienten gibt die Wahrscheinlichkeit an, den zum Eigenvektor gehörigen Eigenwert zu messen. Die Wellenfunktion des Zustands nach der Messung ist dann gegeben durch den Eigenvektor, dessen Eigenwert gemessen wurde. Der Übergang geschieht instantan – dies ist der sogenannte Kollaps der Wellenfunktion. Er war bereits beim Doppelspaltexperiment sichtbar: Zwar breitet sich das Elektron zwischen Quelle und Detektor als ausgedehnte Wellenfunktion aus, allerdings kollabiert diese bei der Ortsmessung, also bei Erreichen des Detektors, in eine nur in einem Punkt lokalisierte Wellenfunktion. Daher wird das Elektron immer als Punktteilchen gemessen.

Der Messprozess, im Folgenden symbolisch mit R bezeichnet, hat also zwei Eigenschaften, die ihn grundlegend von U unterscheiden: Er ist unstetig, da der Kollaps der Wellenfunktion instantan erfolgt, und probabilistisch, da nur Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Messergebnisse angegeben werden können. Es ist prinzipiell nicht möglich vorauszusagen, welcher der denkbaren Ausgänge eines Experiments tatsächlich eintreffen wird.

Zusammenfassend existieren in der Quantenmechanik zwei grundlegend unterschiedliche Zeitentwicklungen: Das stetige, deterministische U, und der unstetige und probabilistische Kollaps R. Letzterer tritt ein, wann immer am System eine Messung vorgenommen wird, andernfalls muss U verwendet werden. Das grundlegende Problem besteht nun darin, dass der Begriff der Messung nicht genau definiert werden kann. Dies führt zu Widersprüchen, wie im Gedankenexperiment von Schrödingers Katze deutlich wird.

Schrödingers Katze und das Messproblem

Der Aufbau des Experiments wurde in der Einleitung bereits erläutert. Die erwähnte einfache Versuchsanordnung besteht aus einem radioaktiven Material, welches innerhalb eines bestimmten Zeitraums mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zerfällt, einem Detektor für radioaktive Strahlung, und einem Gift. Letzteres wird vom Detektor freigesetzt, falls ein Zerfall registriert wird, und tötet die Katze. Findet innerhalb des gewählten Zeitraumes kein Zerfall statt, wird das Gift nicht freigesetzt, und die Katze überlebt.

Es wird angenommen, dass sich die radioaktiven Atome zu Beginn des Experiments in einem quantenmechanischen Überlagerungszustand aus »zerfallen« und »nicht zerfallen« befinden, also einer Linearkombination aus den zugehörigen Eigenvektoren. Wird nun eine Messung durchgeführt, findet der Prozess R statt, die Wellenfunktion kollabiert, und die radioaktiven Atome sind mit gewissen Wahrscheinlichkeiten entweder zerfallen oder nicht.

Der quantenmechanische Formalismus gestattet allerdings auch eine andere Betrachtungsweise: Der Inhalt der Box besteht zwar aus makroskopischen Objekten, wie Messapparat und Katze, diese selbst sind allerdings aufgebaut aus unzähligen mikroskopischen Objekten, nämlich den Atomen, aus denen sie bestehen. Es muss daher möglich sein, die Gesetze der Quantenmechanik auch auf diese Objekte anzuwenden, sie besitzen daher ebenfalls eine Wellenfunktion. Nimmt man diese Perspektive ein, nämlich die eines Beobachters außerhalb der Box, findet der Kollaps R nicht statt. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird ausschließlich durch U beschrieben, da ja keine Messung durchgeführt wird. Es lässt sich nun zeigen, dass U das gesamte System in einen Überlagerungszustand aus »toter Katze« und »lebendiger Katze« überführt. Dieses Ergebnis ist zum einen nicht mit unserer Alltagserfahrung zu vereinbaren, da wir niemals Überlagerungszustände makroskopischer Objekte beobachten. Zum anderen steht es im Widerspruch zum durch Anwendung von R erhaltenen Ergebnis. Durch Einnahme unterschiedlicher Betrachtungsweisen auf den gleichen physikalischen Prozess können also unterschiedliche Ergebnisse erhalten werden – dies ist das Messproblem.

Die Kopenhagener Deutung

Dieser fundamentale Widerspruch, beziehungsweise die ungenaue Formulierung, aus der er sich ergibt, scheint den Erfolg der Quantenmechanik allerdings in keiner Weise zu beeinträchtigen. Man könnte sie, im Gegenteil, sogar als die erfolgreichste existierende physikalische Theorie bezeichnen, da sich ihre Voraussagen mit enorm hoher Genauigkeit bestätigen lassen. In der Praxis scheint das Messproblem also nicht relevant zu sein. Die meisten Physikerinnen und Physiker verwenden zur Interpretation der Quantenmechanik die Kopenhagener Deutung, welche eine Unterscheidung in mikroskopische und makroskopische Welt vornimmt. Erstere ist die Welt der Atome und Elektronen, in der Wellenfunktionen mittels U zeitentwickelt werden. Letztere ist die Welt der Messgeräte und Katzen, in der die Gesetze der klassischen Physik gelten. Eine Messung, das heißt der Prozess R, findet statt, wann immer Objekte aus den beiden verschiedenen Welten miteinander interagieren. Dies umgeht das Problem mit Schrödingers Katze: Die Wellenfunktion der radioaktiven Atome kollabiert bei der Messung, da das Messgerät ein makroskopisches Objekt ist. Die Perspektive von »außerhalb der Box« ist demnach nicht zulässig, und die Katze befindet sich zu keinem Zeitpunkt in einem Überlagerungszustand. Es löst allerdings nicht das Messproblem: Genau wie vorher der Begriff der Messung sind nun die Begriffe »mikroskopisch« und »makroskopisch« nicht sauber definiert, da natürlich keine genaue Grenze zwischen beiden gezogen werden kann. Für die Praxis ist die Interpretation allerdings ausreichend, da in Laborsituationen die Unterscheidung zwischen mikroskopischem Quantensystem und makroskopischem Messapparat klar ist.

Es gibt allerdings Lösungen des Messproblems, das heißt konsistente Formulierungen der Quantenmechanik. Die drei bedeutendsten sind die Bohmsche Mechanik, die Viele-Welten-Theorie und die GRW-Theorie. Da sie sich bisher nicht experimentell unterscheiden lassen, hat sich noch keine von ihnen durchsetzen können. Für mehr Informationen über das Messproblem und die verschiedenen Interpretationen der Quantenmechanik, siehe Tumulka [4].

Abschluss

Es scheint so, als ob die Mehrzahl der mit Physik beschäftigten Menschen – interessierte Laien, Lehrerinnen und Lehrer, und auch aktive Physikerinnen und Physiker – das Messproblem vollständig ignorieren. Schrödingers Katze ist zwar durch die Populärwissenschaft allgemein bekannt, wird aber nur selten vollständig richtig erklärt. Selbst in Physikvorlesungen an der Universität wird das Messproblem nicht diskutiert. Das ist sehr schade – denn es trägt entscheidend zur »mysteriösen« Aura bei, die der Quantenmechanik anhaftet.

Es ist daher höchste Zeit, das Messproblem als das anzuerkennen, was es ist: Ein schweres Problem der Physik!

Literatur

[1] R. Feynman: *The Feynman Lectures on Physics, Volume III, Chapter 1.* (1964).

[2] W. Nolting: *Grundkurs Theoretische Physik 5/1.* Springer Berlin, Heidelberg (2002).

[3] R. Penrose: *The Emperors new Mind.* Oxford University Press (1989).

[4] R. Tumulka: *Foundations of Quantum Mechanics.* Springer Berlin, Heidelberg (2022).

Replizierbarkeit
Ein Problem aller empirischer Wissenschaften

Alice Maurer

Warum Replizierbarkeit wichtig ist

Replizierbarkeit, also die Wiederholbarkeit von Experimenten, Beobachtungsstudien und Datenanalysen durch verschiedene Forschungsgruppen bei gleicher Methode ist ein wichtiges Prinzip des wissenschaftlichen Arbeitens. Dass es sich dabei aber nicht um ein beliebiges Gütekriterium handelt, sondern um ein Problem, das uns alle betrifft, wird an einigen Beispielen klar. Forschungsergebnisse in sensiblen Bereichen wie Medizin, Psychologie, Erziehung, aber auch Physik und Chemie werden täglich Grundlage für Entscheidungen. Im Rahmen der Coronapandemie wurde deutlich, dass nicht nur die Entscheidungen Einzelner, sondern auch die Entscheidungen der Politik auf wissenschaftlichen Erkenntnissen beruhen oder zumindest beruhen sollten. Dabei verlassen wir alle uns darauf, dass die wissenschaftlich bestätigten Erkenntnisse auch wiederholbar und unabhängig von der durchführenden Forschungsgruppe sind. Nur so können Studienergebnisse als allgemeines Wissen anerkannt werden.

Um die Replizierbarkeit in vielen empirischen Wissenschaften steht es jedoch schlecht. Ioannidis behauptet sogar »It can be proven that most claimed research findings are false« Ioannidis [5]. Wir wollen uns im Folgenden mit zwei Beispielen beschäftigen, die verdeutlichen, warum Replizierbarkeit ein so wichtiges Thema ist und wie groß das Ausmaß des Problems der fehlenden Replizierbarkeit ist.

1. Der Fall Birbaumer

Der Fall des Tübinger Neuropsychologen Niels Birbaumer zeigt eindrücklich, welche weitgreifenden Folgen nicht vorhandene Replizierbarkeit haben kann. Chaudhary, Xia, Silvoni, Cohen und Birbaumer (2017) veröffentlichten, dass sie einen Weg gefunden hätten, mit vollständig gelähmten Personen zu kommunizieren. In der Studie wurden vier Probanden untersucht, die bislang aufgrund einer Amyotrophe Lateralskelrose (ALS) Erkrankung zu keiner Form der Kommunikation mehr in der Lage waren. Die fortschreitende Erkrankung führt zu einer Muskellähmung, die im finalen Stadium auch die lebenswichtige Atemmuskulatur betrifft. Die vier Probanden der Studie konnten zum Zeitpunkt des Experiments keinerlei Willkürbewegungen durchführen und daher auch nicht mal durch Augenbewegungen oder Zwinkern kommunizieren. Mittels Elektroenzephalografie (EEG) und funktioneller Nahinfrarot-Spektroskopie (fNIRS) wurden im Rahmen der Studie Durchblutung und Stromflüsse im Hirn der Patienten gemessen. Beide Verfahren sind nicht invasiv, und die Daten konnten mittels am Kopf angebrachter Elektroden gesammelt werden. In der Experimentalbedingung wurden den Probanden einfache Fragen gestellt, deren Antwort bekannt war und die mit ja und nein beantwortet werden konnten. Anhand der EEG und fNIRS Daten wurden dann Rückschlüsse gezogen auf die Antwort, die die Probanden gedacht haben. Als Ergebnis berichteten Chaudhary et al. (2017), dass die Probanden in 70% der Fälle korrekt antworteten. Die Autoren beschreiben selbst, welch große Hoffnung dies für Patienten und Angehörige bedeutet. Details zur Studien können nachgelesen werden in Chaudhary, Xia, Silvoni et al. [1].

Martin Spüler, ein Tübinger Informatiker, der ebenfalls an dem Projekt beteiligt war, analysierte die Daten jedoch neu und fand keine überzufällige Korrektheit der Antworten der Probanden, die durch die EEG und fNIRS Daten berechnet worden waren. Die systematische Replikation der Datenanalyse des Orginalartikels von Chaudhary et al. (2017) war ihm nicht möglich, da nicht genug Informationen und Daten veröffentlicht worden waren. In seinem Artikel von 2019 kritisierte Spüler außerdem die kleine Stichprobe und den Varianzverlust durch das Aggregieren der Daten, sowie die Alphafehlerkumulierung aufgrund multipler statistischer Hypothesentests. (Die ausführliche Beschreibung der Probleme findet sich in SPÜLER [6].) Desweiteren wandte sich Martin Spüler bereits 2018 an die Eberhard Karls Universität Tübingen wegen des Verdachts von wissenschaftlichem Fehlverhalten. Sowohl die Untersuchungskommission der Universität als auch die Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) bestätigten wissenschaftliches Fehlverhalten von Birbaumer und Chaudhary. Die Vorwürfe bezogen sich auf die fehlende Transparenz bezüglich der Daten und ihrer Analyse sowie auf eine selektive Datenauswahl, die natürlich die statistischen Ergebnisse verfälscht haben könnten. Beide Institutionen warnen jedoch auch, dass dies in keinster Weise bedeute, dass eine Kommunikation mit vollständig gelähmten Menschen nicht möglich wäre. Die Ergebnisse von Chaudhary et al. (2017) könnten nur nicht als Beweis dafür angesehen werden, dass dies möglich sei. Das Urteil, dass in diesem Falle wissenschaftliches Fehlverhalten vorliege, zog zahlreiche Strafen nach sich. Niels Birbaumer jedoch hält bis heute daran fest, sich nicht falsch verhalten zu haben und versucht in weiteren Studien zu zeigen, dass die Kommunikation mit ALS Patienten in diesem Stadium der Erkrankung doch möglich sei. In einem gerichtlichen Vergleich einigten sich DFG und Birbaumer auf eine Verkürzung seiner Strafe. Es gab jedoch keine Einigung bezüglich der Frage, ob die Studie von 2017 sauber und den Kriterien von wissenschaftlichem Arbeiten in solch sensiblen Themengebieten gerecht durchgeführt wurde. (Siehe dazu auch FORSCHUNGSGEMEINSCHAFT [3].)

Was also offen bleibt, ist die Frage, ob eine Kommunikation mit vollständig gelähmten Personen durch die Messung der Hirnaktivität möglich ist, sowie die Frage, was verändert werden muss, um replizierbare Forschungsergebnisse zu erhalten.

2. Die Replizierbarkeit psychologischer Studien

Um aber zunächst das Ausmaß des Problems der fehlenden Replizierbarkeit zu überblicken, wenden wir uns einem weiteren Beispiel zu. Die Open Science Collaboration schätzte in einem groß angelegten Replikationsversuch die Quote an replizierbaren Studien in der Psychologie. Dafür wurden 100 psychologische Studien des Jahres 2008 aus 3 Journals ausgewählt und ca. 270 Forschende versuchten, die Ergebnisse zu replizieren. Da 97% aller Originalstudien einen signifikanten Effekt berichteten, wäre mit einem Replikationserfolg in 92% der Replikationsstudien zu rechnen gewesen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 1 dargestellt.

Es erreichten nur 36% der Replikationsstudien ein signifikantes Ergebnis in derselben Richtung wie der Originaleffekt. Bei 80% der Replikationssstudien war die Effektgröße geringer als in der Originalstudie. Was die Autoren zu der Schätzung veranlasst, dass nur zwischen einem Drittel und der Hälfte aller psychologischer Studien replizierbar sind. (Für eine genauere Beschreibung, sowie die Details der Ergebnisse, siehe Collaboration [2].)

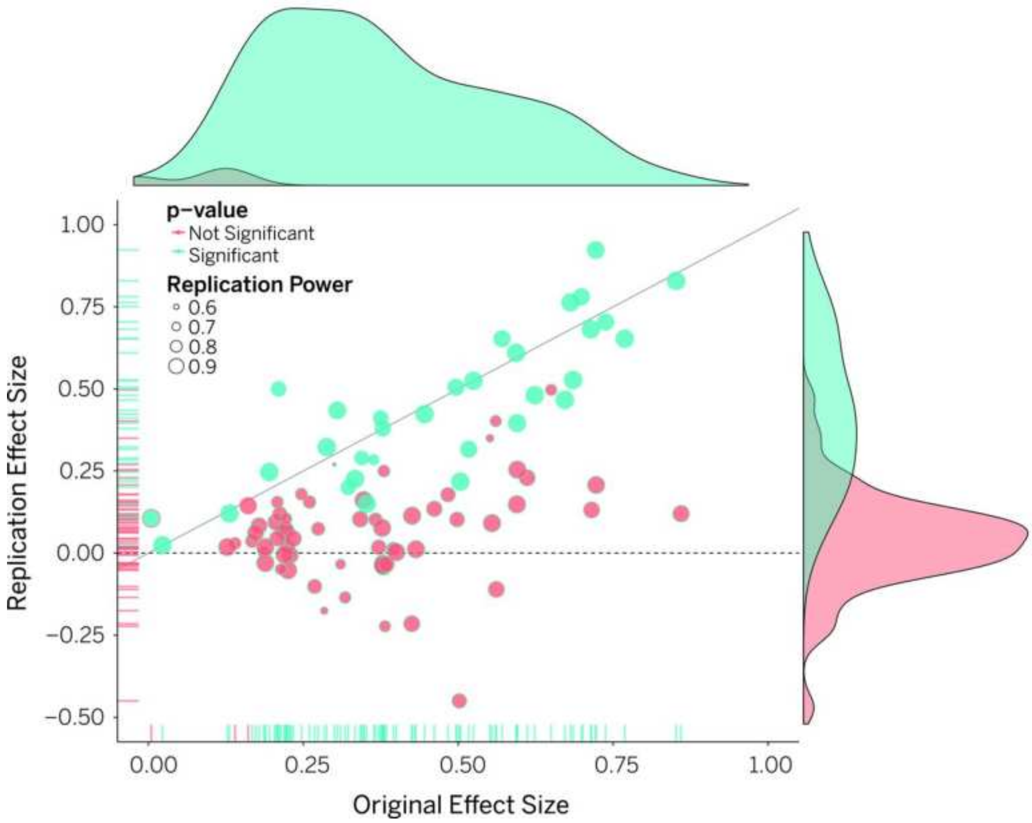


Abbildung 1: Originaldarstellung der Ergebnisse aus Collaboration [2]. Die Abbildung zeigt die Effektgrößen von Originalstudie und Replikationsversuch im Vergleich.

Ein vernichtendes Urteil für die Psychologie als glaubwürdige Wissenschaft. Jedoch kann diese Studie auch als erneuter Weckruf wahrgenommen werden, um die Bedingungen, unter denen Forschende arbeiten, zu überprüfen und zu verbessern.

Ursachen mangelnder Replizierbarkeit

Woher kommt also das Problem? Wie so oft, ist es nicht einfach die Ursachen auszumachen. Abbildung 2 versucht sich den Problemen anzunähern.

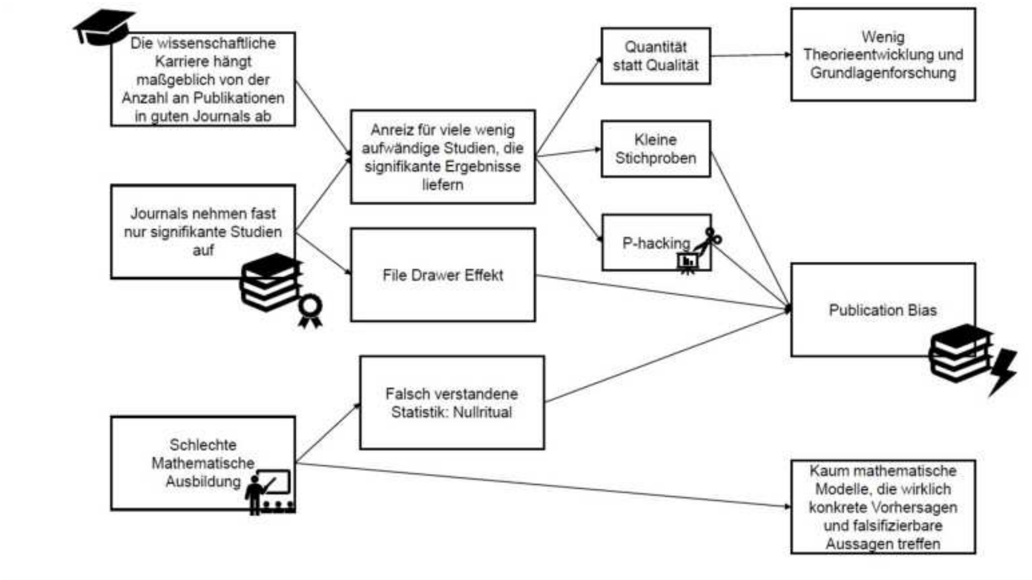


Abbildung 2: Faktoren die fehlende Replizierbarkeit befördern

Die Ursachen für die fehlende Replizierbarkeit in der Psychologie, genauso wie in anderen experimentellen und beobachtenden Wissenschaften sind vielfältig. Klar ist jedoch, dass das Publikationssystem maßgeblich zu dem Problem beiträgt. Zu beachten sind vor allem zwei Faktoren.

1. Die Karriere eines jeden Forschenden ist abhängig von der Anzahl seiner Publikationen in angesehenen Journals. Schon für die Promotion ist vorgeschrieben, wie viele Paper publiziert werden müssen. Aber auch im weiteren Verlauf der wissenschaftlichen Karriere werden Universitätsstellen vor allem an diejenigen vergeben, die die meisten und am besten anerkannten Paper veröffentlicht haben. Das setzt natürlich den Anreiz für einfache, wenig aufwändige Studien, die signifikante Ergebnisse liefern und damit in anerkannten Journals angenommen werden.

2. Journals nehmen oder nahmen bis in die jüngste Vergangenheit fast ausschließlich Paper an, die einen signifikanten Effekt fanden. Um also seine Ergebnisse publizieren zu können, sollte eine Studie ihre Hypothesen bestätigen. Tut sie das nicht, ist der Anreiz hoch, zu »tricksen« bis die Studie signifikante Ergebnisse liefert.

Die beiden Punkte gemeinsam behindern natürlich die Theorieentwicklung und Grundlagenforschung. Als Effekt resultieren wenig riskante Studien, die anhand von kleinen Stichproben absurd große Effekte finden, statt qualitativ hochwertiger Forschung, die die genauen Wirkmechanismen untersucht.

Eine weitere Folge ist, dass nicht signifikante Studien gar nicht erst veröffentlicht werden. Dieses Phänomen wird als *File Drawer Effect* bezeichnet. Das Nichtveröffentlichen widersprüchlicher Ergebnisse ist natürlich nicht nur eine Verschwendung von Forschungsgeldern, sondern führt auch zu einem systematisch verzerrten Bild der Realität in der bestehenden Literatur. Es resultiert also eine vollkommen verzerrte Literatur, anhand derer die Effektgröße systematisch überschätzt wird. Diese Verzerrung heißt *Publication Bias.*

Auch die häufig viel zu kleinen Stichproben tragen zu diesem Publication Bias bei und werden durch ihn wiederum verstärkt, da für einen als groß berichteten Effekt in einer erneuten Studie weniger Probanden untersucht werden. Die Wahrscheinlichkeit einen existierenden Effekt zu entdecken, wird als *Power* des statistischen Tests bezeichnet. Die Power hängt maßgeblich von der Größe und der Streuung der untersuchten Stichprobe, sowie der Effektgröße und dem statistischen Test ab. Eine geringe Power führt jedoch nicht nur dazu, dass existierende Effekte nicht entdeckt werden, sondern auch dazu, dass zufällige Unterschiede in den wenigen Daten als große Effekte interpretiert werden. Diese gehen dann als (nicht replizierbare) Erkenntnisse in die wissenschaftliche Literatur ein und fördern ihrerseits wieder den Publication Bias.

Desweiteren wird, wie oben bereits erwähnt, ein Anreiz gesetzt, Studien zur Signifikanz zu drängen. Um das detailllierter zu verstehen, müssen wir uns kurz mit der Theorie von statistischen Tests auseinandersetzen. Ein statistischer Hypothesentest entscheidet anhand der Daten zwischen Ablehnung oder Beibehaltung der sogenannten Nullhypothese. Die Daten werden dafür zu einem Wert, der Teststatistik, zusammengefasst. Die Teststatistik folgt unter Annahme der Nullhypothese einer gewissen Verteilung. Wir betrachten nun den sogenannten p-Wert. Er bezeichnet die Wahrscheinlichkeit eine (im Sinne der Nullhypothese) mindestens so extreme Teststatistik zu erhalten wie die beobachtete, gegeben die Nullhypothese ist wahr. Ist dieser Wert sehr gering, zum Beispiel kleiner als 5%, so lehnen wir die Nullhypothese ab und nennen die Studie signifikant. Es bleiben jedoch 5% Restrisiko, dass wir die Nullhypothese fälschlicherweise abgelehnt haben. Diese 5% heißen dann Alphafehler. Da Studien nun jedoch fast ausschließlich publiziert werden, wenn der p-Wert kleiner $\alpha = 5\%$ ist, wird ein großer Anreiz geschaffen den p-Wert künstlich kleiner zu machen. Das heißt dann *p-Hacking* und geschieht zum Beispiel durch nachträgliches ändern der Hypothesen, selektive Datenauswahl, Manipulation der Stichprobe oder ungeplanter Untersuchung von Teilstichproben oder Teilhypothesen. Vieles davon geschieht jedoch ohne bösen Willen. Willentliche Manipulation des p-Wertes, um eine Studie publizieren zu können, ist wissenschaftliches Fehlverhalten. Das wahllose Rumprobieren, bis ein signifikantes Ergebnis resultiert, oder das Treffen von Entscheidungen nach Kenntnis der Daten, ist jedoch oft Ausdruck der Ahnungslosigkeit, dass dieses Vorgehen ein statistisches Schließen vollkommen unmöglich macht. Trotzdem führt das Vorgehen natürlich zu unbrauchbaren Ergebnissen, die keinerlei Erkenntnis zulassen. Damit befeuert p-Hacking den Publication Bias und verursacht somit doppelt Probleme.

Ein weiterer Punkt, auf den bereits angespielt wurde, ist die schlechte mathematische Ausbildung, die viele Forschende genossen haben. Gerade in der Psychologie werden zwar viel Methodenveranstaltungen gelehrt, Mathematikvorlesungen werden jedoch nicht angeboten. Diese fehlende Ausbildung sorgt ihrerseits natürlich wieder für eine schlecht oder falsch verstandene Statistik. Statt mathematische Modell zu überprüfen, die konkrete, falsifizierbare Vorhersagen liefern, werden in vielen Bereichen der Psychologie Tests nach dem Nullritual durchgeführt. (Siehe dazu auch GIGERENZER, KRAUSS & VITOUCH [4].) Es werden also ungeachtet der konkreten Forschungsfrage ritualisiert statistische Hypothesentests mit » Standardannahmen« durchgeführt, ohne deren Anwendung zu hinterfragen. Eine vernünftige Theoriebildung kann so aber nicht stattfinden.

Vorschläge zur Verbesserung der Replizierbarkeit

Die hier aufgeführte Liste an Ursachen des Replikationsproblems ist keineswegs vollständig. Trotzdem sollen im Folgenden anknüpfend an die bisher beschriebenen Mechanismen Lösungsansätze vorgestellt werden, um die Situation zu verbessern:

1. Präregistrierung
   Das Einreichen von Papern vor der Durchführung der Experimente eliminiert die Abhängigkeit der Akzeptanz der Studie von der Signifikanz. Journals müssen dann alleine anhand der Methodik, der Planung und theoretischen Herleitung entscheiden, ob sie dieses Projekt unterstützen und damit veröffentlichen wollen. Zudem zwingt die Präregistrierung Forschende sowohl ihre Hypothesen als auch ihre Datenanalyseplanung vor der Datenerhebung festzulegen. Damit wirkt die Präregistierung dem File Drawer Effekt und damit dem Publication Bias entgegen. Anreize für Betrug und p-Hacking werden entzogen. Zudem wird der Fokus auf eine gute methodische Ausarbeitung gelegt, und damit der Studienplanung die angemessene Relevanz zugeschrieben.

2. Poweranalysen
   Das Festlegen eines minimalrelevanten Effekts vor der Datenerhebung er-

fordert die präzise Auseinandersetzung mit den eigenen Hypothesen. Forschende müssen somit vor Beginn ihres Experiments nicht nur festlegen, welchen Effekt sie erwarten, sondern auch wie groß der Effekt mindestens sein muss, um für sie interessant zu sein, sowie grundlegende Eigenschaften, die sie für Ihre Daten erwarten (Wertebereich, Variabilität,...). Dann kann mithilfe einer Poweranalyse die Stichprobengröße festgelegt werden, die nötig ist, um einen Effekt in dieser Größe zu finden. Damit kann am Ende eine geeignete Power des statistischen Tests für den Effekt garantiert werden. Die Probleme zu kleiner Stichproben werden somit behoben. Durch stets angemessene Stichprobengrößen kann dazu beigetragen werden, den Publication Bias zu verringern und die Anzahl der falsch positiven Befunde zu reduzieren. Wenn ein statistischer Hypothesentest unter diesen Bedingungen keine signifikanten Ergebnisse liefert, so kann geschlossen werden, dass der tatsächliche Effekt mindestens kleiner sein muss, als der kleinste noch interessante Effekt. So können nicht signifikante Studien besser interpretiert werden.

3. Methodische Ausbildung
   Da Replizierbarkeit in den Fokus der Aufmerksamkeit rückt, werden Themen wie Replikationen und Betrug in der Statistikausbildung mehr berücksichtigt. Statistik wird oft anders gelehrt als noch vor einigen Jahren. Poweranalysen zur Fallzahlplanung werden zum Beispiel berücksichtigt, aber auch Präregistrierung wird im Rahmen von Abschlussarbeiten schon praktiziert. Damit wird der Grundstein gelegt für das Bewusstsein über die Problematik und für eine Verbesserung der Situation in der Zukunft.

4. Andere Statistik
   Durch die steigende Rechenleistung von Computern können zudem immer größere Datenmengen verarbeitet und komplexere Rechnungen numerisch durchgeführt werden. Damit bieten sich ganz neue Möglichkeiten zum Einsatz Bayesscher Methoden. Auch die Analyse sehr großer Datenmengen und damit wirklich großer Stichprobengrößen wird erst durch die enorme Rechenleistung moderner Computer möglich. Theoretisch schon lange bekannte Analyseverfahren finden mit der technischen Entwicklung ihre Anwendung in der Praxis. So bleibt zu hoffen, dass Big-Data, Machine Learning, Bayessche Statistik und Co. nicht nur Trend sind, sondern auch zur Lösung statistischer Anwendungsprobleme beitragen.

5. Replikationsstudien
   Da wissenschaftliche Erkenntnisse erst als neues Wissen akzeptiert werden sollten, wenn mehrere unabhängige Studien von verschiedenen Forschungsgruppen zu demselben Ergebnis kommen, sind Replikationsstudi-

en ein unverzichtbares Instrument. Durch die Gründung von Replikationsjournals sowie der steigenden Anerkennung von Replikationsversuchen sollten diese Studien in Zukunft vermehrt durchgeführt werden. Nur so kann im Nachhinein noch der Publication Bias in der bereits bestehenden Literatur identifiziert werden und einem neuen Bias vorgesorgt werden.

6. Open Science
   Durch online Ausgaben von Journals werden immer häufiger auch die Rohdaten und Analyseskripte mit den Papern veröffentlicht. Somit kann jeder Leser die Ergebnisse der Autoren selbst überprüfen oder auch eigene Analysen durchführen. Damit können schlechte statistische Praktiken aufgedeckt werden, und es wird die Diskussion über verschiedene Schlussfolgerungen anhand derselben Datensätze angeregt.

Schließend kann nun also festgehalten werden, dass Replizierbarkeit ein grundlegendes Gütekriterium empirischer Forschung ist, das viel zu selten erreicht wird und damit alle betrifft. Die vielseitigen Ursachen fehlender Replizierbarkeit bieten zahlreiche Angriffspunkte, den Teufelskreis zu durchbrechen. Durch eine änderung des Publikationsprozesses, mehr Offenheit und mehr Diskurs besteht die Hoffnung auf eine Zukunft mit qualitativ hochwertiger Forschung unter besseren Bedingungen. Dieses Ziel ist unbedingt anzustreben, um Fehler zu vermeiden und das Vertrauen der Menschen in die Wissenschaft nicht zu enttäuschen.

Literatur

[1] U. Chaudhary, B. Xia, S. Silvoni et al. *Brain–computer interface–based communication in the completely locked-in state.* PLoS biology **15**(1) (2017) e1002593.

[2] O. S. Collaboration: *Estimating the reproducibility of psychological science.* Science **349**(6251) (2015) aac4716.

[3] D. Forschungsgemeinschaft: *DFG und Niels Birbaumer beenden Rechtsstreit durch Vergleich.* 2022
URL: www.dfg.de/foerderung/info_wissenschaft/2022/info_wissenschaft_22_29 (aufgerufen am 05. 04. 2022).

[4] G. Gigerenzer, S. Krauss & O. Vitouch: *The null ritual.* The Sage handbook of quantitative methodology for the social sciences (2004) 391–408.

[5] J. P. Ioannidis: *Why most published research findings are false.* PLoS medicine **2**(8) (2005) e124.

[6] M. SPÜLER: *Questioning the evidence for BCI-based communication in the complete locked-in state*. PLoS biology **17**(4) (2019) e2004750.

Es werde Licht
Quantengravitation und andere philosophische Ansichten über die Entstehung der Welt

Cornelia Vogel und Michael Zimmermann

Eine der großen Frage der Menschheitsgeschichte, ist die Frage nach dem Ursprung des Kosmos. Um der Beantwortung dieser Frage näherzukommen, folgen wir großen Denkern aus verschiedenen Zeitepochen und versuchen deren Gedanken zu dieser Frage nachzuvollziehen. Wir beschränken uns dabei weitestgehend auf einen europäischen Blick. Zur besseren Einordnung der Personen und ihren Wirkens werden am Anfang jedes Kapitels die jeweiligen Denker sich vorstellen. Dies sind jedoch keine wörtlichen Zitate, sondern entspringen aus der Imagination der Autoren dieses Textes und stellen dar, wie diese sich eine Selbstbeschreibung vorstellen.

Platon (1)

Ich bin Platon. In meinen Schriften beschreibe ich das Wirken und die Denkweise meines Lehrers Sokrates. Durch literarische Dialoge wusste ich den Schritt vom vermeintlichen Wissen zum eingestandenen Nichtwissen zu erklären. Ich gründete die älteste institutionelle Philosophenschule Griechenlands und meine Lehren verbreiteten sich über die gesamte antike Welt.

Platon, URL: https://bit.ly/3J6ssxi

Platon [14] beschreibt seine Sicht auf den Ursprung des Kosmos vor allem in einem seiner Spätwerke, dem Timaios. Dieser teilt sich in zwei Monologe auf. Im ersten Monolog trägt Kritias über die Entstehung Urathens vor und erklärt, dass das Wissen der Urathener von der Weisheit der Ägypter abstammt.

Anschließend trägt ein pythagoräischer Astronom, Timaios, seine Ansichten über die Entstehung der Welt und deren Natur vor. Dabei setzt er voraus, dass es zwei Wirklichkeiten gibt, das Ewige, welches auch die Vernunft und die Seele umfasst und das Veränderliche, die materielle Wirklichkeit. Diese ist durch unsere Sinne wahrnehmbar. Das Ewige kann andererseits nur denkend erfasst werden. Da der Kosmos fühlbar und sichtbar ist, ist er materiell. Laut Platon hat jede Existenz seine Ursache, denn nichts existiert aus sich selbst heraus. Die Ursache für den Kosmos personifiziert Platon, der Kosmos wird somit das Werk eines Schöpfergotts, dem Demiurgen.

Der Kosmos geht aus einem Urbild hervor, einer Idee des Demiurgen. Er stammt somit vom Ewigen ab und ist daher schön und gut geworden. Der Demiurg erschuf den Kosmos, da er selbst gut ist und gönnt alles Gute, was er selbst hat,

(1) 428/427 v. Chr.–348/347 v. Chr.

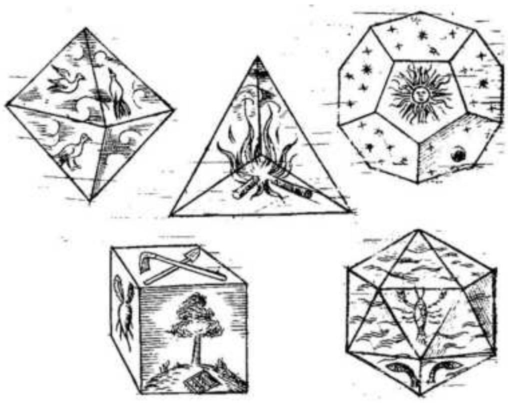


Abbildung 1: Kepler [12] zeichnete die platonischen Körper in seiner Weltharmonik

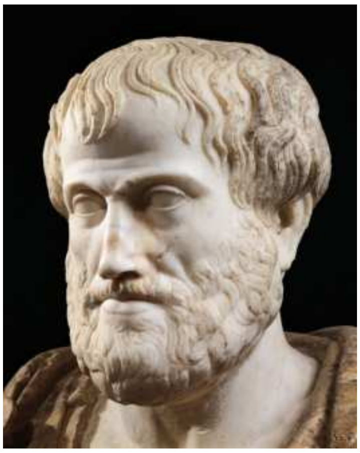
dem Kosmos. Dieser soll daher dem Demiurgen ähnlich werden.
Da es im Kosmos Vernunft gibt, besitzt das materielle Wesen des Kosmos etwas Ewiges, eine Seele. Platon lässt Timaios erklären, wie die Seele anteilig aus einer unteilbaren und teilbaren Seele zusammengesetzt ist. Die jeweilige Proportionen kommen heutigen Lesern wie ein Zahlenrätsel vor und basieren auf den harmonischen und arithmetischen Mitteln der Zweier- (1,2,4,8) und Dreierpotenzreihe (1,3,9,27).

Der Demiurg ist ewig, das heißt insbesondere, dass er unveränderlich ist und außerhalb der Zeit steht. Der Kosmos, der nach dem Vorbild des Demiurgen erschaffen wurde, stellt diese Ewigkeit als materieller, bewegter Zeitfluß dar. Damit die Zeit erkennbar wird, schafft der Demiurg die Gestirne, welche durch ihre regelmäßigen Bahnen Zeitabschnitte definieren.

Platon geht dann erneut auf die Erschaffung der Welt ein. Er legt nun den Fokus auf die vier damalig bekannten Elemente: Erde, Wasser, Luft und Feuer. Er erkannte, dass die Elemente ineinander übergehen können, zum Beispiel wird Wasser, wenn es verdunstet, zu Luft. Es muss daher etwas Grundlegenderes als die Elemente geben, welches es den Elementen erlaubt ineinander überzugehen, eine Urmaterie. Um diese begreifbar zu machen, weist er den Elementen je nach ihren Eigenschaften platonischen Körper zu. Das ursprüngliche Prinzip der platonische Körper sei, dass man deren Oberfläche in Dreiecken aufteilen kann. Der Demiurg schuf also Ordnung und den Raum dadurch, dass er aus dem Chaos der Urmaterie die Elemente schuf, indem er die ebenen Dreiecke zu den räumlichen Elementen formte. Da es insgesamt fünf platonische Körper gibt, muss es auch ein fünftes Element geben. Der Aether, wie das fünfte Element später genannt wurde, gab es nicht auf der Erde, sein Aufenthaltsort muss daher im Himmel liegen.

Aristoteles(2)

Ich bin Aristoteles, vom einstigen Schüler Platons wurde ich zum Lehrer Alexander des Großen. Ich gründete eine eigene Schule, begründete die Logik, erfand Begriffe wie Rhetorik und Bedeutung. Meine Naturlehre prägte die Denkweise der modernen Welt.



Aristoteles, URL: https://bit.ly/3ZXTUDp

Die Hauptschrift, in der ARISTOTELES [1] seine Kosmologie darlegt, heißt "De Caelo", über den Himmel. Darin schreibt er, dass es zwei grundlegende Ortsbewegungen gibt, gerade und kreisförmige. Alle weiteren Bewegungen setzen sich aus diesen beiden Bewegungsarten zusammen. Dabei nennt Aristoteles die Kreisbewegung als die vollkommene, da sie in sich selbst endet.

Bestimmte Bewegungen sind typisch für bestimmte Körper und Elemente. So fallen Erde und Wasser geradlinig herunter, Feuer und Luft steigen geradlinig auf. Hierbei kann man annehmen, dass Aristoteles, der über die Kugelform der Erde Bescheid wusste, geradlinig herunter/herauf mit der Bewegung zum Erdmittelpunkt hin bzw. vom Erdmittelpunkt weg gleichsetzte.

Neben den geradlinigen Bewegungen der bekannten Elementen, gibt es auch kreisförmige Bewegungen der Planetenbahnen. Es muss daher ein fünftes Element geben, aus dem die Planeten gemacht sind. Die lateinische Bezeichnung für den fünften Körper, „quinta essenzia", hat sich bis in den heutigen Sprachgebrauch in Form der Quintessenz gehalten. Hier widerspricht Aristoteles Platons Ausführungen im Timaios, welcher aufgrund des Leuchtens der Gestirne geschloßen hatte, dass diese aus Feuer geschaffen seien.

Die Zeit wird laut Aristoteles durch Bewegungen definiert. Im zwölften Buch seiner Metaphysik beschreibt ARISTOTELES [2], dass jede Bewegung durch andere induziert sei. Verfolgt man diese Kette zurück, d.h. reist man gedanklich in die

(2) 384 v. Chr.– 322 v. Chr.

Vergangenheit, so komme man zu einer ursprünglichen Bewegung. Diese geht laut Aristoteles vom Firmament aus, welches nach Vollkommenheit strebt und einem Gott ähnlich werden will. Die Schönheit des Gottes wirkt für das Firmament so attraktiv, dass es diesem durch die vollkommene Kreisbewegung bzw. Rotation ähnlich werden will. Der Gott bewegt also ohne sich selbst zu bewegen. Er ist der *unbewegte Beweger*.

Aristoteles Schriften gingen im frühen Mittelalter verloren. Jedoch gewinnt in dieser Zeit ein anderes Schriftwerk an Bedeutung: die Bibel.

Augustinus von Hippo(3)

> *Ich bin Augustinus und gelte als einer der vier Kirchenväter. Mein gesamtes Leben versuchte ich den christlichen Glauben als Grundlage aller Erkenntnis zu betrachten. Insbesondere den Kosmos kann man in meinen Augen nur über das Verstehen der philosophischen Ebenen der Bibel erklären. Alleine die Kosmogenese, die Entstehung der Welt, versuchte ich anhand der Genesis in fünf Werken zu erfassen.*

Augustinus, URL: https://bit.ly/3wjmtOf

Im 4. Jahrhundert öffnete Kaiser Konstantin(4) dem Christentum den Weg zur Staatsreligion. In den Anfangszeiten musste das Christentum einige Kritik aushalten, die sich nicht zuletzt am Schöpfungstext der Bibel entzündete. Diese wurde unter anderem von Neuplatonikern formuliert, die noch bis ins 6. Jahrhundert

(3) 354 n. Chr.–430 n. Chr.

(4) Zwischen 270 und 280 n. Chr.–337 n. Chr.

nach Christus Platons Schriften und im Speziellen den Timaios auslegten. Gegenüber diesem Werk scheint der in der Genesis I–III beschriebene Schöpfungstext naiv, hatte philosophisch kaum Gewicht und kein Interesse an Wissenschaft.

Um das Hexaemeron, die sechstägige Erschaffungsgeschichte des Kosmos in der Bibel, philosophisch aufzuwerten, argumentierte schon der jüdische Philosoph Philo von Alexandria [13](5) wie folgt: Mose, als Verfasser der Genesis, hat als Prinz im ägyptischen Königshaus gelebt. In Platons Timaios wurde von Kritias erzählt, dass das Wissen der Urathener aus Ägypten stamme. Somit saß Mose an der Quelle dieses Wissens, er besaß somit auch die Weisheit eines Platons und zusätzlich die Offenbarung Gottes. Die Naivität in der biblischen Schöpfungsgeschichte sei daher nur oberflächlich, der philosophische Wert lässt sich nicht auf den ersten Blick erkennen. Einer der sich um die philosophische Auslegung der biblischen Kosmogenese bemühte, war Augustinus. Er benutze neuplatonische Denkschemata und arbeitete unter anderem die Ähnlichkeit zwischen Platons Timaios und dem Hexaemeron heraus. In beiden existiert ein Schöpfergott, ein Schöpfungsakt, die Gliederung des Schöpfungsaktes. Zudem war in beiden Schriften der Gott seiner Schöpfung wohlgesonnen. In der Bibel wird dies durch die regelmäßige Betonung der Worte »und er sah, dass es gut war« verdeutlicht. Augustinus Ziel war es, den Platonismus in die Kirche miteinzubetten.

Augustinus konnte sich jedoch auch in den abgrenzenden Meinungen mit den Neuplatonikern messen. So existierte für die Neuplatoniker der Kosmos zeitlich ewig, die Schöpfung entsprach eher einer stetigen Schöpfungsquelle als einem Anfang. Dies steht im klaren Widerspruch zum biblischen Text, in dem ein ausgezeichneter Punkt den Anfang des Kosmos beschreibt. Auf die Frage, warum der Kosmos denn nicht zu einem anderen Zeitpunkt erschaffen wurde, entgegnete Augustinus, dass für den Schöpfergott der Kosmos gleichzeitig existiere, er sehe den kompletten zeitlichen Verlauf des Kosmos auf einen Blick. Eine Frage nach der Zeit über die Grenzen des Kosmos hinaus sei daher sinnlos, da Zeit nur innerhalb des Kosmos existiert. Ein Gedanke auf den sich später auch Stephen Hawking berufen wird (siehe dazu auch Brachtendorf [3]).

Im Mittelalter war die Kosmologie vor allem durch die christliche Kirche geprägt. Erst im 13. Jahrhundert kam es zu einer Renaissance der aristotelischen Lehren, welche über den arabischen Raum wieder ihren Weg nach Europa fanden. Das geozentrische Weltbild Aristoteles wurde erst durch Physiker und Theologen wie Nikolaus Kopernikus(6), Galilei Galileo(7) und Johannes Kepler(8) angezweifelt.

(5) Zwischen 20 und 10 v. Chr.–zwischen 40 und 50 n. Chr.
(6) 1473–1543
(7) 1564–1641
(8) 1571–1630

Isaac Newton (9)

Ich bin Isaac Newton. Auf meinem Grabmal wird dereinst stehen:
Hier ruht Sir Isaac Newton, der als Erster in nahezu göttlicher Geisteskraft die Bewegungen und Gestalten der Planeten, die Bahnen der Kometen und die Fluten des Meeres durch die von ihm entwickelten mathematischen Methoden erklärte, die Verschiedenheit der Lichtstrahlen sowie die daraus hervorgehenden Eigentümlichkeiten der Farben, welche vor ihm niemand auch nur geahnt hatte, erforschte, die Natur, die Geschichte und die Heilige Schrift fleißig, scharfsinnig und zuverlässig deutete, die Majestät des höchsten Gottes durch seine Philosophie darlegte und in evangelischer Einfachheit der Sitten sein Leben vollbrachte. Es dürfen sich alle Sterblichen beglückwünschen, dass ihnen diese Zierde des menschlichen Geschlechts geworden ist.

Isaac Newton, URL: https://bit.ly/3ZV37MH

Newton studierte im dörflichen Cambridge. Während anderenorts Zweifel am geozentrischen Weltbild aufkamen, wurde am Trinity College weiterhin Aristoteles Lehren gelehrt. Nachdem Newton seinen Bakkalareus abgeschlossen hatte, kam es zum Ausbruch der Pest in den Jahren 1665 bis 1667. Wie bei heutigen Pandemien wurden auch damals die Universitäten geschlossen, und Newton war gezwungen ins heimische Woolsthorpe zurückzukehren. Er hatte dort seine Wunderjahre, fand die Differential-Integralrechnung und entwickelte seine Farbenlehre. Schließlich kam es auch zu der berühmten Geschichte über den Apfel, der ihm auf den Kopf gefallen sein soll. Tatsächlich sah Newton diesen Apfel wohl nur fallen und fragte sich nach dem Grund des Fallens. Seine Antwort war, dass dieser von der Erde angezogen wurde. Wenn also ein Apfel von der Erde angezogen wurde, dann wohl auch der Mond. Andererseits zieht dann auch der Mond die Erde an, oder noch weiter gedacht, alles zieht alles an: Der erste Gedanke an ein universelles Gravitationgesetz. Es gelang ihm unter der Benutzung

(9) 1643–1727

des dritten Keplerschen Gesetzes ein $1/r^2$-Gesetz zu finden, welches die Gravitationskraft zwischen zwei Körpern beschreiben soll.

Nach den Pestjahren kehrte Newton zum Trinity College zurück. Da seine Veröffentlichungen zur Farbenlehre in der damaligen mechanisch geprägten Physik nicht die gewünschte Reaktion hervorriefen, veröffentlichte Newton seine Gedanken zur Gravitation vorerst nicht. Stattdessen widmete er sich der "Ars", der schwarzen Kunst, der Alchemie. Zudem verfasste er theologische Schriften, in denen er die Sicht vertrat, dass ein allmächtiger Gott existiere. Nicht zu Unrecht wurde er später in Heuser [10] als »Physiker Gottes« bezeichnet und hing einem israelischen Gottesbild an.

In seinem religiösen Weltbild stand Gott daher über Jesus und dem heiligen Geist. Das vertrat er als Professor am Trinity College, welches schon dem Namen nach eine Dreieinigkeit und somit eine rangliche Gleichstellung Gottes, Jesu und des heiligen Geistes beschreibt. Zudem wurde er stark vom Philosophen Henry More (10) geprägt, in dessen Welt Dämonen, Hexen und Kräfte herrschten. Dies stand ganz im Gegensatz zu der mechanischen Welt Descartes, der die damalige physikalische Lehrmeinung prägte, in welcher jegliche Bewegung durch Stöße oder durch Druck initiiert wurde. Vielleicht fiel es daher Newton einfacher als anderen, ein Gravitationsgesetz zu erdenken, welches langreichweitig und insbesondere nicht räumlich begrenzt ist. Erst auf Drängen des jungen Physikers Halley (11) veröffentlichte er zwanzig Jahre nach seinem Wunderjahr das Gravitationsgesetz

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2},$$

wobei G die Gravitationskonstante, m_1 und m_2 die Masse zweier Körper, r deren Abstand und F die Anziehungskraft zwischen beiden beschreibt.

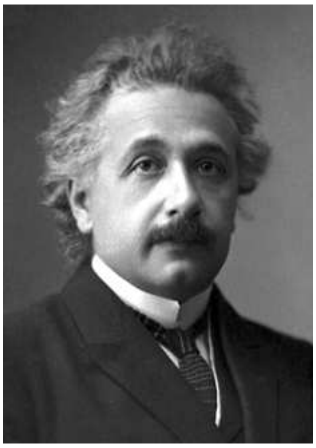
Der Beginn der modernen Physik wird mit der Entdeckung dieser Formel gleichgesetzt und von einem berühmten Physiker wie folgt gutiert:
»Newton, verzeih' mir; du fandest den einzigen Weg, der zu deiner Zeit für einen Menschen von höchster Denk- und Gestaltungskraft eben noch möglich war. Die Begriffe, die du schufst, sind auch jetzt noch führend in unserem physikalischen Denken, obwohl wir nun wissen, dass sie durch andere, der Sphäre der unmittelbaren Erfahrung ferner stehende, ersetzt werden müssen, wenn wir ein tieferes Begreifen der Zusammenhänge anstreben.« (siehe Schilpp [15])

Dieser Physiker war kein anderer als Albert Einstein.

(10) 1614–1687
(11) 1656–1742

Albert Einstein (12)

Ich bin Albert Einstein. Als Angestellter am Schweizer Patentamt revolutionierte ich die Physik, die Kosmologie und unser Verständnis der Zeit. Nachdem ich in meinem Annus mirabilis 1905 die spezielle Relativitätstheorie, den photoelektronischen Effekt, den molekularen Aufbau der Materie und die quantenmechanische Erklärung der spezifischen Wärme fester Körper gefunden habe, kam der glücklichste Gedanke meines Lebens, die Äquivalenz von träger und schwerer Masse, welcher zwei Jahre später zur allgemeinen Relativitätstheorie führte. Erst diese ermöglicht es uns, den Kosmos als physikalisches Objekt und dessen zeitliche Entwicklung zu verstehen.



Albert Einstein, URL: https://bit.ly/3Hn5iBu

Unsere Idee des Kosmos wird seit Newton weitestgehend durch physikalische Beschreibungen geprägt, wobei nur noch die Ergebnisse und die Grenzen der physikalische Theorie philosophisch und theologisch offen hinterfragt und ausgelegt werden. Einsteins großer Einfluss auf die Kosmologie basiert auf der Entwicklung der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie (siehe dazu EINSTEIN [4] und EINSTEIN [5]). Die spezielle Relativitätstheorie definiert die Metrik im Kosmos ohne Gravitationseffekte und ist gegeben durch

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2.$$

Hier entsprechen x, y und z den euklidischen Koordinaten, t der Zeit und c der Lichtgeschwindigkeit. Die allgemeine Relativitätstheorie berücksichtigt in ihrem Abstandsbegriff zusätzlich eine Krümmung der Raumzeit verursacht durch die Gravitation. Um den Verlauf des Kosmos berechnen zu können, nahm der

(12) 1879–1955

russische Physiker Alexander FRIEDMAN [6](13) zum einen an, dass das Weltall auf großen Skalen homogen ist, d. h. dass Observablen unabhängig vom Ort denselben Wert besitzen und zum anderen, dass der Kosmos isotrop ist, d.h. in alle Richtungen gleich aussieht. Diese beiden Eigenschaften werden als kosmologisches Prinzip zusammengefasst. Mit Hilfe der allgemeinen Relativitätstheorie ergibt sich für einen isotropen Weltraum die Robertson-Walker-Metrik

$$\mathrm{d}s^2 = R^2(t)\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2\mathrm{d}\theta + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2\right) - c^2\mathrm{d}t^2,$$

wobei (r, θ, φ) sphärische Koordinaten beschreiben und mit $k \in [-1, 1]$ der Krümmungsfaktor bezeichnet wird. Dieser definiert, ob der Raum eher sphärisch $(k = 1)$, hyperbolisch $(k = -1)$ oder euklidisch $(k = 0)$ ist.

In den Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}$$

wird die Metrik durch den Einsteintensor $G_{\mu\nu}$ und durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ dargestellt. Der Energietensor reduziert sich im isotropischen Fall auf

$$T_{\mu\nu} = \text{diag}_{\mu\nu}(\rho c^2, p, p, p)$$

und Λ beschreibt die kosmologische Konstante. Basierend auf diesen leitete Friedmann die nach ihm benannten Friedmann-Gleichungen ab. In diesen beschreibt p den Druck und ρ die Massen-, bzw. Strahlungsdichte. Sie sind gegeben durch die beiden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\dot{R}(t)}{R(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{1}{3}\Lambda c^2,$$
$$\frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4}{3}\pi G\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2.$$

In beiden Gleichung sind k und Λ freie Parameter. Je nach Wahl erhält man verschiedene Modelle des Kosmos. Zu Einsteins Zeit nahm man an, dass das Universum statisch ist. Dies war interessant für die Physiker, da man so Singularitäten und demnach Grenzen der Anwendbarkeit der Physik umgehen konnte. Diese würde wieder Raum für theologische und philosophische Interpretationen öffnen. Tatsächlich führte Einstein nur aus diesem Grund die kosmologische Konstante ein, da ohne sie die Friedmann-Gleichungen keine statische Lösungen zulassen.

(13) 1888–1925

Es ist Edwin Hubble [11] (14) zu verdanken, dass von der Idee eines statischen Universums Abstand genommen wurde. Er beobachtete, dass das Licht der Sterne entfernter Galaxien rötlicher erscheint, als dies auf Grund ihrer Größe erwartbar ist. Diese Rotverschiebung lässt sich ähnlich zum Dopplereffekt erklären, bei der sich eine Verschiebung zu höheren Frequenzen beobachten lässt, wenn sich eine Lichtquelle oder Tonquelle vom Beobachter wegbewegt. Der Unterschied zu diesem Effekt ist, dass die Abstandsvergrößerung nicht durch eine Bewegung initiiert ist, sondern aus einer zeitabhängigen Metrik hervorgeht.

Beschreibt man den Abstand zu einem Stern mit r, so hängt dieser also von der Zeit ab. Der zeitliche Verlauf wird durch die Expansionsrate $R(t)$ bestimmt, d.h. $r(t) = R(t-t_0)r_{t_0}$, wobei r_{t_0} der Abstand zum Zeitpunkt t_0 ist. Tatsächlich ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Metrik ausdehnt, proportional zum Abstand.

In den Friedmann-Gleichungen erhält man unter anderem eine Expansion des Universums, wenn man die kosmologische Konstante $\Lambda = 0$ setzt und k entsprechend wählt. Einstein bezeichnet deren Einführung später angeblich als »größte Eselei seines Lebens« (siehe dazu Weinstein [16]). Bis vor ca. 20 Jahren war dies auch der aktuelle Stand der Forschung, jedoch wurde dann experimentell herausgefunden, dass das Universum nicht nur expandiert, sondern zunehmend schneller expandiert. Dies führte dazu, dass man im heutigen Standardmodell, dem ΛCDM-Modell (Lambda Cold Dark Matter Modell) annimmt, dass $\Lambda > 0$ ist und der kosmologischen Konstante einen Vakuumsdruck zuordnet.

Reist man zeitlich zurück in diesem Modell, so kommt man an einem Punkt, an dem sich der gesamte Kosmos auf einen kleinen Raum zusammenzieht, und somit die Energiedichte und Temperatur beliebig groß wird, dem *Urknall*. Die mathematische Begründung dafür lieferte unter anderem Stephen Hawking.

Stephen Hawking (15)

> *Ich bin Stephen Hawking. Als mir mit 22 Jahren ALS diagnostiziert wurde, prophezeiten mir meine Ärzte, dass ich nur noch wenige Jahre zum Leben haben werde. Ich trotzte dieser Diagnose und ungeachtet des Verlustes meiner Stimme und eines Lebens im Rollstuhl wurde ich zum populärsten Physiker seit Albert Einstein. In den über 50 Jahren, die ich tatsächlich noch nach meiner Diagnose lebte, begeisterte ich unzählige junge Forscher mit meiner Wissenschaft über schwarze Löcher und meinem Zugang zur Quantengravitation.*

(14) 1889–1953
(15) 1942–2018

Stephen Hawking, URL: https://bit.ly/3JoGSJB

Im Jahre 1964 wurde zum ersten Mal der Mikrowellenhintergrund gemessen. Durch die Berechnungen von Hawking & Penrose [9](16) lässt sich die oben beschriebene Zeitreise in die Vergangenheit durchführen und diese Mikrowellenstrahlung erklären. Danach hat sich der Kosmos kurz nach dem Urknall stark ausgedehnt und nahe Strahlungsquellen entfernten sich von uns weg. Deren Strahlung wurde nach der Entstehung der Materie von dieser so gekrümmt, dass das Licht in der heutigen Zeit auf der Erde gemessen werden kann. Durch die Rotverschiebung liegt deren Frequenz nun aber im Mikrowellenbereich.

Es scheint absurd, dass mit Hawking ausgerechnet der Physiker, der mathematisch aus der Relativitätstheorie den Urknall herleitete, anschließend zu seinem größten Widersprecher wurde. Der Grund hierfür liegt laut Hawking darin, dass sobald der Kosmos stark zusammengeschrumpft ist, quantenmechanische Effekte nicht länger vernachlässigt werden können. Hawking, Kober & Pössel [8] benutzten für ihre quantenmechanische Beschreibung den Feynmanschen Pfadintegralformalismus. Beim zeitlichen übergang von einem Zustand in einen anderen wird dabei die Wellenfunktion des Kosmos mit der Phase multipliziert, welche der klassischen Wirkung entlang eines bestimmten Pfades entspricht. Anschließend wird über alle möglichen Pfade integriert. Bei dieser Integration wird als Rechentrick die sogenannten Wick-Rotation benutzt, in der die reellwertige Zeit t durch $i\tau$ ersetzt wird.

Somit ist die Metrik (in der speziellen Relativitätstheorie) nicht mehr durch

$$\mathrm{d}s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2\mathrm{d}t^2$$

gegeben sondern durch

$$\mathrm{d}s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + c^2\mathrm{d}\tau^2,$$

der Metrik eines vierdimensionalen euklidischen Raumes. Analoges gilt für die Metrik der allgemeinen Relativitätstheorie. Hawking interpretiert dies nicht mehr als Rechentrick sondern als tatsächliche Änderung der Raumzeit und der übergang wird als Hartle-Hawking-Instanton bezeichnet. Laut Hawking änderte sich also die Metrik des Kosmos kurz bevor es zum Urknall kommt und die Welt

(16) R. Penrose, geb. 1931

befindet sich in einem zeitlosen vierdimensionalen Raum. Da diese Beschreibung des Kosmos keine Singularitäten aufweist, besitzt hier die physikalische-mathematische Darstellung des Kosmos keine Grenzen mehr und wird somit als no-boundary-proposal bekannt. Was die philosophischen/theologischen Konsequenzen seines Ergebnisses bedeuten, ist dem atheistischen Hawking durchaus bewusst und kommt ihm nicht völlig ungelegen. Er interpretiert sie so:

»Wenn das Universum einen Anfang hatte, können wir von der Annahme ausgehen, dass es durch einen Schöpfer geschaffen worden sei. Denn wenn das Universum wirklich völlig in sich selber abgeschlossen ist, wenn es wirklich keine Grenze und keinen Rand hat, dann hätte es auch weder einen Anfang noch ein Ende: Es würde einfach sein. Wo wäre dann noch Raum für einen Schöpfer.« (siehe Hawking [7])

Hawking vergleicht sein Ergebnis mit Augustinus' Zeitinterpretation. Wie Augustinus kommt er zu dem Schluss, dass Zeit nur innerhalb des Kosmos existiert, kommt jedoch vollkommen ohne Schöpfergott aus.

Bei jedem dieser Denker kam es also zu einem Zusammen- oder Gegenspiel zwischen logischen philosophischen und theologischen Argumenten und naturwissenschaftlichen und mathematischen überlegungen. Es bleibt spannend, ob eines Tages Einsteins Relativitätstheorie und Hawkings no-boundary-proposal ähnlich eingeschätzt werden wird, wie z.B. Platons und Aristoteles Wirken heutzutage.

Die Autoren bedanken sich bei Prof. Dr. J. Brachtendorf für das Gespräch im Vorfeld des Vortrages und weisen auf die ausführliche Bearbeitung der Thematik in seiner Vorlesung Philosophische Kosmologie hin, die sich auf TIMMS findet.

Literatur

[1] Aristoteles: *De Caelo*. De Gruyter (2009).

[2] Aristoteles: *Metaphysik*. Rowohlt Taschenbuch Verlag (2019).

[3] J. Brachtendorf: *Augustinus, Stephen Hawking und der Anfang der Zeit.* Theologie und Philosophie **93**(4) (2018) 481–501.

[4] A. Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper.* Ann. Phys. **4** (1905).

[5] A. Einstein: *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.* 1923.

[6] A. Friedman: *Über die Krümmung des Raumes.* Zeitschrift für Physik **10**(1) (1922) 377–386.

[7] S. Hawking: *Eine kurze Geschichte der Zeit.* Rowohlt Verlag (2011).

[8] S. W. Hawking, H. Kober & M. Pössel: *Das Universum in der Nussschale.* Hoffmann und Campe (2001).

[9] S. W. HAWKING & R. PENROSE: *The singularities of gravitational collapse and cosmology*. P. Roy. Soc. Lond. A Mat. **314** (1970) 529–548.

[10] H. HEUSER: *Der Physiker Gottes – Isaac Newton oder Die Revolution des Denkens*. Verlag Herder (2005).

[11] E. HUBBLE: *A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae*. P. Natl. Acad. Sci. USA **15**(3) (1929) 168–173.

[12] J. KEPLER: *Weltharmonik – Unveränderter Nachdruck der Ausgabe von 1939*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag (2006).

[13] PHILO VON ALEXANDRIA: *De vita Mosis*. De Gruyter (1963).

[14] PLATON: *Timaios*. Felix Meiner Verlag (2017).

[15] P. A. SCHILPP: *Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher: eine Auswahl*. Springer-Verlag (2019).

[16] G. WEINSTEIN: *George Gamow and Albert Einstein: Did Einstein say the cosmological constant was the "biggest blunder" he ever made in his life?* arXiv physics.hist-ph (2013).

Eine Ökonomie jenseits von Markt und Plan?

Hannes Wagener

Auf die großen Fragen zur sozialen Ungerechtigkeit und ökologischen Nachhaltigkeit findet unsere Gesellschaft offenbar keine befriedigenden Antworten. Statt die großen Problem zu lösen, schlittern wir von einer Krise in die andere. Liegt das Problem vielleicht im System, wie wir wirtschaften? Allgemein bekannt sind die Systeme Marktwirtschaft und Planwirtschaft (mit verschieden Abstufungen), diese scheinen jedoch keine Antworten auf die großen Probleme zu geben. Deswegen soll der Frage nachgegangen werden, ob es alternative Wirtschaftssysteme jenseits der klassischen Systeme Markt- oder Planwirtschaft gibt.

Volkswirtschaftliche Grundlagen

Ein Wirtschaftssystem wird vor allem durch die sog. Wirtschaftsordnung geprägt. In dem Nachschlagewerk »Duden Wirtschaft von A bis Z« steht dazu: »Wirtschaftsordnung, die Summe der Rahmenbedingungen, die den organisatorischen Aufbau und den Ablauf aller wirtschaftlichen Tätigkeiten innerhalb eines Landes regeln. Im Hinblick auf die Abstimmung der wirtschaftlichen Aktivitäten werden die grundsätzlichen Modelle Marktwirtschaft einerseits und Zentralverwaltungswirtschaft bzw. Planwirtschaft andererseits unterschieden.« [2, S.57]. Schon hier ist eine Fokussierung auf die zwei klassischen Modelle zu erkennen.

Dabei ist Marktwirtschaft grob gefasst eine »Wirtschaftsordnung, in der Privateigentum an den Produktionsmitteln sowie die Abstimmung aller wirtschaftlichen Handlungen bei dezentraler Wirtschaftsplanung über den Markt typisch ist. [...] Der Staat setzt in der Marktwirtschaft nur Rahmenbedingungen fest, greift selbst aber nicht in das Marktgeschehen ein. Das Recht auf selbstständige Betätigung und eigenständige wirtschaftliche Entscheidungen ist sichergestellt. Jedes Unternehmen entscheidet nach betriebswirtschaftlichen Gesichtspunkten, welche Güter und Leistungen produziert werden sollen. Der Wettbewerb der Unternehmen um die Verbraucher beeinflusst dabei Qualität, Menge und Preis der Waren und Leistungen, sodass die Verbraucher indirekt Einfluss auf das Angebot der Erzeugnisse haben (Konsumfreiheit). Die Preise für Waren und Leistungen bilden sich nach Angebot und Nachfrage auf Märkten. Die volkswirtschaftlichen Produktionsmittel gehören privaten Unternehmen und die Höhe des Gewinns ist der entscheidende Auslöser für deren wirtschaftliches Handeln.« [2, S.31f]. Planwirtschaft ist dagegen »eine Wirtschaftsordnung, in der das gesamte wirtschaftliche Geschehen von einer zentralen Stelle nach politischen und wirtschaftlichen Zielvorstellungen geplant, gelenkt und verwaltet wird. Der Staat bzw. staatliche Planungsbehörden auf allen Planungsebenen bestimmten die gesamte Produktion (d. h., wer welche Güter womit herstellt), die Verteilung (d. h., wer welche Güter wo erhält) und die Preise aller Güter und Dienstleistungen.« [2, S.39].

Für ein alternatives Wirtschaftssystem müsste also eine neue Wirtschaftsordnung definiert werden, wobei aus volkswirtschaftlicher Sicht folgende Fragen zu beantworten sind: »Wer soll die ökonomischen Entscheidungen treffen? [...] Wie sollen in einer arbeitsteiligen Welt die Vorstellungen von Millionen von Wirtschaftssubjekten so aufeinander abgestimmt werden, dass die gesellschaftliche Wohlfahrt optimiert wird? [...] Dazu ist wiederum zu klären: Wie kommen dabei die verhaltenssteuernden Informationen zustande? [...] Wie erfolgt dabei durch einen Mix aus Motivations- und Kontrollelementen eine Lenkung der Wirtschaftssubjekte im Sinne der Gesellschaft? [...] Wer soll in welchem Umfang in den Genuss des produzierten „Güterkuchens“ kommen? « [1, S.802].

Die Plurale Ökonomik

Sucht man nach alternativen Wirtschaftssystemen, stößt man auf die Bewegung der Pluralen Ökonomik. Dies ist eine Bewegung von Lehrenden und Studierenden der Wirtschaftswissenschaften, die eine realitätsferne Theoriebildung und mathematische Modellierung sowie eine wissenschaftliche »Monokultur der Neoklassik« kritisieren (Vgl. [3, §10.2.1]). So schreibt die »International Student Initiative for Pluralism in Economics« in einem offenen Brief 2014: »Die Weltwirtschaft befindet sich in einer Krise. In der Krise steckt aber auch die Art, wie Ökonomie an den Hochschulen gelehrt wird [...]. Die Lehrinhalte formen das Denken der nächsten Generation von Entscheidungsträgern und damit die Gesellschaft [...]. Wir, 40 Vereinigungen von Studierenden der Ökonomie aus 19 verschiedenen Ländern, sind der Überzeugung, dass es an der Zeit ist, die ökonomische Lehre zu verändern. Wir beobachten eine besorgniserregende Einseitigkeit der Lehre [...].« Insbesondere wird eine Versteifung auf deduktive Methoden, geprägt durch »mathematische« Formeln und Modellen und eine daraus folgende realitätsferne Modellbildung kritisiert. Sie fordern die vermehrte Einstellung von Lehrenden und Forschenden, die theoretische und methodische Vielfalt in die Studiengänge der Ökonomik tragen sowie die intensive Kooperationen mit sozialwissenschaftlichen oder geisteswissenschaftlichen Fakultäten oder Aufbau spezieller Einrichtungen zur Verantwortung interdisziplinärer Programme. (Vgl. [3, §10.2.1]). Die Frage nach einem alternativen Wirtschaftssystem scheint somit selbst für die Wirtschaftswissenschaften keine einfache Frage zu sein.

Entwurf einer Wirtschaftsdemokratie: Das »Bontrup-Modell«

Insgesamt findet man wenige umfassende Alternativen für eine Wirtschaftsordnung finden. Es soll nun aber, um wenigstens ein Beispiel zu nennen, das »Bontrup-Modell« einer Wirtschaftsdemokratie, das nach *Heinz-J. Bontrup*, einem Wirtschaftswissenschaftler, benannt ist, vorgestellt werden, dies ist aus [1, §8.4.5] entnommen.

Die Wirtschaftsdemokratie nach Bontrup umfasst im wesentlichen folgende Eigenschaften:

1. Den Staat sieht Bontrup als notwendigen Überbau mit seiner stabilisierenden und rahmensetzenden Rolle. Dabei fordert er jedoch mehr Demokratie im Staat: Er stellt sich eine Partizipation der Bürger an politischen Planungen und Entscheidungen in den Parlamenten vor, ähnlich wie in der Schweiz. Gleichzeitig soll dabei Lobbyismus minimiert werden. Insbesondere soll dazu die Partei-

enfinanzierung ohne Spenden ermöglicht werden sowie mehr innerparteilicher Demokratie umgesetzt werden.

2. Das Grundgesetz in Deutschland ist laut Bontrup ordnungstheoretisch nicht neutral, denn Eigentum wird im Grundgesetz geschützt, aber ökonomisch nicht differenziert. Das ermöglicht Unternehmern über das im Unternehmen eingesetzte Kapital frei zu entscheiden, auch wenn es gegen die gesamtgesellschaftlichen Interessen steht. Dieser Zustand im Grundgesetz verhindert die Verwirklichung anderer Ordnungsmodelle, also ist eine Grundgesetzänderung notwendig.

3. Derzeit entscheiden vor allem die Kapitaleigner in den Unternehmen. Im Zuge der Demokratisierung sollen die Entscheidungen nun in sog. Unternehmensräten getroffen werden. Diese bestehen aus durch die Belegschaft gewählte Vertreter und einer gleichen Anzahl an Vertretern der Eigentümer sowie Vertreter der Öffentlichkeit, wie Verbraucherschützer, staatliche Vertreter und Umweltschützer, denn das Handeln des Unternehmens dient nicht nur dem unternehmerischen Interesse sondern ist für die gesamte Gesellschaft von Belang. Der Unternehmensrat in einem Unternehmen wählt den Managementausschuss, der für das operative Tagesgeschäft verantwortlich ist, und kontrolliert diesen.

4. Da aktuell Eigentum an Produktionsmitteln den Produktionsprozess bestimmt, soll eine neue Eigentumsform entstehen. Gewinn und Kapital sollen nicht mehr in persönliches Eigentum übergehen, sondern dem Unternehmen selbst gehören. Das im Unternehmen verbleibende Kapital wird »neutralisiertes Kapital« genannt, eine Eigentumsform, die es so bisher nicht gibt. Dadurch wird das Investitionsmonopol der jetzigen Kapitaleigner aufgehoben.

5. Demokratische Unternehmen müssen sich trotzdem am Markt im Wettbewerb messen. Zu befürchtende Entlassungen und Lohnkürzungen sollen gesetzlich verboten werden, solange das Ergebnis der unternehmerischen Gewinn- und Verlustrechnung vor Abschreibungen positiv ist; somit entsteht kein Verlust für das Unternehmen. Der Wettbewerb soll staatlich umfassend reguliert werden, um gewünschte Nebeneffekte zu vermeiden.

Fazit

Es gibt große (harte) Probleme, auf die bisherige Wirtschaftsformen keine adäquaten Antworten finden. Dabei ist die Volkswirtschaftslehre, die Lösungen anbieten sollte, selber in einer Krise. Hoffnung gebend könnte die Bildung der Pluralen Ökonomik sein, die sich mit neuen Ideen und Konzepten der Probleme annehmen könnte. Allerdings haben die Vertreter der Pluralen Ökonomik bisher wenige allgemeine neue Konzepte hervorbringen können. Das Bontrup-Modell ist dabei letztlich auch eine Marktwirtschaft mit neuen Entscheidern und veränderten Eigentumsverhältnissen.

Deswegen stellt das Bontrup-Modell für mich keine Alternative zu Markt- oder Planwirtschaft dar, sondern ist vielmehr eine weitere Variante von diesen. Somit ist die Frage nach einem alternativen Wirtschaftssystem weiterhin für mich unbeantwortet. Ich würde die Frage nun umformulieren zu: Kann es überhaupt ein System jenseits des Spektrums zwischen Markt- und Planwirtschaft geben?

Literatur

[1] H.-J. BONTRUP & R.-M. MARQUARDT: *Volkswirtschaftslehre aus orthodoxer und heterodoxer Sicht.* De Gruyter Oldenbourg (2021).

[2] A. POLLERT, B. KIRCHNER & J. M. POLZIN: *Duden Wirtschaft von A bis Z: Grundlagenwissen für Schule und Studium, Beruf und Alltag*. Bibliographisches Institut (2013).

[3] U. WEISSER: *Wirtschaftstheorie ohne Wirklichkeit ? Eine Grundlagenkritik.* Frank & Timme (2017).

Unbehagen - Theorie der überforderten Gesellschaft

Maximilian Weinberg

In meinem Vortrag stellte ich das Buch »Unbehagen« von Nassehi [1] vor. Es versucht mithilfe der Systemtheorie Niklas Luhmanns die vermeintliche Überforderung unserer Gesellschaft mit den Herausforderungen der Klimakrise und der Pandemie zu erklären.

Armin Nassehi wurde 1960 in Tübingen geboren und studierte Soziologie, Philosophie und Erziehungswissenschaften in Münster. Dort promovierte er ebenfalls in Soziologie und habilitierte sich über Insassen sowjetischer Zwangsarbeitslager. Seine Forschung orientiert sich an der Systemtheorie des Soziologen Niklas Luhmann (1927-1998). Nassehi wurde mit mehreren Preisen ausgezeichnet, etwa für die Förderung und Bereicherung kultureller Werte und seine öffentliche Darstellung der Soziologie. Außerdem war er Mitglied im Expertenrat Corona in NRW.

Nassehi leitet seine Ausführungen mit der Feststellung ein, dass die Gesellschaftsentwicklung der Moderne mit Entzauberung und Sinnverlust einhergeht. Bereits Sigmund Freud halte den Menschen für modernitätsunfähig, und nach Charles Taylor scheitere die gesellschaftliche Kohäsion am Individualismus, der zu Narzissmus neigt. Trotz steigender well-being-Indizes gebe es ein Unbehagen in der Gesellschaft und eine Überforderung im Umgang mit den Krisen unserer Zeit. Dieses Unbehagen möchte Nassehi theoretisch untersuchen.

Er beginnt mit einem historischen Rückblick auf das Erdbeben 1755 in Lissabon. Am Beispiel dieses Ereignisses charakterisiert er den Übergang zur Moderne, der sich vor allem dadurch auszeichne, dass nun nicht mehr Gott sondern der Mensch selbst für gesellschaftliche Verhältnisse verantwortlich gemacht wird. An die Stelle der Frage, warum Gott die Welt so gestaltet hat, wie wir sie vorfinden (die Theodizee-Frage), tritt nun die Frage, warum wir uns so verhalten und so die Gesellschaft gestalten, wie wir es tun (Soziodizee-Frage). Dieser Umstände sind wir uns aber meistens nicht bewusst. Wir treffen beispielsweise Entscheidungen ohne darüber nachzudenken, wie abhängig unser Handeln von gesellschaftlichen Strukturen ist.

Die mangelnde Aktivität unserer Gesellschaft im Angesicht der Klimakrise wird von manchen Autoren (bspw. der Wirtschaftswisschenschaftler Niko Paech) auf einen mangelnden Willen zur Veränderung zurückgeführt. Nassehi hingegen hält diese Wahrnehmung für verzerrt. Er vergleicht die wahrgenommene Untätigkeit mit dem harten Lockdown im März 2020: Während kurzzeitig der Eindruck entstand, dass drastische Maßnahmen zu eine erfolgreichen Krisenbewältigung führen, zeigte sich im Sommer die Kurzlebigkeit dieser Einschätzung. Der Wunsch nach schnellem und entschlossenem Handeln ergebe sich lediglich aus dem individuellen Wunsch nach Selbstwirksamkeit der unbewusst auf gesellschaftliche Prozesse übertragen werde.

Das Scheitern der drastischen Maßnahmen werde aber falsch interpretiert. Es werde ein Widerspruch in den Interessen verschiedener sozialer Gruppen diagnostiziert, der mit Gemeinschaftsrhetorik überspielt wird (etwa »Nous sommes en guerre!« von Emmanuel Macron). Vielmehr liege es an der strukturellen funktionalen Differenzierung der Gesellschaft. Verschiedene Bereiche der Gesellschaft (Politik, Recht, Wissenschaft etc.) funktionieren in der Moderne jeweils nach ihrer eigenen Logik, die nicht unbedingt kompatibel ist mit den Funktionslogiken anderer Bereiche. Diese Diversifizierung ist einerseits effektiv, andererseits erschwert sie die Koordination zwischen den verschiedenen Bereichen der Gesellschaft.

Außerdem werde das Scheitern überschätzt, denn Fortschritte passierten meist im Hintergrund auch ohne entschlossene Maßnahmen. Hier verweist Nassehi auf das Integrationsparadox von el-Mafaalani: Die Probleme von mangelhafter Integration und rassistischen Strukturen erscheinen uns heute größer denn je, trotz der Tatsache, dass es in den letzten Jahrzehnten große Fortschritte gab. El-Mafaalani argumentiert, dass diese falsche Wahrnehmung dadurch zustande komme, dass die Veränderungen, die in dieser Zeit stattfanden auch die Aufmerksamkeit verstärkt hat, die diese Probleme erfahren.

Nachhaltigen Erfolg versprächen vielmehr kleine Maßnahmen von einzelnen Personen und Organisationen, die nicht gleich gesamtgesellschaftlich implementiert werden. Ein erfolgreiches Beispiel dafür sieht Nassehi in der Sterbehilfe. In diesem Problembereich zeige sich ein konstruktiver Dialog zwischen Medizin, Ethik, Recht und anderen Gesellschaftsbereichen. Der Dialog wurde nicht staatlich organisiert und seine Lösungen sezten sich von alleine durch (»trade-tested betterments«). Hierin sieht Nassehi den besseren Lösungsansatz für gesellschaftlich Probleme. Das Unbehagen hingegen sollte aufgelöst werden, indem die Aufmerksamkeit der breiten Öffentlichkeit von den Problemen abgelenkt wird. Hier sieht Nassehi viel Potential in der modernen Konsumgesellschaft. Das moderne Konsumverhalten ermögliche den von Nassehi favorisierten latenten, also unbewussten, evolutionären Ansatz für gesellschaftliche Entwicklung.

Die »Krise« ist laut Nassehi also nur das Sichtbarwerden des Normalfalls. Die Unwirksamkeit dezisionistischer Maßnahmen löst zwar Unbehagen aus. Problematisch ist aber nicht der mangelnde Erfolg dieser Maßnahmen, sondern die darauf fokussierte Aufmerksamkeit. Die Koordination der verschiedenen Funktionslogiken der unterschiedlichen Gesellschaftsbereiche, die das Hindernis in der gesellschaftlichen Entwicklung darstellen, sollten stattdessen durch kleine Grassroots-Initiativen und nicht durch gesamtgesellschaftliches Handeln gelöst werden.

Literatur

[1] A. NASSEHI: *Unbehagen.* C.H. Beck (2021).

Verschwörungstheorien

Tobias Bungart, Dennis Loch und Jannik Marcel Nöll

Ist Bill Gates der Teufel? Ist die Mondlandung ein Fake und wurde nur von der US-Regierung inszeniert? Existieren Reptilienmenschen unter uns? Oder ist die Erde nicht doch der unbewegte Mittelpunkt unseres Sonnensystems? Vermutlich wurde jeder von uns schon einmal mit einer dieser Fragen konfrontiert. Aber was ist wahr und was ist lediglich eine Verschwörungstheorie (vgl. Kaufmann & Frietsch [6])?

Was sind Verschwörungstheorien?

Zunächst soll geklärt werden, was überhaupt eine Verschwörung auszeichnet. Von einer Verschwörung spricht man, wenn eine Gruppe aktiv und vom Großteil der Bevölkerung unerkannt daran arbeitet, dass ein bestimmtes Phänomen auftritt, welches der Gruppe einen Vorteil einbringt oder anderen Gruppierungen schadet, oder dazu führt, diese zu kontrollieren oder zu unterdrücken. Dabei unterscheidet sich das Ausmaß von Verschwörungen von einzelnen Personen über kleinere und größere Gruppen bis zu Weltverschwörungen. Während früher von mächtigen Menschen Verschwörungen von Unten gefürchtet wurden, etwa in Form einer Revolution oder einer Ermordung wie im Falle des Gaius Julius Cäsar (44 v. Chr.), behandeln moderne Verschwörungstheorien eher Verschwörungen von Oben (vgl. Meyer, Schüller-Ruhl & R. [8]).

An dieser Stelle ist festzuhalten, dass es legitim sein kann, Verschwörungen zu vermuten, gerade aufgrund der real existierenden und aufgedeckten Verschwörungen. Deswegen wird in der Forschung die wichtige Unterscheidung von Verschwörungshypothese und Verschwörungsideologie vorgenommen (vgl. *Verschwörungstheorie* [9]).

Bei einer Verschwörungshypothese werden zunächst nur Vermutungen über eine mögliche Verschwörung aufgestellt, welche sich im Nachhinein als wahr oder unwahr herausstellen kann. Verschwörungsideologien hingegen werden von den Anhängern nicht mehr kritisch hinterfragt, sondern gelten als absolut und fehlerfrei und sind somit durch die Ignoranz der Anhänger vor externen Widersprüchen und Gegenbeweisen geschützt. In der Alltagskommunikation wird häufig von Verschwörungstheorien gesprochen und dies wird synonym zu Verschwörungsideologien verwendet, weshalb wir das im weiteren Verlauf beibehalten werden (vgl. *Verschwörungstheorie* [9]).

Die Schwierigkeit bei der Betrachtung ist allerdings, dass eine Verschwörungshypothese erst dann zur Verschwörungsideologie wird, wenn trotz Widerlegung oder gut begründetem Einspruch an diese geglaubt wird. Dementsprechend haben beide Begriffe die Hypothese als Ausgangspunkt.

Wir müssen zudem den Begriff Verschwörungstheorie von dem Begriff »Fake News« abgrenzen. Fake News sind bewusst verbreitete Falschinformationen, welche nicht unbedingt die Existenz einer Verschwörung vertreten müssen. Verschwörungstheoretiker hingegen verbreiten in der Regel nicht absichtlich Falschinformationen, da sie der Überzeugung sind, die Wahrheit zu vertreten (vgl. BUTTER [2], S.5f.).

Wieso beschäftigen wir uns mit Verschwörungstheorien?

Auf diese Frage haben wir zwei Antworten gefunden. Einerseits waren Verschwörungstheorien während der Corona-Pandemie ubiquitär und das, obwohl die Verschwörungsmentalität in Deutschland im direkten Vergleich zu vor der Pandemie abgenommen hat. Jedoch mussten wir häufiger Stellung zu den Einschränkungen, Impfungen und Maskenpflichten beziehen. Dies führte dazu, dass man häufiger mit Verschwörungstheorien in Bezug auf Covid-19 in Berührung kam. Etwa 20–25% der deutschen Bevölkerung glaubten 2020/2021, dass geheime Mächte für die Corona-Pandemie verantwortlich sind, oder dass sie genutzt wird, um Zwangsimpfungen einzuführen (vgl. BUTTER [2], S.8ff.). Weitere Theorien zum Coronavirus sind: Es existiert gar nicht, aber die Regierung schürt Panik, um die Grundrechte einzuengen; 5G-Technologie ist für die Entstehung des Virus verantwortlich; über die medizinischen Masken wird ein Giftcocktail verabreicht; Pharmaunternehmen haben die Pandemie erfunden und bei den Impfungen werden, insbesondere auf Initiative von Bill Gates, Mikrochips implantiert (vgl. BUTTER [2], S.1 & CHEEMA [3], S.48).

Andererseits betrifft die Thematik uns alle. Verschwörungstheorien existieren in vielen verschiedenen Bereichen des öffentlichen Lebens. Unabhängig von dieser Omnipräsenz der Verschwörungstheorien im öffentlichen Diskurs sind es die Konsequenzen und Gefahren, die von den Verschwörungstheorien ausgehen, welche sie zu einem »Hard Problem« machen, mit dem es sich zu beschäftigen gilt.

Durch diese Theorien können Gefahren sowohl für einzelne Individuen, als auch für Institutionen entstehen. Es beginnt mit der Suche nach Feindbildern. Diese können zu Rassismus; Antisemitismus; der Legitimation von Herrschaft, Unterdrückung und Auslöschung bestimmter Menschen und jeglicher Form von menschenabwertendem Denken führen. Dies darf nicht toleriert werden. Auf der andere Seite ist jedoch die Diskriminierung von Verschwörungstheoretiker ein Problem. Familien, auch Freundschaften und soziale Gruppen können durch Verschwörungstheorien auseinandergehen (vgl. KLAWIER [7]).

Wieso existieren solche hartnäckigen Verschwörungstheorien?

Es gibt nicht den einen Grund. Tatsache ist aber, dass einige Menschen anfälliger sind als andere. Generell anfällig sind psychologisch nicht stabile Menschen, welche sich häufig machtlos fühlen oder zu Unsicherheiten in verschiedensten Bereichen neigen. Demografisch ist es nicht so einfach, die Gruppen zu identifizieren, allerdings zeichnen sich auch hier gewisse Tendenzen ab. Männer sind nach quantitativen Studien empfänglicher als Frauen, wobei dies stark abhängig von der Art der Verschwörungstheorie ist. Beispielsweise gibt es bei medizinischen Themen kaum Unterschiede. Natürlich spielt auch der Bildungsgrad eine wichtige Rolle. Menschen mit einem höheren Bildungsstandard neigen weniger zu Verschwörungstheorien. Außerdem sind ältere Menschen empfänglicher, gerade wenn sie im Internet damit in Verbindung kommen. Das liegt auch an der eher ungeübten und weniger reflektierten Nutzung des Mediums. Verschwörungstheorien sind für viele auch nostalgisch (vgl. BUTTER [1]). Dennoch kann jeder Mensch unabhängig von diesen Faktoren betroffen sein. Das liegt daran, dass Verschwörungstheorien und die Faszination dahinter sehr facettenreich sind. Dennoch lassen sich einige übergeordnete Motive finden, wieso Menschen an Verschwörungstheorien glauben.

Das erste Motiv ist die Sehnsucht nach klaren, einleuchtenden Erklärungen. In einer sehr komplexen und unübersichtlichen Welt, in der ein Individuum unmöglich alles begreifen kann, bieten Verschwörungstheorien simple Erklärungen für komplexe Phänomene und zeigen eine vereinfachte Funktionsweise der

Welt. Hauptgrund für die Flucht zu einfachen, vermeintlichen Wahrheiten sind fehlendes Wissen oder das mangelnde Verstehen von Naturphänomenen. Der zweite Aspekt beschreibt das Streben, der eigenen Machtlosigkeit entgegenzuwirken. Menschen können Unzufriedenheit in ihrem aktuellen Leben verspüren, was in einer Suche nach Problemquellen resultiert, welche oftmals außerhalb der eigenen Person oder des direkten Umfelds lokalisiert werden. Hinzu kommt aber auch die Möglichkeit zu selbstbestimmtem Handeln, sowie Kontrolle über das eigene Leben zu haben und persönlich etwas zu bewirken, indem man Demonstrationen veranstaltet, Flyer verteilt oder in sozialen Netzwerken andere Menschen versucht zu bekehren (vgl. *Warum glauben Menschen an Verschwörungstheorien?* [10]).

Der dritte und für viele Verschwörungstheoretiker wichtigste Aspekt ist das Gefühl der Besonderheit und Teil von etwas Größerem zu sein. Dadurch, dass man an etwas glaubt, an das die meisten anderen Menschen nicht glauben, sichert man die Besonderheit der eigenen Identität und fühlt sich als Teil einer elitären Gruppe, welche die Wahrheit erkannt hat und für diese nun einstehen muss. Diese Anerkennung und Selbstbestätigung geschieht sehr häufig in verschwörungsideologischen Gruppen, wodurch das Gruppengefühl gestärkt wird. Da der Glaube an eine Verschwörungstheorie häufig das einzige ist, was diese Menschen verbindet, will man diesen möglichst nicht aufgeben (vgl. *Warum glauben Menschen an Verschwörungstheorien?* [10]).

Der letzte Grund, warum überhaupt nach Verschwörungen gesucht und an Verschwörungstheorien geglaubt wird, ist der der Erfahrung. Die Existenz von tatsächlichen Verschwörungen dient hierbei als Antrieb.

Kombination von Verschwörungstheorien

Verschwörungstheorien haben häufig die Eigenschaft, dass sie sich sehr gut mit anderen Verschwörungstheorien verknüpfen lassen, wodurch ein großes Konstrukt entstehen kann. Ein Beispiel für eine solche übergeordnete Verschwörungsideologie ist die der »New World Order« oder die damit verwandte Theorie, die besagt, dass Echsenmenschen ein Teil dieser sind und alle mächtigen Positionen in der Welt besetzen. Echsenmenschen sollen gleichzeitig Aliens und Vampire sein, welche im Inneren der Erde hausen. Diese soll in Wahrheit hohl sein oder manchmal auch flach. Außerdem stehen Echsenmenschen im Bund mit dem Teufel oder alternativ mit Bill Gates und kommen aus der Hölle, also aus dem Inneren der Erde, egal welche Form diese hat. Am allerwichtigsten ist, dass sie versuchen, die Menschheit zu unterjochen, indem sie bei Impfungen Chips implantieren oder mit Hilfe von Flugzeugen gedankenmanipulierende Chemtrails erzeugen (vgl. FRICKEL [5]). An diesem Beispiel wird deutlich, dass so ziemlich alles dabei sein kann, unabhängig davon, ob sich einige Punkte widersprechen. Relevant sind nur die Sachverhalte, die mit der eigenen Denkweise oder der »selbst« aufgestellten Theorie übereinstimmen. Dadurch ist die Anzahl der angesprochenen Menschen um ein Vielfaches höher als bei expliziten Verschwörungstheorien, welche weniger Aspekte umfassen. Ein psychologisch interessanter Faktor ist hierbei, dass die Verschwörung dadurch glaubhafter wird, dass unabhängig voneinander verschiedene Menschen auf dieselbe Theorie kommen. Der Trugschluss dabei ist allerdings, dass der Mensch in seinem Denken begrenzt ist und sich gerne an fiktiven Werken oder bereits gehörten Theorien bedient, wodurch ähnliche Vermutungen angestellt werden, aber eben nicht voneinander unabhängig.

Zugang und Verbreitung von Verschwörungstheorien

Heutzutage gestaltet sich die Suche nach Verschwörungstheorien viel einfacher als noch vor einigen Jahrzehnten, als man nicht die Möglichkeiten des Internets hatte. Durch die dortige Anonymität sinkt die Toleranzgrenze, sich zu offenbaren und somit Gleichgesinnte zu finden. Es besteht die Möglichkeit unverbindlich ins Thema reinzuschnuppern, ohne dass aus dem privaten Umfeld jemand aufmerksam wird oder dass man sich anderen Menschen zeigen muss. Dadurch gerät man schnell in eine Meinungsblase, wodurch eine deutlich unreflektiertere Behandlung des Themas stattfindet.

Die Verbreitung von Verschwörungstheorien kann auf verschiedene Weise geschehen. Dazu gehören Mundpropaganda und ähnliche Handlungen, wie Flyer verteilen, Plakate in der Stadt aufhängen oder durch öffentliche Treffen auf sich aufmerksam machen. Natürlich ist, wie schon beim Zugang, auch die Verbreitung über das Internet sehr einfach und wird häufig genutzt. Außerdem sorgen auch einflussreiche Personen oder Personen des öffentlichen Lebens, die Anhänger einer Verschwörungsideologie sind, durch ihre enorme Reichweite dafür, viele Menschen zu erreichen. Aber auch die Berichterstattung von Medien allgemein, selbst wenn diese meist kritisch ist, gibt Verschwörungstheorien eine Plattform (vgl. BUTTER [1]).

Wie sollten wir mit Verschwörungstheoretiker umgehen?

Tippt man zum Beispiel den Begriff »Flat Earth« auf YouTube ein, so findet man schnell Videotitel, wie: »Flache Erde…Die dümmsten Menschen auf diesem Planeten« oder »Flat Earther Fails At Science, Absolutely NO ONE is Surprised«. Die Diskussion dient also eher zum Krieg gegen die andere Überzeugung. Dass diese Haltung nicht gerade produktiv ist, sollte jedem klar sein. Wie sollten wir uns also gegenüber Verschwörungstheoretiker verhalten?

In der Psychologie gibt es ein eigenes Feld, welches sich mit der Kunst der Überredung, der sogenannten persuasiven Kommunikation, beschäftigt. Eines der anerkannten Modelle ist das »Elaboration Likelihood Model« (ELM), welches 1986 von Richard E. Petty und John T. Cacioppo entwickelt wurde. Dem ELM nach gibt es zwei Arten der Verarbeitung einer Mitteilung: Die zentrale Route, auf der man sich aktiv und kritisch mit den Gedankengängen auseinandersetzt und bei welcher die Qualität der Argumente über eine Einstellungsänderung entscheidet. Dazu die periphere Route, bei welcher die Qualität der Argumente nebensächlich ist, und über eine Einstellungsänderung eher anhand peripherer Reize entschieden wird (vgl. *Elaboration Likelihood Model* [4]). Da unsere Botschaft auf Seite der Verschwörungstheoretiker zentral verarbeitet werden soll, müssen wir die Voraussetzungen dafür schaffen. Diese sind unter anderem Interesse am Thema und Motivation, sich ausgiebig mit diesem zu beschäftigen, aber auch die Fähigkeit, die Mitteilung zentral zu verarbeiten. Genau dort liegt allerdings die Problematik: Einige dieser Voraussetzungen können wir gar nicht beeinflussen!

Ist das Diskutieren mit Verschwörungstheoretiker also sinnfrei? – Ja und Nein. Natürlich ist es extrem schwierig, überzeugte Verschwörungstheoretiker von ihren Überzeugungen abzubringen. Wichtig ist aber auch der soziale Faktor in der Diskussion. Viele dieser Menschen sind an den äußeren Rand unserer Gesellschaft geraten und sind deswegen fast nur in Kreisen unterwegs, in denen die gleiche Meinung vertreten wird. Auch dadurch stärkt sich die Einstellung der Verschwörung, da ohne diese der »Kleber« wegfällt, der diese Gruppe zusammenhält. Der komplette Ausschluss dieser Gruppen aus unserer Gesellschaft ist also auf keinen Fall die Lösung.

Die Frage, welche wir uns bei diesem Vortrag gestellt haben: »Wie diskutiert man jetzt eigentlich mit Verschwörungstheoretiker?«, bleibt leider offen. Auch wenn wir hier am liebsten eine universelle Anleitung darlegen würden, ist das leider nicht möglich. Wir verweisen immerhin auf die beiden Begriffe Prävention und Aufklärung.

Literatur

[1] M. Butter: *Folge 1/5: Der Glaube an Verschwörungen.* 2020
URL: https://www.bpb.de/mediathek/reihen/wem-nuetzt-das/327981/folge-1-5-der-glaube-an-verschwoerungen/ (aufgerufen am 15. 09. 2022).

[2] M. Butter: *Verschwörungstheorien: Eine Einführung.* Aus Politik und Zeitgeschichte **71** (2021).

[3] S.-N. CHEEMA: *Verschwörungserzählungen und Politische Bildung*. Aus Politik und Zeitgeschichte **71** (2021).

[4] *Elaboration Likelihood Model*
URL: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Elaboration_Likelihood_Model (aufgerufen am 10. 09. 2022).

[5] C. FRICKEL: *Verschwörungstheorie: Kontrollieren Reptiloide die Welt?* 2021
URL: https://www.galileo.tv/life/verschwoerungstheorie-kontrollieren-reptiloide-die-welt/ (aufgerufen am 19. 09. 2022).

[6] S. KAUFMANN & M. FRIETSCH: *Verschwörungstheorien: Bekannte Verschwörungstheorien*. Psychologie - Gesellschaft - Planet Wissen (2020)
URL: http://bit.ly/3jq2YAN (aufgerufen am 26. 09. 2022).

[7] T. KLAWIER: *Warum glauben Menschen an Verschwörungstheorien?*
URL: https://www.lmz-bw.de/medienbildung/themen-von-f-bis-z/verschwoerungstheorien/warum-glauben-menschen-an-verschwoerungstheorien/ (aufgerufen am 16. 09. 2022).

[8] D. MEYER, T. SCHÜLLER-RUHL & V. R.: *Verschwörungstheorien*. 2022
URL: https://www.bpb.de/kurz-knapp/lexika/lexikon-in-einfacher-sprache/312781/verschwoerungstheorien/ (aufgerufen am 12. 09. 2022).

[9] *Verschwörungstheorie*
URL: https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Verschw%5C%C3%5C%B6rungstheorie%5C&oldid=228953578 (aufgerufen am 09. 09. 2022).

[10] *Warum glauben Menschen an Verschwörungstheorien?*
URL: https://www.slpb.de/themen/gesellschaft/verschwoerungstheorien/verstehen/warum-glauben-menschen-an-verschwoerungstheorien (aufgerufen am 16. 09. 2022).

Mathematik 4.0
Die Automatisierung der Mathematik

Justus Springer

Mathematik und Maschine

In den letzten Jahrzehnten haben intelligente Computerprogramme uns immer wieder überrascht. War es Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts noch gewagt anzunehmen, dass Computer einst bessere Schachspieler sein könnten als menschliche Profis, so gilt dies heutzutage als selbstverständlich. Als das von DeepMind entwickelte Computerprogramm AlphaGo im Jahr 2016 gegen Lee Sedol, den damals stärksten Go-Spieler der Welt, gewann, war dies selbst für Experten auf dem Gebiet der künstlichen Intelligenz überraschend. Man hatte angenommen, dass es wegen des enorm großen Zustandsraums bei Go noch deutlich länger bis zur Maschinendominanz dauern würde (Steven Borowiec, Tracey Lien [10])

Abbildung 1: Computer dringen in immer mehr Bereiche menschlichen Könnens vor. Bald auch in die Mathematik? Bildquelle: [7]

Viele Mathematiker fragen sich angesichts dieser Entwicklung, ob ihnen einst das gleiche Schicksal bevorsteht wie den Schach- und Go-Spielern. Ist die Mathematik, in ihrer formalisierten Form, nicht auch nur ein Spiel, dessen Regeln ein Computer im Prinzip ebenso verstehen kann wie ein Mensch? Werden bald Computer die besseren Mathematiker als wir, und die harten Probleme der Mathematik ganz automatisch lösen? Ich werde keine Antworten auf diese Fragen liefern. Stattdessen geht es mir darum, über eine bestimmte Sorte mathematischer Software aufzuklären, die in diesem Zusammenhang oft erwähnt wird und mit der ich mich seit ungefähr zwei Jahren teils sehr intensiv beschäftige.

Interaktive Theorembeweiser

Die Softwaresysteme, über die ich hier berichten will, werden als *interaktive Theorembeweiser* bezeichnet. Im englischen Wikipedia findet man unter dem entsprechenden Artikel folgende Definition:

> »In computer science and mathematical logic, a proof assistant or interactive theorem prover is a software tool to assist with the development of formal proofs by human-machine collaboration (siehe WIKIPEDIA CONTRIBUTORS [11]).«

Diese Definition fasst die Kernaspekte von Theorembeweisern gut zusammen. Zunächst sind Theorembeweiser abzugrenzen von anderer mathematischer Software. Während beispielsweise Computeralgebrasysteme Mathematikern bei größeren numerischen und symbolischen Rechnungen, sowie beim Visualisieren mathematischer Sachverhalte behilflich sein können, sind Theorembeweiser dazu gedacht, Mathematiker in der Entwicklung formaler Beweise zu unterstützen. Weiterhin ist die Rede von *human-machine collaboration*, das heißt, die Software arbeitet keineswegs völlig automatisch, sondern wird interaktiv benutzt.

Theorembeweiser sind also Programmiersprachen, in denen mathematische Definitionen und Beweise ausgedrückt werden können. Beweise werden vom Benutzer Schritt für Schritt eingegeben, wobei der Computer auf jeden Beweisschritt reagiert und dem Benutzer Feedback dazu liefert. Bestimmte Beweisschritte können auch vom Computer automatisch übernommen werden, wenn für die zu beweisende Aussage ein algorithmisches Vorgehen bekannt ist. Man denke dabei beispielsweise an aussagenlogische Tautologien, die durch das Aufstellen einer Wahrheitstafel auf algorithmische Art und Weise gelöst werden können. Ein Beweis, der in einen Theorembeweiser eingegeben wurde, wird dabei vom Computer auf Korrektheit überprüft und ist daher garantiert fehlerfrei. Darin liegt die primäre und ursprünglich beabsichtigte Anwendung von Theorembeweisern: die Verifikation mathematischer Beweise.

Ein Beispiel

Einen Eindruck davon, wie es aussehen kann, in einem interaktiven Theorembeweiser einen mathematischen Beweis zu führen, wird in Abb. 2 auf der nächsten Seite gegeben. Der verwendete Theorembeweiser ist in diesem Fall *Lean*, mehr dazu dem Abschnitt darüber. Es wird dort bewiesen, dass Folgenkonvergenz in den reellen Zahlen mit Addition verträglich ist, das heißt der Grenzwert der Summe zweier Folgen ist die Summe der Grenzwerte.

Zunächst wird Folgenkonvergenz in den reellen Zahlen definiert. Die Syntax orientiert sich an dieser Stelle an der gängigen Quantorenschreibweise und kann von den meisten Mathematikern sicherlich ohne Probleme gelesen werden.

Danach folgt das Lemma, das wir beweisen wollen.

Lemma Seien a und b Folgen reeller Zahlen und es konvergiere a gegen r und b gegen s. Dann konvergiert die Folge $a + b$ gegen $r + s$.

Der eigentliche Beweis steht zwischen dem blau markierten *begin* und *end*. Er besteht aus einer durch Kommata getrennten Abfolge sogenannter *Taktiken*, die den einzelnen Beweisschritten entsprechen. Während der Eingabe der Taktiken wird dem Benutzer ein *proof state* angezeigt, der alle Informationen des momentanen Beweiszustandes, d. h. alle verfügbaren Variablen, Hypothesen und

```
import data.real.basic

def seq_limit (a : ℕ → ℝ) (l : ℝ) : Prop :=
∀ ε : ℝ, ε > 0 → ∃ N : ℕ,
  ∀ n : ℕ, n ≥ N → |a n - l| < ε

lemma demo_lemma (a b : ℕ → ℝ) (l1 l2 : ℝ)
  (h1 : seq_limit a l1) (h2 : seq_limit b l2) :
  seq_limit (a + b) (l1 + l2) :=
begin ①
  dunfold seq_limit at *,
  intros ε hε,
  specialize h1 (ε / 2) (half_pos hε),
  specialize h2 (ε / 2) (half_pos hε),②
  cases h1 with N1 hN1,
  cases h2 with N2 hN2,
  use (max N1 N2),
  intro n,
  intro hn,
  specialize hN1 n (le_of_max_le_left hn),
  specialize hN2 n (le_of_max_le_right hn),③
  calc
  |a n + b n - (l1 + l2)| = |(a n - l1) + (b n - l2)| :
    by { rw add_sub_add_comm, }
  ... ≤ |a n - l1| + |b n - l2| :
    by { apply abs_add }
  ... < ε / 2 + |b n - l2| :
    by { rw add_lt_add_iff_right (|b n - l2|), apply hN1, }
  ... < ε / 2 + ε / 2 :
    by { rw add_lt_add_iff_left (ε / 2), apply hN2, }
  ... = ε :
    by { exact add_halves ε, },④
end
```

①
```
a b : ℕ → ℝ
l1 l2 : ℝ
h1 : seq_limit a l1
h2 : seq_limit b l2
⊢ seq_limit (a + b) (l1 + l2)
```

②
```
a b : ℕ → ℝ
l1 l2 ε : ℝ
hε : ε > 0
h1 :
∃ (N : ℕ), ∀ (n : ℕ)
 , n ≥ N → |a n - l1| < ε / 2
h2 :
∃ (N : ℕ), ∀ (n : ℕ)
 , n ≥ N → |b n - l2| < ε / 2
⊢
∃ (N : ℕ), ∀ (n : ℕ)
 , n ≥ N →
    |(a + b) n - (l1 + l2)| < ε
```

③
```
a b : ℕ → ℝ
l1 l2 ε : ℝ
hε : ε > 0
N1 N2 n : ℕ
hn : n ≥ max N1 N2
hN1 : |a n - l1| < ε / 2
hN2 : |b n - l2| < ε / 2
⊢ |(a + b) n - (l1 + l2)| < ε
```

④
```
goals accomplished 🎉
```

Abbildung 2: Ein Lean-Beweis für die Verträglichkeit der Folgenkonvergenz in den reellen Zahlen mit Addition.

die noch zu zeigenden Aussagen, enthält. Die von Lean angezeigten *proof states* an vier markierten exemplarischen Stellen sind rechts in der Abbildung zu sehen. Dabei stehen jeweils oben die verfügbaren Variablen und Hypothesen, während unten (hinter dem ⊢) die zu zeigende Aussage steht. Das Beweisen eines Theorems in Lean besteht nun darin, so lange den angezeigten *proof state* durch die Eingabe passender Taktiken zu modifizieren, bis man Lean von der Richtigkeit der zu zeigenden Aussage überzeugt hat. Ist dies geschehen, so wird man durch die angezeigte Nachricht »goals accomplished« belohnt. Die Beweisschritte, die von den einzelnen Taktiken ausgeführt werden, können von sehr einfach bis sehr komplex reichen. Auf der einfachen Seite gibt es beispielsweise Taktiken zum Einsetzen einer bekannten Definition in einen Kontext (*dunfold*), dem Einführen neuer Variablen (*intro*) oder dem Spezialisieren allgemeiner Hypothesen auf vorgegebene Werte (*specialize*). Aber es gibt auch komplexere Taktiken. Diese können allgemein verwendbar sein, wie zum Beispiel *library_search*, mit der Lean's Biblothek automatisch nach passenden Lemmata durchsucht werden kann, die in einer gegebenen Situation behilflich sein könnten, oder *simp*, mit der ganz allgemeine mathematische Ausdrücke nach vorgegebenen Regeln vereinfacht werden können. Sie können aber auch speziell auf eine Sorte Problem oder auf ein mathematisches Teilgebiet zugeschnitten sein. Beispielsweise löst die Taktik *abel* Gleichungen in abelschen Gruppen, während *continuity* dazu gedacht ist, Stetigkeit von Funktionen automatisch zu zeigen. Wenn sich eine Sorte mathematischer Probleme für ein algorithmisches Verfahren eignet, kann der Benutzer selbst eine neue Taktik programmieren, die dieses Verfahren umsetzt und so automatisiert. Mittlerweile gibt es auch Taktiken, die auf neuronalen Netzen basieren, mehr dazu in Abschnitt Anwendungen.

Lean

Der Theorembeweiser Lean wird seit 2013 unter der Leitung von Leonardo de Moura von Microsoft Research entwickelt MOURA, KONG, AVIGAD et al. [8]. Er ist kostenlos und Open Source verfügbar und kann auf allen gängigen Betriebssystemen ausgeführt werden. Lean ist es in den letzten Jahren gelungen, breites Interesse unter Mathematikern zu erzeugen, wie es für Theorembeweiser vorher nicht üblich war. Dazu beigetragen haben meiner Ansicht nach vor allem eine geringe Einstiegshürde dank der einfachen Zugänglichkeit, eine sehr aktive und einsteigerfreundliche Community sowie die Beteiligung einiger bekannter Mathematiker, darunter Kevin Buzzard, Thomas Hales und Peter Scholze.

Leans mathematische Bibliothek heißt *mathlib* und wird von der Community kollaborativ entwickelt. *mathlib* ist der zentrale Korpus formalisierter Mathematik in Lean und umfasst mathematische Resultate aus vielen Bereichen der Mathematik, darunter Algebra, Zahlentheorie, algebraische Geometrie oder auch Funktionalanalysis. Die Gesamtheit der formalisierten Mathematik in *mathlib* umfasst nach heutigem Stand (15.10.2022) über eine Million Zeilen Code, der von mehr als 250 Menschen geschrieben wurde. Für einen zwar nicht mehr aktuellen, aber doch lesenswerten Überblick über Lean's mathematische Bibliothek verweise ich auf COMMUNITY [4].

Es folgt eine Auswahl einiger bekannter Formalisierungsprojekte in Lean.

- **Perfektoide Räume [1].** In diesem Projekt formalisierten Kevin Buzzard, Johan Commelin und Patrick Massot den Begriff eines perfektoiden Raumes in Lean, welcher auf Peter Scholze zurückgeht. Damit sollte empirisch belegt werden, dass Lean in der Lage ist, auch hochkomplexe moderne mathematische Objekte zu erfassen.

- **Flypitch Projekt [5].** In diesem Projekt wurde die Unabhängigkeit der

Kontinuumshypothese vom Axiomensystem ZFC der Mengenlehre formalisiert.

- **Schemata in Lean [2].** Schemata sind vergleichsweise komplizierte mathematische Objekte und bilden den Grundbegriff der modernen algebraischen Geometrie. Sie wurden bereits in mehreren Anläufen in Lean formalisiert und sind inzwischen in *mathlib* verfügbar.

- **Liquid Tensor Experiment [3].** Dieses Projekt ging hervor aus einer Challenge von Peter Scholze [9]. Er bat darin um Unterstützung in der Formalisierung eines sehr schwierigen, für seine Theorie der kondensierten Mathematik aber grundlegenden Resultats. Das Projekt wird seit kurzem als abgeschlossen betrachtet.

Zukünftige Anwendungen

Kann Software wie Lean uns dabei helfen, harte mathematische Probleme zu lösen? Die ehrliche Antwort auf diese Frage lautet – Nein – zumindest vorerst nicht. Versucht man in Lean ernsthafte mathematische Theoreme zu beweisen, habe ich oft eher das Gefühl, dass Lean einfach geglaubte Probleme schwierig macht, anstatt zu deren Lösung beizutragen. Um einen Beweis in Lean (oder jedem anderen interaktiven Theorembeweiser) eingeben zu können, muss dieser vom Benutzer in aller Regel bereits im hohen Detailgrad verstanden worden sein. Lean agiert als ein pedantischer Korrektor, dessen kritisches Feedback gezielt die Lücken im eigenen Verständnis aufdecken kann. Die Automatisierungen, die Lean im Moment bietet, können zwar durchaus hilfreich sein, insofern sie dem Nutzer die besonders einfachen und repetitiven Beweisschritte abnehmen und ihm so eine Zeitersparnis bieten. Jedoch ersetzen sie meiner Erfahrung nach keineswegs die menschliche Ideenfindung sowie das Erarbeiten der richtigen Beweisstruktur.

Auf der anderen Seite muss man jedoch erwähnen, dass sich durch die Digitalisierung der Mathematik durch Theorembeweiser natürlich neue Möglichkeiten und Methoden eröffnen, die den mathematischen Alltag der Zukunft durchaus beeinflussen können. Ein wichtiger Punkt ist die Suche und Analyse bereits bekannter Definitionen und Theoreme. Ein umfassender digitaler Korpus formalisierter mathematischer Definitionen und Theoreme lässt sich genauer und schneller analysieren und durchsuchen als es bei analogen bzw. in informeller Sprache geschriebenen mathematischen Texten möglich wäre. So können Theoreme schneller gefunden und die genauen Abhängigkeitsbeziehungen zwischen ihnen sichtbar gemacht werden.

Weiterhin wird aktiv daran geforscht, das Finden neuer Beweise in Theorembeweisern wie Lean durch maschinelles Lernen umfassender zu automatisieren. Beispielsweise ist *lean-gptf* eine auf Deep Learning beruhende Lean-Taktik, die mit einem großen Teil von mathlib trainiert wurde und so versucht, neue Beweise für bisher unbekannte Aussagen zu generieren [6]. Dies ist in kleinen Maßstäben bereits jetzt erfolgreich. So wurden einige von Menschen geschriebene Beweise in mathlib durch kürzere, von lean-gptf automatisch generierte Beweise ersetzt. Meiner Ansicht nach ist dies eine sehr interessante Anwendung von Theorembeweisern. Es ist durchaus denkbar, dass ein solches System einem menschlichen Mathematiker in Zukunft echte Unterstützung beim Entwickeln einer mathematischen Theorie bieten kann, mindestens jedoch Zeitersparnis beim Ausfüllen von routinemäßigen Beweisen. Menschen könnten sich auf Intuition und Ideengebung konzentrieren, während der Computer sich um die technischen Details kümmert und die Lücken in den Beweisen automatisch schließt. Ob Computer eines Tages die Initiative ergreifen und selbstständig neue mathematische Fragen stellen und Theorien begründen, steht jedoch auf einem anderen Blatt. So beruht maschinelles Lernen in der heutigen Form doch zumeist auf Mustererkennung und ist in seinen Fähigkeiten maßgeblich durch die Trainingsdaten beschränkt.

Fazit

Ich persönlich glaube, dass Mathematik im Kern eine menschliche und soziale Aktivität bleiben wird. Dort wo es angebracht ist, können Computer jedoch mehr und mehr Aufgaben übernehmen und uns so neue Möglichkeiten eröffnen. Sie tun dies bereits in vielerlei Hinsicht: Sie können blitzschnell große numerische und symbolische Rechnungen durchführen, große Datenmengen verarbeiten oder uns helfen, mathematische Sachverhalte graphisch zu visualisieren. Das Kerngeschäft der Mathematik, nämlich das Aufstellen von Theoremen sowie das Finden und Überprüfen von Beweisen, bleibt dagegen bislang weitestgehend dem Menschen vorbehalten. Interaktive Theorembeweiser wie Lean könnten der Schlüssel sein, Computer auch in diesem Bereich nutzbar zu machen. Für alle, die eine neue Art und Weise, Mathematik zu betreiben, kennenlernen möchten, lohnt sich die Beschäftigung mit Theorembeweisen. Meinen persönlichen Blick auf die Mathematik, ihr Wesen und ihre Zukunft haben sie jedenfalls verändert und bereichert.

Literatur

[1] K. Buzzard, J. Commelin & P. Massot: »Formalising perfectoid spaces«. *Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs*. ACM 2020.

[2] K. Buzzard, C. Hughes, K. Lau et al. *Schemes in Lean*. Experimental Mathematics **31**(2) (2021) 355–363.

[3] J. Commelin: *Liquid Tensor Experiment*. DMV-Mitteilungen **30**(3) (2022) 166–170.

[4] T. mathlib Community: »The lean mathematical library«. *Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs*. ACM 2020.

[5] J. M. Han & F. van Doorn: »A formal proof of the independence of the continuum hypothesis«. *Proceedings of the 9th ACM SIGPLAN International Conference on Certified Programs and Proofs*. ACM 2020.

[6] J. M. Han, J. Rute, Y. Wu et al. *Proof Artifact Co-training for Theorem Proving with Language Models*. 2021.

[7] R. Kurzweil: *The singularity is near: When humans transcend biology*. (2005).

[8] L. de Moura, S. Kong, J. Avigad et al. »The Lean Theorem Prover (System Description)«. *Automated Deduction - CADE-25*. Hrsg. von A. P. Felty & A. Middeldorp. Springer International Publishing 2015 S. 378–388. ISBN: 978-3-319-21401-6.

[9] P. Scholze: *Liquid Tensor Experiment*. Exp. Math. **31**(2) (2022) 349–354.

[10] Steven Borowiec, Tracey Lien: *AlphaGo beats human Go champ in milestone for artificial intelligence*. 2016
URL: https://www.latimes.com/world/asia/la-fg-korea-alphago-20160312-story.html (aufgerufen am 15. 10. 2022).

[11] Wikipedia contributors: *Proof assistant — Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2022
URL: https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Proof_assistant&oldid=1109289390 (aufgerufen am 15. 10. 2022).

Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften?

Tobias Schnieders

Die Geschichte der 23 Hilbertschen Probleme

> *Wer von uns würde nicht gern den Schleier lüften, unter dem die Zukunft verborgen liegt, um einen Blick zu werfen auf die bevorstehenden Fortschritte unserer Wissenschaft und in die Geheimnisse ihrer Entwicklung während der künftigen Jahrhunderte!*

Mit diesen Worten beginnt David Hilbert seine Rede am 8. August 1900 beim Internationalen Mathematikerkongress in Paris. Er ist zu dem Zeitpunkt zwar erst 38 Jahre alt, aber dennoch schon ein weltberühmter Mathematiker. Während dieser Rede stellte David Hilbert eine Liste mit 23 damals noch ungelösten

David Hilbert

mathematischen Problemen vor, von deren Lösungen er jeweils eine hohe Bedeutung für die zukünftige Entwicklung der Mathematik erwartete. Diese Liste wurde sehr berühmt und diese 23 Probleme haben die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts sehr geprägt. Sie sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Die Hilbertschen Probleme

	Gelöst?	*Wann?*	*Problem*	*Lösung*
1	Ja	1963	Kontinuumshypothese	Unentscheidbar
2	Ja	1930	Sind die arithmetischenAxiome widerspruchsfrei?	Unbeweisbar
3	Ja	1901	Sind zwei Polyeder gleichen Volumens zerlegungsgleich?	Nein
4	Teilweise	1903?	In welchen Metriken sind alle Geraden Geodäten?	Problem zu vage formuliert
5	Ja	1952	Ist jede lokal euklidische, topologische Gruppe eine Lie-Gruppe?	Ja
6	Teilweise	?	Wie kann die Physik axiomatisiert werden?	Teilgebiete axiomatisiert

…Fortsetzung der Übersicht

	Gelöst?	*Wann?*	*Problem*	*Lösung*
7	Ja	1934	$\alpha \neq 0, 1$ algebraisch, β irrational, so ist α^β transzendent?	Ja
8	Nein	?	Riemannsche und Goldbachsche Vermutung	?
9	Teilweise	1924?	Verallgemeinere das quadratische Reziprozitätsgesetz	Problem zu vage formuliert
10	Ja	1970	Finde einen Algorithmus, der die Lösbarkeit diophantischer Gleichungen entscheidet	Kann nicht existieren
11	Ja	1923	Man verallgemeinere die Theorie der quadratischen Formen auf alle algebraischen Zahlkörper	Lokal-Global-Prinzip
12	Nein	?	Man verallgemeinere den Satz von Kronecker-Weber auf alle Zahlkörper	?
13	Ja	1957	Lässt sich die Lösung der Gleichung $x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$ durch endlich viele stetige Funktionen, die von zwei Variablen abhängen, bilden?	Ja
14	Ja	1957	Sind Ringe der Invariantentheorie endlich erzeugt?	Nein
15	Teilweise	20. Jhd	Man formalisiere das Schubert-Kalkül	Teile sind formalisiert
16	Teilweise	1972?	Man klassifiziere die gegenseitige Lage algebraischer Kurven	Viele Teilergebnisse und offene Fragen
17	Ja	1927	Ist jede nicht-negative rationale Funktion eine Summe von Quadraten?	Ja
18	Ja	1910	Gibt es in jeder Dimension nur endlich viele Raumgruppen?	Ja

...Fortsetzung der Übersicht

	Gelöst?	*Wann?*	*Problem*	*Lösung*
19	Ja	1957	Sind Lösungen regulärer Variationsprobleme stets analytisch?	Ja, unter Voraussetzungen
20	Ja	1939?	Wann sind Randwertprobleme lösbar?	Nicht immer
21	Ja	1989	Gibt es zu einer Monodromiegruppe und gegebenen Singularitäten stets ein Fuchssches Differentialgleichungssystem?	Nein
22	Teilweise	1907	Wie können Lösungen von Gleichungen durch periodische Funktionen parametrisiert werden?	Für zwei Variablen gelöst
23	Teilweise	20. Jhd	Entwickle die Methoden der Variationsrechnung weiter	Funktionalanalysis, Problem zu vage formuliert

Die sieben im Jahr 2000 veröffentlichten *Millennium-Probleme* werden oft als Nachfolgeliste von Hilberts Liste gesehen. Diese sind:

- Das P=NP -Problem
- Die Riemannsche Vermutung
- Die Yang-Mills-Theorie
- Die Navier-Stokes Gleichungen
- Die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer
- Die Vermutung von Hodge
- Die Poincaré-Vermutung (2002 gelöst durch Grigori Perelman)

Während Hilberts 23 Probleme mit gewisser mathematischer Ausbildung verständlich sind, finden sich unter den sieben Millennium-Problemen einige, die nur sehr schwer zugänglich sind. Außerdem sind einige der sieben Millennium-Probleme Fragestellungen aus der jüngeren Mathematik. In Hilberts Liste hätten also, wenn überhaupt, lediglich die Poincaré-Vermutung, die Navier-Stokes Gleichungen und die Riemannsche Vermutung aus der Liste der sieben Millen-nium-Probleme auch auftauchen können. Interessanterweise ist die Riemannsche Vermutung das einzige Problem, dass in beiden Listen erscheint. In der Liste der 23

Hilbertschen Probleme taucht sie allerdings zusammen mit der Goldbachschen Vermutung auf (Problem 8), da Hilbert, als er seine Problemliste vorstellte, die Riemannsche Vermutung als vergleichsweise leicht lösbar angesehen hat.

Ein weiterer Unterschied zwischen beiden Problemlisten ist die Frage der Motivation des Lösens: Auf jedes der sieben Millennium-Probleme ist ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgeschrieben. Bei Hilberts Liste findet sich keine derartige Belohnung. Hilbert selbst sprach davon, dass man die Probleme *»zu Ehre des menschlichen Geistes«* lösen möge. Unabhängig davon, ob man mathematische Probleme löst um zu zeigen, wozu der Mensch durch seine Gedanken fähig ist, oder ob es darum geht, Preisgeld zu bekommen, schließt sich die Frage an, ob das jeweils eine Rechtfertigung der Mathematik sein kann. Man könnte sogar fragen, wie nützlich die Mathematik überhaupt ist, wenn es selbst bei den berühmtesten mathematischen Problemlisten nur um die *Ehre des menschlichen Geistes* oder um Geld geht.

Hilberts 24. Problem

Im Jahr 2000, also 100 Jahre nachdem Hilbert in seiner berühmter Rede seine 23 Probleme vorgestellt hatte, fand Rüdiger Thile in Hilberts Nachlass einen Notizzettel, auf dem Folgendes stand:

> *Als 24stes Problem in meinem Pariser Vortrag wollte ich die Frage stellen: Kriterien für die Einfachheit bez. Beweis der grössten Einfachheit von gewissen Beweisen führen. Überhaupt eine Theorie der Beweismethoden in der Mathematik entwickeln. Es kann doch bei gegebenen Voraussetzungen nur einen einfachsten Beweis geben. Überhaupt, wenn man für einen Satz 2 Beweise hat, so muss man nicht eher ruhen, als bis man sie beide aufeinander zurückgeführt hat oder genau erkannt hat, welche verschiedenen Voraussetzungen (und Hilfsmittel) bei den Beweisen benutzt werden: Wenn man 2 Wege hat, so muss man nicht bloss diese Wege gehen oder neue suchen, sondern dann das ganze zwischen den beiden Wegen liegende Gebiet erforschen. (...) Da jeder Process des Addierens Anwendung des commutativen Gesetzes der Addition ist – dies immer geometrischen Sätzen oder logischen Schlüssen entspricht, so kann man diese zählen und z. B. beim Beweis bestimmter Sätze in der Elementargeometrie (Pythagoras oder über merkwürdige Punkte im Dreieck) sehr wohl entscheiden, welches der einfachste Beweis ist (siehe hierzu Kahle & Hipolito [4])*

Hilbert hatte offenbar vor seinem Vortrag überlegt, noch ein weiteres Problem in seiner Liste zu präsentieren. Warum er das nicht getan hat, ist unklar. Vielleicht befürchtete er, dass seine gesamte Problemliste von anderen Mathematikern nur bedingt ernst genommen worden wäre, da dieses 24. Problem sich nur bedingt formalisieren lässt und damit unter Umständen auch nur bedingt als mathematisches Problem angesehen werden würde. Auffallend ist außerdem, dass Hilbert überlegt hatte, dem Problem nicht nur irgendeine Stelle in seiner Liste zu geben, sondern das Problem an die letzte Stelle seiner Liste zu stellen. Dadurch hätte das Problem, sofern Hilbert es in seiner Liste präsentiert hätte, natürlich einen enormen Stellenwert bekommen. Es muss also ein Problem sein, das nur am Rande der bis dahin herkömmlichen Mathematik steht, das Hilbert aber vermutlich sehr beschäftigt hat oder von dessen Lösung er sich sehr viel für die Zukunft der Mathematik versprochen haben mag.

Aber was ist das Problem nun eigentlich genau? Worum geht es? Wie könnte eine Lösung aussehen?

Der Kern des Problems taucht in Hilberts Notizzettel gleich am Anfang auf: Man möge »*Kriterien für die Einfachheit (…) von gewissen Beweisen*« suchen und, sofern man solche Kriterien zur Hand hat, auch »*Beweis(e) der grössten Einfachheit von gewissen Beweisen führen.*« Es geht Hilbert also darum, verschiedene bekannte Beweise eines gegebenen mathematischen Satzes zu vergleichen und dabei zu untersuchen, welcher davon in einer gewissen Form einfacher ist als die anderen. Das geht soweit, dass man schließlich sogar beweisen können soll, dass ein gegebener Beweis nicht nur einfacher als alle anderen bereits bekannten Beweise des gleichen Satzes ist, sondern dass man keinen einfacheren Beweis des gegebenen Satzes je wird finden können. Einige Mathematikhistorikerinnen und -historiker gehen bezugnehmend auf spätere Äußerungen Hilberts davon aus, dass Hilbert später zunehmend ein eindeutiges *Kriterium* statt mehreren Kriterien für Einfachheit als Lösung seines, damals noch nicht öffentlich formulierten Problems anerkennen würde. Das zentrale Element von Hilberts 24. Problem ist also die Suche nach einem Kriterium für Einfachheit gegebener Beweise. Aber wie könnte ein solches Kriterium aussehen und wodurch würde es sich auszeichnen? Dazu gibt Hilbert in seiner weiteren Formulierung einige Hinweise:

> *Wenn man für einen Satz 2 Beweise hat, so muss man nicht eher ruhen, als bis man sie beide aufeinander zurückgeführt hat oder genau erkannt hat, welche verschiedenen Voraussetzungen (und Hilfsmittel) bei den Beweisen benutzt werden.*

Ja, man soll sogar außerdem »*das ganze zwischen den beiden Wegen liegende Gebiet erforschen.*« Der Ausgangspunkt der Suche nach diesem Kriterium ist also das Vergleichen gegebener Beweise desselben Satzes hinsichtlich Voraussetzungen und Hilfsmittel. Für ihn ist aber auch die Anzahl der logischen Schlüsse wichtig, wie er an seinem elementargeometrischen Beispiel erläutert. Hilbert ging offenbar davon aus, dass es»*bei gegebenen Voraussetzungen nur einen einfachsten Beweis geben (kann).*« Dies sei zunächst einmal dahin gestellt.

Die ersten Lösungsideen für Hilberts 24. Problem legen ihren Fokus auf die *Anzahl der logischen Schlüsse*, die man einfach quantitativ zählen kann. Um das zu formalisieren, bedient man sich logischen Kalkülen. Das bietet auf den ersten Blick viele Vorteile: Man hat eine klare Vorstellung vom Begriff des *Beweises*, der in diesem Fall aus einer Hintereinanderreihung einzelner logischer Schlüsse besteht. Da man außerdem ein gegebenes und ggf. erweitertes Axiomensystem und damit die Voraussetzungen, die in den Beweisen benutzt werden dürfen, festhält, kann man verschiedene Beweise eines Satzes ganz eindeutig vergleichen: Man zähle die benötigte Anzahl logischer Schlüsse.

Diese Lösungsidee mag zunächst sehr einleuchtend erscheinen. Es ergeben sich dabei jedoch zwei Probleme: Kein logisches Kalkül hat sich in der Mathematik bis jetzt so weit durchgesetzt, dass man eine nennenswerte Anzahl an mathematischen Beweisen von großen Theoremen in diesem Kalkül vergleichen könnte. Der viel größere Nachteil erscheint mir hingegen, dass solche Beweise im Vergleich zu mathematischen Beweisen, wie man sie aus Mathematik-Vorlesungen kennt, oft unübersichtlich und sehr lang sind.

Während man beispielsweise in einführenden Vorlesungen die Assoziativität des logischen Oder-Junktors kurz in einem Satz erklären oder ausführlich mit einer Wahrheitswerttafel beweisen kann, benötigt man in so manchem logischen Kalkül für dieselbe Arbeit bereits zwei Seiten, welche mit unübersichtlichen Abfolgen logischer Zeichen gefüllt sind.

Um letzteres Problem bei diesem Lösungsansatz zu beheben, kann man Computer nutzen: Dies begann damit, dass man mit ihnen große Fallunterscheidungen aufstellen und jeden Fall einzeln durchgehen und beweisen kann. Ein bekanntes Beispiel für sogenannte Generate-and-Test-Algorithmen ist der Beweis des Vier-Farben-Satzes (STEWART [6]).

Später hat man Computer aber auch genutzt, um mathematische Beweise auf ihre Korrektheit zu überprüfen. Dazu muss nach heutigem Stand der Technik der Beweis ähnlich wie in einem logischen Kalkül formuliert sein. Da ein sogenannter automatischer Theorembeweiser, also ein Computerprogramm, das gegebene mathematische Sätze selbst beweisen kann, in weiter Ferne scheint, bedient man sich nach wie vor den sogenannten interaktiven Theorembeweisern, also Computerprogrammen, die gegebene formalisierte Beweise auf Korrektheit hin überprüfen. Das hat in der Tat bereits Ergebnisse gezeigt.

So wurde beispielsweise der Beweis des Satzes von Feit-Thompson aus der Gruppentheorie in dem interaktiven Theorembeweiser Coq implementiert und von Coq auf seine Korrektheit hin überprüft. Allerdings kann man dabei, aus meiner Sicht, nicht wirklich von einer Lösung des 24. Hilbertschen Problems sprechen. So besteht besagter formalisierter Beweis aus etwa 170 000 Zeilen an Code und etwa 15 000 Definitionen. Zum Verleich: Der normale Beweise erstreckt sich zwar immerhin auf etwa 300 Seiten, ist allerdings in einer Vorlesung behandelbar, während das bei 15 000 Definitionen sicherlich nicht der Fall ist. Insofern führt dieser Lösungsansatz wieder auf die gleichen Probleme wie die Lösungsansätze in der Logik. Da das Gebiet der Theorembeweiser jedoch derzeit ein aktives Forschungsfeld zwischen Mathematik und Informatik ist, möchte ich diese Lösungsansätze nur zum aktuellen Stand und nicht für die Zukunft als unbrauchbar abtun: Die große Hoffnung in diesem Forschungsfeld ist es, Mischformen zwischen automatischen und interaktiven Theorembeweisern zu bekommen. Lediglich der aktuelle Stand auf diesem Gebiet ist, aus meiner Sicht, nicht zufriedenstellend.

Lasst uns nun, wie »*Zwerge auf Schultern von Riesen sitzend*«, noch einmal auf Hilberts ursprüngliche Fragestellung zurückkommen und ausgehend von seinen Hinweisen auf dem Notizzettel selbst versuchen, das Problem zu lösen. Zur Herangehensweise heißt es auf seinem Notizzettel:

> *Überhaupt, wenn man für einen Satz zwei Beweise hat, so muss man nicht eher ruhen, als bis man sie beide aufeinander zurückgeführt hat oder genau erkannt hat, welche verschiedenen Voraussetzungen (und Hilfsmittel) bei den Beweisen benutzt werden.*

Er empfiehlt also, von mehreren Beweisen gleichzeitig auszugehen und diese unter gewissen Kriterien zu vergleichen. Um das zu tun, seien im folgenden drei verschiedene Beweise des gleichen mathematischen Satzes angegeben. Im Nachhinein werden wir die Frage diskutieren, welcher Beweis davon der einfachste ist, oder ob man das überhaupt eindeutig sagen kann. Der zu beweisende Satz ist der *kleine Fermatsche Satz*

Satz Sei a eine ganze Zahl und sei p eine Primzahl. Dann ist p Teiler von $a^p - a$, d. h. $a^p \equiv a \pmod{p}$.

Zunächst eine Anmerkung: Haben wir den Satz für positive ganze Zahlen bewiesen, dann gilt er auch für negative. Denn ist $p > 2$ und a negativ, so ist

$$a^p \equiv -(-a)^p \equiv -(-a) \equiv a \pmod{p}$$

und für $p = 2$ ist

$$a^2 \equiv (-a)^2 \equiv -a \equiv a \pmod{2}.$$

Weiter können wir a und p teilerfremd annehmen und auch $a \neq 0$.

Beweis 1. Sei $\langle a \rangle$ die von a in $\mathbb{Z}_p^*$ erzeugte Untergruppe. Da p eine Primzahl ist, gilt für deren Gruppenordnung $|\mathbb{Z}_p^*| = p - 1$. Mit dem Satz von Lagrange folgt $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ und insbesondere $a^p \equiv a \pmod{p}$. □

Beweis 2 (nach GRACIÁN [2]). Wir nehmen an, dass wir den Satz für ein $a > 1$ bewiesen haben. Wegen

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$$

Ist p für alle $k \in \{1, ..., p-1\}$ ein Teiler von $\binom{p}{k}$.

Mit dem binomischen Satz und der Induktionsvoaussetzung folgt

$$(a+1)^p \equiv a^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k + 1 \equiv a^p + 1 \equiv a + 1 \pmod{p}.$$

□

Beweis 3 (nach ALSINA & NELSEN [1]). Bilde mit a verschiedenen Farben alle Perlenketten aus p Perlen. Es gibt a^p Ketten, davon sind a *langweilig* (=einfarbig) und $a^p - a$ *interessant*. Die langweiligen Ketten wollen wir nicht weiter berücksichtigen.

Nun verknoten wir beide Enden der Ketten und erhalten geschlossene Ketten. Dabei kann es passieren, dass aus zwei verschiedenen offene Ketten, wenn man beide Enden verknotet, die gleiche geschlossene Kette wird. Dieser Effekt tritt genau dann auf, wenn die eine offene Kette eine *Verschiebung* der anderen ist. Damit ist gemeint, dass man die eine aus der anderen erhält, in dem man beliebig oft je eine Perle von einem Ende der Kette wegnimmt und an das andere Ende der Kette hängt.

Die gleiche geschlossene Kette ergibt sich also aus einer offenen Kette und allen ihren Verschiebungen, das sind p verschiedene Ketten: Wäre das nicht der Fall, so hätten wir eine Kette dabei mehrfach gezählt und es gäbe eine kleinste Verschiebung um $k \in \{1, ..., p-1\}$ Perlen, die diese Kette in sich selbst überführt.

Wir teilen p durch k mit Rest $p = lk + r$, wobei $0 \leq r < k$ ist. Da eine Verschiebung um p Perlen die Kette auch in sich selbst überführt, tut dies auch eine Verschiebung um $p - lk = r$ Perlen. Wegen der Wahl von k muss also $r = 0$ gelten. Aus $p = lk$ folgt $k = 1$, weil p prim ist. Damit wäre die Kette langweilig – also ein Widerspruch!

Also führen je p paarweise verschiedene Ketten auf die gleiche geschlossene Kette. Es gibt also genau $\frac{a^p - a}{p}$ geschlossene, interessante Ketten – insbesondere gilt $\frac{a^p - a}{p} \in \mathbb{N}$. □

Der erste Beweis ist der kürzeste, der dritte der längste und der zweite steht im Mittelfeld. Aber ist er deswegen auch der einfachste? Hilbert hat auch nach den »*verschiedenen Voraussetzungen (und Hilfsmittel(n))*«, die ein Beweis verwendet, gefragt.

Sehr elementar ist der dritte Beweis. Voraussetzungen sind die Division mit Rest und die Definition von Primzahlen. Der Beweis ist indirekt geführt, lässt sich jedoch mit gewissen Erweiterungen auch direkt führen. Er ließe sich also, je nach Lehrplan, schon etwa ab der sechsten Klasse unterrichten.

Der zweite Beweis braucht neben etwas Kombinatorik den binomischen Lehrsatz und verwendet das Prinzip der vollständigen Induktion. Je nach Situation könnte dieser Beweis ab Ende eines Mathematik-Vorkurses oder schon in der Oberstufe behandelt werden. Die meisten Voraussetzungen erfordert sicherlich der erste Beweis. Konzepte wie die der Gruppe, der Einheitengruppe eines kommutativen Rings mit Eins und der Quotientenringe der ganzen Zahlen werden benötigt. Zudem wird der Satz von Lagrange vorausgesetzt. Beim Blick auf die benötigten Vorkenntnisse offenbart sich also ein konträres Bild gegenüber dem Blick auf die Kürze der drei Beweise.

Da ein Mathematiker beim Lesen des ersten Beweises meist nicht den Beweis des Satzes von Lagrange zusätzlich durchgehen wird, sondern diesen als gegeben benutzen wird, würde ich behaupten, dass der erste Beweis für Menschen ab einer gewissen mathematischen Ausbildung, vielleicht ab dem zweiten Semester des Mathematikstudiums, der einfachste ist. Für einen Studienanfänger ohne Kenntnisse der Gruppentheorie ist dies aber sicherlich nicht der Fall. Für diese Zielgruppe wäre also vermutlich der zweite Beweis der einfachste. Obwohl der dritte Beweis deutlich länger als die beiden anderen Beweise ist, so wird er von Menschen ohne diese Vorkenntnisse trotzdem sicherlich als erheblich einfacher wahrgenommen.

Wir sehen also, dass die Wahrnehmung von Einfachheit von Beweisen immer zielgruppenabhängig geschieht. Das ist kein Wunder: Beweise sind nichts anderes als eine besondere mathematische Form von Überzeugungen. Somit sind sie ein Medium gerichteter Kommunikation und haben damit immer einen Sender, der den Beweis aufschreibt oder erklärt, und einen oder mehrere Empfänger, die den Beweis hören oder lesen und versuchen zu verstehen. Auch wenn sich der Sender nicht notwendigerweise dieser Zielgruppe bewusst ist, so gibt es sie trotzdem immer.

Da wir gesehen haben, dass Einfachheit je nach Zielgruppe anders wahrgenommen wird, gehe ich davon aus, dass Hilberts 24. Problem gar nicht zielgruppenunabhängig lösbar sein kann. Deshalb vermute ich auch, dass Hilberts Annahme, dass es »*bei gegebenen Voraussetzungen nur einen einfachsten Beweis geben (kann),*« jeweils nur auf eine Zielgruppe bezogen stimmen kann.

Um die Beweise nun zu vergleichen, ist es aus meiner Sicht sinnvoll, die Beweise auf ihre inhaltliche Essenz zu reduzieren und diese zu vergleichen. Dazu wird ein Beweis zielgruppenabhängig auf seine Beweisidee reduziert. Unter der *Beweisidee* eines Beweises verstehe ich dessen Minimalform, also das, was vom Beweis übrig bleibt, wenn die Zielgruppe alles das entfernt, was zum sinngemäßen Verständnis des Beweises nicht zwingend erforderlich ist. Unter diese zu entfernenden Redundanzen fallen gemeinsame Vorkenntnisse der Zielgruppe, Folgerungen, die für die Zielgruppe offensichtlich sind, aber auch unnötige Ausführungen, Schemen, Strukturen, Darstellungen und Erweiterungen.

> *Die Beweisidee ist der kleinste Bauplan, mit dem die Zielgruppe den Beweis sinngemäß rekonstruieren kann.*

Obwohl eine Beweisidee immer existiert, muss sie nicht unbedingt eindeutig sein: So könnte es beispielsweise für den zweiten vorgestellten Beweis eine Zielgruppe geben, für die klar ist, dass man in dem Beweis das kombinatorische Argument genau dann braucht, wenn man den binomischen Lehrsatz verwendet. In dem Fall würde eine Beweisidee nur eine dieser beiden Hinweise enthalten, und es gäbe dadurch mindestens zwei verschiedene Beweisideen für den Beweis.

Ausgehend vom Konzept der zielgruppenabhängigen Beweisidee ist mein Kriterium für die Einfachheit eines Beweises nun formulierbar. Das Kriterium ist:

Die Kürze der Beweisidee.

Literatur

[1] C. Alsina & R. B. Nelsen: *Bezaubernde Beweise – Eine Reise durch die Eleganz der Mathematik*. Springer (2013).

[2] E. Gracián: *Primzahlen - Ein langer Weg ins Unendliche*. Libero IBP (2016).

[3] R. Kahle: *What is a Proof?* Axiomathes **25**(1) (2015) 79–91.

[4] R. Kahle & I. Hipolito: *Discussing Hilbert's 24th problem*. Philos. T. R. Soc. A **377** (2019).

[5] R. Kahle & I. Oitavem: *What is Hilbert's 24th Problem?* Kairos. Journal of Philosophy & Science **20**(1) (2018) 1–11.

[6] I. Stewart: *Die letzten Rätsel der Mathematik*. Rowohlt Verlag GmbH (2015).

[7] R. Thiele: *Hilbert's Twenty-Fourth Problem*. Am. Math. Mon. **110**(1) (2003) 1–24.

Es gibt ein Ignorabimus
Hilberts Programm und dessen Scheitern

Leon Duensing

Ein Problem von dreiundzwanzig

Es ist das Jahr 1900, Paris: Auf dem *2. internationalen Mathematikerkongress* wird David Hilbert eingeladen eine Rede zu halten. In dieser stellt er seine 23 Probleme vor, welche die mathematische Entwicklung des 20. Jahrhunderts in den verschiedensten Fachgebieten beeinflussen werden.

David Hilbert (1862-1943), URL: https://bit.ly/3MuwTlj

Eines dieser 23 Probleme hebt sich gegenüber den anderen hervor. Es handelt nicht von einer mathematischen Fragestellung als solche, vielmehr fragt es nach der inneren Konsistenz eines Bereiches der Mathematik. Dieses Problem handelt nicht von mathematischen Objekten, es handelt von der Mathematik selbst.

> »Sind die arithmetischen Axiome widerspruchsfrei?«

Er bezieht sich dabei konkret auf die Axiome, welche Giuseppe Peano 1889 formuliert hatte und die Existenz der natürlichen Zahlen sowie ihre Arithmetik gewährleisten.(1) In Worten lauten diese Axiome.

Axiom 1. Es ist 0 eine natürliche Zahl.
Axiom 2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
Axiom 3. Es ist 0 kein Nachfolger einer natürlichen Zahl, d. h. $n' \neq 0$ für jede natürliche Zahl n.
Axiom 4. Verschiedene natürliche Zahlen haben verschiedene Nachfolger, d. h. sind n und m natürliche Zahlen mit $n \neq m$, so ist auch $n' \neq m'$.
Axiom 5. (Prinzip der mathematischen Induktion) Es sei $P(n)$ die Eigenschaft einer natürlichen Zahl. Ist $P(0)$ wahr und ist mit $P(n)$ auch $P(n')$ wahr, so ist $P(n)$ wahr für alle natürlichen Zahlen n.

(1) siehe dazu Landau [5]

Der formalistische Ansatz

Um dieses Problem anzugehen, propagierte Hilbert die Idee des Formalismus. Diese besteht darin, mathematischen Aussagen jedwede intrinsischen Bedeutung zu entziehen. Ausgehend von den Axiomen, welche im Idealfall möglichst wenige sein sollten, werden alle Aussagen in der formalen Mathematik durch Kombinieren der Axiome nach logischer Syntax hergeleitet. In Hilberts Worten ausgedrückt:

> »Mathematik ist ein Spiel mit wenigen Regeln und bedeutungslosen Zeichen auf Papier.«

Wie lässt sich diese formalistische Methode konkret umsetzen? Bertrand Russell(2) und Alfred North Whitehead(3) gehen im Jahre 1910 diesen Schritt und veröffentlichen zwischen 1910 und 1913 das dreibändige Werk *Principia Mathematica.* Darin werden die meisten der damals behandelten mathematischen Teilbereiche, inklusive der Arithmetik, streng formalisiert. Mit Alltagsmathematik hat das Ganze wenig zu tun, man lasse dazu den Beweis der Aussage $1 + 1 = 2$ einmal auf sich wirken.

∗54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . {*}54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota\text{‘}x . \beta = \iota\text{‘}y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[{*}51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota\text{‘}x \cap \iota\text{‘}y = \Lambda .$

$[{*}13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . {*}11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\qquad \vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota\text{‘}x . \beta = \iota\text{‘}y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . {*}11{\cdot}54 . {*}52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1+1=2$.

Abbildung 1: Auszug aus der Principia Mathematica [7]

Dennoch bietet diese Formalisierung den Vorteil, dass Begriffe wie Aussagen und Beweise mathematisch rigoros definiert sind. Es kann dadurch die Mathematik mithilfe von mathematischen Methoden untersucht werden.

(2) Betrand Russel (1872–1970)
(3) Alfred North Whitehead (1861–1947)

Das Hilbertprogramm

Natürlich ist der formalistische Ansatz nur eine Hilfestellung, um die Grundsatzfragen der Mathematik anzugehen. Dabei geht es hauptsächlich um die Frage nach *Widerspruchsfreiheit* und *Vollständigkeit*. Im Jahr 1922 schlägt Hilbert vor, diese Grundsatzfragen separat zu herkömmlichen mathematischen Problemen zu betrachten und auch über formalistische Methoden hinaus sich mit den Fragen nach Sinn und Bedeutung der mathematischen Axiome auseinanderzusetzen. Er selbst bezeichnet dies als *Metamathematik*.

> »Zu dieser eigentlichen Mathematik kommt eine gewissermaßen neue Mathematik, eine Metamathematik, hinzu, die zur Sicherung jener dient [...]. In dieser Metamathematik kommt - im Gegensatz zu den rein formalen Schlußweisen der eigentlichen Mathematik - das inhaltliche Schließen zur Anwendung, und zwar zum Nachweis der Widerspruchsfreiheit der Axiome.« (4)

Das *Hilbertprogramm* ist geboren.

Königsberg, September 1930: Der Schock

Es findet die *2. Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften* statt, auf der u. a. auch die Grundlagen der Mathematik ein Thema sind. Bekannte Mathematiker der unterschiedlichen Schulen sind anwesend, so vertritt John von Neumann den Hilbertschen Formalismus, während Arend Heyting für die Intuitionistische Schule nach Brouwer und Rudolf Carnap für die logizistische Schule Russells vor Ort ist. In einer Podiumsdiskussion zum Thema der Vollständigkeit meldet sich ein bis dato recht unbekannter Doktorand zu Wort.

> »Man kann (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik) sogar Beispiele für Sätze [...] angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind.« (5)

Dieser Mann war der Wiener Logiker Kurt Gödel, und er hat soeben das Ergebnis seines noch unveröffentlichten Unvollständigkeitssatzes angekündigt. Nur ging niemand weiter auf seinen Beitrag ein.

(4) Tapp [6, wo genau]
(5) Carnap [1]

Kurt Gödel (1906-1978), URL: https://bit.ly/3rTWvhQ

Konkret hat Gödel zwei Unvollständigkeitssätze bewiesen, wobei für uns der zweite von besonderem Interesse ist. Dieser besagt, dass jedes hinreichend mächtige (6) formale System, welches bereits als widerspruchsfrei angenommen wird, seine eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann. Das trifft insbesondere auf die Arithmetik und die Principia Mathematica zu.

Einblick in den Beweis

Eine der neuartigen und genialen Methoden in den Gödelschen Beweisen besteht darin, alle Wörter eines formalen Systems M in den natürlichen Zahlen zu kodieren (siehe GÖDEL [2]). Konkret definiert er eine *Gödelisierung* als eine injektive Abbildung

$$G\colon M \hookrightarrow \mathbb{N}$$

mit einigen weiteren technischen Eigenschaften. Jedem Wort, insbesondere Aussagen und Beweisen, wird dadurch eine sog. *Gödelnummer* zugewiesen. So ist die Gödelnummer des Kommutativgesetzes

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

(6) ein System wird als hinreichend mächtig bezeichnet, wenn die Peano-Arithmetik darin formalisierbar ist.

in einer typischen Gödelisierung

$$22\,18\,22\,19\,16\,18\,14\,19\,13\,19\,14\,18\,17.$$

Der zentrale Schritt in dem Beweis ist es nun, den sog. *Gödelsatz* näher zu betrachten.

> »Meine Gödelnummer ist die Gödelnummer eines
> unbeweisbaren Satzes.«

Dieser Satz nimmt Bezug auf sich selbst, jedoch nur indirekt über die Gödelnummer. Dadurch lässt sich das logische Problem des unendlichen Regresses vermeiden, welches Mathematikern auch als falscher Ringschluss bekannt ist, umgehen. Es gelingt Gödel damit zu zeigen, dass dieser Satz im formalen System M unbeweisbar ist. Für Näheres zum Beweis siehe Hinman [4, Ch. 4.4].

Folgen

Hilberts Vision, die Widerspruchsfreiheit der mathematischen Axiome aus sich selbst heraus zu zeigen, ist also nicht durchführbar. Gödel hat gezeigt, dass es ein *Ignorabimus*, vor dem es Hilbert graute, im engeren Sinne stets geben muss.(7) Ob er damit seine grundlegenden Ambitionen nach Erkenntnis verworfen haben müsste, ist unklar. Jedoch ist von ihm das Folgende in einem anderen Kontext überliefert.

> »In der Tat wird, wenn wir bei unseren mathematischen Betrachtungen einem Probleme begegnen oder einen Satz vermuten, unser Erkenntnistrieb erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung jenes Problems und der strenge Beweis dieses Satzes gelingt oder wenn der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Misslingens von uns klar erkannt worden ist.« (8)

Es ist daraus insbesondere eine erkenntnistheoretische Debatte entstanden. Denn unter anderen Voraussetzungen lässt sich das Problem der Vollständigkeit durchaus lösen. So zeigte Gerhard Gentzen 1936 die Vollständigkeit der Peano-Axiome unter Voraussetzung weiterer Axiome, welche in der Peano-Arithmetik nicht enthalten sind. Die Frage nach dem Ignorabimus dreht sich also vielmehr darum, was wir uns zu wissen erlauben.

(7) vergleiche Hilbert [3]
(8) siehe Tapp [6, S. 34]

Literatur

[1] R. CARNAP: *Diskussion zur Grundlegung der Mathematik* (7.1930) URL: http://www.psiquadrat.de/downloads/diskussion_mathematik1931.pdf.

[2] K. GÖDEL: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I.* Monatsh. Math. **38**(1) (1931) 173–198.

[3] D. HILBERT: *Radioansprache in Königsberg.* 8.1930 URL: https://www.youtube.com/watch?v=wuLFqgx2Pec (aufgerufen am 09. 09. 2022).

[4] P. G. HINMAN: *Fundamentals of mathematical logic.* Springer-Verlag (2018).

[5] E. LANDAU: *Grundlagen der Analysis.* Bd. 141. Am. Math. Soc. (1965).

[6] C. TAPP: *An den Grenzen des Endlichen.* Springer (2013).

[7] A. N. WHITEHEAD & B. RUSSELL: *Principia mathematica.* Bd. 2. Cambridge University Press (1997).

Die schweren Probleme des Kletterns

Milan Baccheta

Das Klettern ist ein Sport, der von außen betrachtet etwas verrückt aussieht. Wie kommt man überhaupt darauf, sowas zu machen? Ist das nicht zu gefährlich? Das Klettern hat sich aus dem Bergsteigen entwickelt. Erst vor ca. 300 Jahren kam es in Mode, Berge zu besteigen. Nun gab es immer Leichtere und Schwerere. Gerade für die Berge, die aufgrund technischer Schwierigkeit schwer waren, galt es also zu trainieren. Dafür boten sich kürzere Routen an, womit das Klettern geboren war.

Seit diesen Anfängen hat sich einiges getan, und es haben sich viele Spielformen des Kletterns entwickelt. Auch haben sich viele Möglichkeiten ergeben, das Klettern zu einem sicheren Sport zu machen. Wenn diese Möglichkeiten vollständig ausgeschöpft werden, ist das Klettern ein Sport wie jeder andere und durchaus mit dem Joggen zu vergleichen. Spielformen, die in diese Kategorie fallen, kann man Sportklettern nennen. Allerdings ist es nicht immer möglich, praktisch oder erlaubt, Kletterrouten optimal abzusichern. In diesem Fall spricht man vom Abenteuerklettern. Das Sportklettern im klassischen Sinne verwendet in den Fels gebohrte Haken zu Absicherung. Dies ist natürlich nicht überall erlaubt. Routen von diesem Typ sind im Normalfall maximal 40ṁ lang, wobei dies auch durch die Länge herkömmlicher Seile limitiert ist. In den meisten Fällen ist das Stürzen in solchen Routen ungefährlich. Es ist also möglich, dies gefahrlos auszuüben.

Noch kürzer ist das Bouldern, das mit Hilfe von Matten abgesichert wird. Die Routen sind hier selten über 5ṁ hoch. Auch dies kann gefahrlos ausgeübt werden, wenn man die richtigen Sturztechniken beherrscht. Während beim Sportklettern die Ausdauer eine wichtige Rolle spielt, ist dies beim Bouldern deutlich irrelevanter. Sowohl das Sportklettern als auch das Bouldern haben eine Wettkampfform, die auf künstlichen Routen durchgeführt wird.

Irgendwo zwischen Abenteuerklettern und Sportklettern liegt das Mehrseillängenklettern. Hier wird eine Technik verwendet, die das Klettern von Routen, die länger als 40ṁ sind, möglich macht. Die mangelnden Fluchtmöglichkeiten auf solchen Routen, die z.B. bei Wettersturz relevant werden, machen diese Routen selbst bei guten Sicherungsmöglichkeiten schon etwas gefährlich. Zusätzlich sind in solchen Routen häufig leichte Stellen etwas schlechter versichert, frei nach dem Motto »Wenn man die schweren Stellen klettern kann, dann fällt man in leichten Stellen ja nicht«.

An Stellen, die nicht mit Bohrhaken ausgestattet sind, lassen sich gelegentlich mobile Sicherungsmittel verwenden. Dies sind Geräte, die sich in Felsspalten anbringen lassen und im Fall eines Sturzes den Sturz halten oder bremsen können. Dass diese Geräte halten, ist nicht immer garantiert, allerdings erhöhen sie die Sicherheit einer Route deutlich. In brüchigem Fels lassen sich aber weder sicherere Haken platzieren noch mobile Sicherungsmittel verwenden. Es gibt auch Routen, die vollständig ohne Haken auskommen. Diese Art des Kletterns wird im kurzen Fall Tradklettern genannt und im langen Fall Bigwall oder

Alpinklettern. Die schweren Probleme des Kletterns lassen sich grob unterteilen in Probleme der Gefahr und technische Probleme.

Beim Klettern gibt es nicht nur einen Weg hochzukommen. Am banalsten ist das Beispiel des Treppensteigens. Eine Treppe kann bestiegen werden, in dem man jede Stufe verwendet, man kann aber auch, wenn die Beine lang genug sind, nur jede zweite Stufe verwenden. Es gibt also keinen richtigen Weg im Klettern. Manche sind so schwer, dass es Tage braucht, bis man rausfindet, wie man zwei Meter weiter kommt. Viele dieser Probleme lassen sich natürlich durch Kraft beheben, wozu besonders die Finger trainiert werden.

Das andere große Problem ist Gefahr. Dies ist allerdings eine sehr subjektive Angelegenheit. Viele Alpinkletterer würden behaupten, dass viele schlecht gesicherte Routen, die sie begehen, für sie nicht gefährlich sind, sie stürzen ja nicht. Das klingt erstmal ein bisschen arrogant. Allerdings vertrauen wir beim Autofahren auch unseren Fähigkeiten. Es gibt allerdings Gefahren, die außerhalb der Kontrolle jedes Menschen sind, wie beispielsweise brüchiger Fels. Das Wetter ist auch oft ungewiss, und ein Gewitter ist eine ernstzunehmende Gefahr. Beide Gefahren lassen sich durch gute Planung, Fähigkeiten und Geschwindigkeit minimieren, aber sie verschwinden nicht.

Wenn man gerade diese Gefahren betrachtet, stellt sich schnell die Frage: „Warum?“. Nun Sportklettern ist in meinen Augen ein Sport wie jeder andere. Warum machen Menschen Sport? Diese Frage muss jeder Sportler für sich selbst beantworten. Warum man sich so in Gefahr bringt, ist eine schwierigere Frage. Hier kann ich nur Beispiele aus meinem Umfeld geben, die ein grobes Bild der Motivation zeichnen. Ruhm und Ehre sind wenig Motivation, da die Szene zu klein ist, um viel Geld zu liefern. Berühmt wird man höchstens in einem sehr kleinen Kreis. Es ist eine sehr spirituelle Erfahrung, sich in Situationen zu begeben, bei denen man alles richtig machen muss. Man ist Situationen ausgesetzt, in denen eigentlich nichts schiefgeht, aber wenn etwas schiefgeht, ist das katastrophal. Es zählt nur der Moment, denn nach einem Fehler gibt es keine weiteren Momente. Dies ist natürlich auch eine immense Ablenkung vom Alltag. Das Leben ist einfach in den Bergen, das Ziel ist klar, und wenn man es nicht hoch schafft, dann klettert man halt wieder runter. Trotzdem hat alles, was man tut, Konsequenzen, und es ist nicht egal, was man tut. Diese Erfahrungen macht man meist mit Partner, und eine solche Gemeinschaft ist sehr wertvoll. Gerade lange Routen begeht man nicht nur wegen des Adrenalins macht, und es ist unfair, Kletterer Adrenalinjunkies zu nennen.

Klettern ist also ein Sport mit vielen Facetten, wobei jede Facette ihre eigenen Schwierigkeiten und Probleme mit sich bringt. Was einen dazu motiviert, ist eine sehr persönliche Angelegenheit, die jeder für sich selbst klären muss.

Literatur

[1] R. Karl & E. Landes: *Erlebnis Berg: Zeit zum Atmen.* Bruckmann (1997).

[2] U. Neumann: *Klettertraining.* (2017).

[3] U. Neumann & D. Goddard: *Lizenz zum Klettern.* Neuland Mediaworks (1997).

Wissenschaft und Verantwortung

JENS BORGEMEISTER

Die Frage nach der Verantwortung in der Wissenschaft war lange Zeit von untergeordneter Bedeutung innerhalb der Naturwissenschaften. Einerseits wurde sie zumindest indirekt durch die Philosophie diskutiert, die bis zum 19. Jahrhundert noch eng mit den heutigen Naturwissenschaften verbunden war. Andererseits gab es nur wenige Anwendungsmöglichkeiten der Forschungen für Industrie, Handwerk oder Kriegsführung. Insbesondere nach den Atombombenabwürfen über Hiroshima und Nagasaki kam dann die Diskussion über die Verantwortung in der Wissenschaft auf.

Ende 1938 führten Otto Hahn und Fritz Straßmann Experimente durch, um Elemente mit höherer Ordnungszahl als das damals schwerste bekannte Element Uran (Ordnungszahl 92) zu finden (siehe HARDY [2]). Dazu beschossen sie Uran mit Neutronen. In dem dadurch entstanden Zerfallsprodukt konnten sie, statt dem erwarteten Element Radium, Barium nachweisen. Das Auftreten dieses Elements mit der Ordnungszahl 56 war mit der damaligen Kernphysik nicht zu erklären. Lise Meitner und Otto Frisch entwickelten daraufhin ein theoretisches Modell der Kernspaltung, welches Frisch anhand der vorhergesagten freigesetzten Energie bestätigen konnte. Die Ergebnisse über den chemischen Nachweis von Barium erscheinen am 6. Januar 1939, die physikalische Deutung von Meitner und Frisch am 11. Februar 1939. Noch im selben Jahr folgten viele Publikationen anderer Wissenschaftler, wobei u. a. herausgefunden wurde, dass bei der Spaltung eines Urankerns durch Neutronenbeschuss zwei bis drei Neutronen freigesetzt werden, also eine Kettenreaktion möglich ist. Außerdem wurde die technische Nutzbarmachung thematisiert.

Nur kurz darauf, bedingt auch durch den Ausbruch des 2. Weltkriegs, wird unabhängig voneinander in den USA, der Sowjetunion und in Nazi Deutschland aufgrund dieser Entdeckung am Bau von Atombomben geforscht. Den USA gelingt am 16. Juli 1945 der Test der ersten Atombombe.(1) Daraufhin wandten sich einige mit dem – zu dem Zeitpunkt noch streng geheimen Projekt – vertraute Wissenschaftlern und Wissenschaftlerinnen an die US-Regierung und versuchten den Einsatz von Atombomben über bewohntem Gebiet zu verhindern. Dies blieb allerdings ohne Erfolg, die Petitionen erreichten nicht einmal den damaligen US-Präsidenten Truman. So kam es am 6. und 9. August 1945 zu den Atombombenabwürfen über Hiroshima und Nagasaki; über 200 000 Menschen starben durch die Explosionen und die Folgen der radioaktiven Strahlung.

Otto Hahn, zu dem Zeitpunkt zusammen mit anderen Deutschen Wissenschaftlern in britischer Kriegsgefangenschaft, erfuhr von diesen Ereignissen. Später sagte er zu seinen Empfindungen bei dieser Nachricht: »Ich war unsagbar erschrocken und niedergeschlagen, der Gedanke an das große Elend unzähliger unschuldiger Frauen und Kinder war fast unerträglich« (siehe HAHN & HAHN [1, S. 173]). Er fühlte sich aufgrund seiner Entdeckung der Kernspaltung verantwortlich für diese Ereignisse, obwohl sie für ihn zur Zeit seiner Uran-Experimente nicht vorhersehbar waren. Er war sogar von Selbstmordgedanken gepeinigt. In den folgenden Jahren wurde Hahn zu einem bedeutenden Befürworter von nuklearer Abrüstung und setzte sich sehr für Frieden ein.

Nun stellt sich uns natürlich die Frage, wie die Wissenschaft bzw. Wissenschaftler und Wissenschaftlerinnen Anwendungen von Forschungsergebnissen wie z. B. Entwicklung und Abwurf der Atombomben verhindern oder zumindest beeinflussen können. Der einfache, auf dem klassischen Konzept von Verantwortung basierende Ansatz wäre, dass einfach alle in der Wissenschaft tätigen Personen selbst Verantwortung für ihre Forschung übernehmen müssen. Es ist allerdings sehr aufwändig und sogar oft nicht möglich abzusehen, ob Forschungsergebnisse z. B. für militärische Zwecke verwendet werden können. Außerdem kann es sein, dass andere Verwendungsmöglichkeiten diese aufwiegen.

(1) In der Sowjetunion findet am 29. Aug 1949 der erste Atomwaffentest statt

Dazu würde es die klassische Grundlagenforschung fast unmöglich machen, da hier oft die Anwendungsmöglichkeiten kaum betrachtet werden. Außerdem ist es bei Großprojekten wie z. B. Teilchenbeschleunigern gar nicht möglich, als einzelne Person Verantwortung für das gesamte Projekt zu übernehmen. Auch muss berücksichtigt werden, dass es manchmal nur eine Frage der Zeit ist, bis etwas Neues entdeckt wird, wenn die Grundlagen schon durch andere Forschungsarbeiten gelegt wurden.

Der von dem Altphilologen und Philosophen Georg PICHT [3] (1913-1982) vorgeschlagene Weg ist daher, dass nicht einzelne Personen, sondern das jeweils zuständige Kollektiv Verantwortung übernehmen muss. Dabei stellt sich natürlich die Frage, wie sich solch ein Kollektiv überhaupt bildet. Nach Picht führt allerdings die Notwendigkeit einer Übernahme von Verantwortung von selbst zur Bildung eines Kollektivs, selbst wenn dies von den beteiligten Personen nicht wahrgenommen wird.

Dazu wäre allerdings eine philosophische Selbstreflexion der einzelnen Spezialwissenschaften (z. B. Physik, Biologie, ...) nötig. Diese reflektierende »Wissenschaft von der Wissenschaft« fehlt aber. Grund dafür ist insbesondere, dass sich im letzten Jahrhundert die Spezialwissenschaften von der Philosophie emanzipiert haben und nun die Philosophie nur noch eine historische Fachwissenschaft ist, die kaum in der Lage ist, für alle Spezialwissenschaften diese Aufgabe zu übernehmen. Natürlich führte diese Entwicklung zu einer großen Steigerung der »Produktivität« der Spezialwissenschaften, allerdings ist es fraglich, ob man sich diese weiterhin auf Kosten der Verantwortung erlauben kann. Selbst wenn das Problem der Selbstreflexion innerhalb der Spezialwissenschaften gelöst wäre, stellt sich weiter die Frage, wie man eine konstruktive Zusammenarbeit zwischen verschiedenen Spezialwissenschaften und insbesondere mit der Politik ermöglichen kann.

Literatur

[1] D. HAHN & O. HAHN: *Mein Leben – Die Erinnerungen des großen Atomforschers und Humanisten).* Piper (1986).

[2] A. HARDY: *Otto Hahn - Entdecker der Kernspaltung*. pro-physik.de (2004) URL: https://www.pro-physik.de/nachrichten/otto-hahn-entdecker-der-kernspaltung (aufgerufen am 02. 01. 2023).

[3] G. PICHT: »Struktur und Verantwortung der Wissenschaft im 20. Jahrhundert«. *Wahrheit, Vernunft, Verantwortung: Philosophische Studien.* Klett 1969 S. 343–372.