

Ein Variationsansatz zur numerischen Berechnung isoperimetrischer Blätterungen

DIPLOMARBEIT

vorgelegt von

Jan Metzger

betreut von

Prof. Dr. H. Yserentant

Eberhard-Karls-Universität Tübingen
Mathematische Fakultät

September 2002

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt ein numerisches Verfahren vor, das dazu in der Lage ist, in asymptotisch flachen 3-Mannigfaltigkeiten eine Blätterung aus Flächen konstanter mittlerer Krümmung zu berechnen. Dabei wird von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß diese Flächen Lösungen des isoperimetrischen Problems sind. Dieses Problem lautet: "Finde Flächen, die ein gegebenes Volumen einschließen, dabei aber minimalen Flächeninhalt haben". Die Umformulierung als Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen ermöglicht es, Verfahren zur Minimierung anzuwenden. Das hier verwendete Verfahren der konjugierten Gradienten benötigt dabei nur erste Ableitungen der Metrik der umgebenden 3-Mannigfaltigkeit, was diese Methode auch dann interessant erscheinen läßt, wenn die Metrik nicht in geschlossener Form, sondern etwa nur auf einem Gitter gegeben ist.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. Gerhard Huisken und Herrn Prof. Dr. Harry Yserentant für die unkomplizierte Betreuung dieser Arbeit. Desweiteren danke ich allen, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben. Dabei sollen die Mitarbeiter der Arbeitsbereiche Analysis und Geometrie, die jederzeit ein offenes Ohr für Fragen hatten, besonders erwähnt werden. Die Kommentare von Bernhard Hein und Bernhard List, die sich die Mühe gemacht haben, diese Arbeit zu korrigieren waren für mich ebenso hilfreich, wie der Kaffee von Jonathan Alze. Ich möchte auch Florian Thulmann für seine organisatorischen Vorschläge danken.

FÜR MONI

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Notation und Grundlagen	5
1.1 Notation	5
1.2 Grundlagen	5
2 Variationsrechnung	12
3 Analytische Resultate	22
3.1 Das isoperimetrische Problem im \mathbf{R}^n	22
3.2 Die Schwarzschildmetrik	22
3.3 Asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten	23
3.4 Allgemeine Mannigfaltigkeiten	27
4 Diskretisierung des isoperimetrischen Problems	28
4.1 Triangulierungen und lineare Finite Elemente	28
4.2 Das diskrete Optimierungsproblem	30
4.3 Das diskrete Flächenfunktional	30
4.4 Die Ableitung des diskreten Flächenfunktionals	31
4.5 Das diskrete Volumenfunktional	33
4.6 Die Ableitung des diskreten Volumenfunktionals	37
5 Numerische Verfahren	39
5.1 Die Methode des Goldenen Schnitts	39
5.2 Das nichtlineare CG-Verfahren zur globalen Optimierung	40
5.3 Optimierung mit Nebenbedingungen	42
5.4 Die Hierarchische Basis	48
5.5 Anwendbarkeit der Verfahren	50
5.6 Alternative Verfahren	51
6 Implementierung	52
6.1 Datenstrukturen und Algorithmen	52
6.2 Erzeugung von Startflächen	53

6.3	Metriken	53
6.4	Abbruchbedingungen	55
6.5	Berechnung von Blätterungen	56
6.6	Die Wahl des Strafparameters	58
6.7	Ausgabeformate	61
6.8	Mögliche Erweiterungen	61
7	Numerische Beispielrechnungen	63
7.1	Die Schwarzschildmetrik	63
7.2	Metriken vom Brill-Lindquist Typ	66
7.3	Performance	80

Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist im Gebiet der numerischen Lösung geometrischer Variationsprobleme angesiedelt. Es soll ein Verfahren beschrieben werden, das in der Lage ist, in sogenannten asymptotisch flachen Enden von 3-Mannigfaltigkeiten, die eine spezielle Gestalt haben, strikt stabile 2-Flächen konstanter mittlerer Krümmung zu finden. Der theoretische Hintergrund wurde dabei von Huisken und Yau in ihrer Arbeit [HY96] bereitet.

Um ein numerisches Verfahren zu konstruieren wird ausgenutzt, daß Flächen konstanter mittlerer Krümmung kritische Stellen des *isoperimetrischen Problems* sind. Dieses schon in der Antike formulierte Problem sucht Flächen, die einen Körper festen Volumens mit möglichst wenig Oberfläche begrenzen. Da *strikt stabile* Flächen nicht so deformiert werden können, daß einerseits das eingeschlossene Volumen erhalten bleibt, und andererseits die Oberfläche abnimmt, sind sie gewissermaßen lokale Minima des isoperimetrischen Problems.

Diese Sichtweise wird benutzt um ein Verfahren zur Optimierung unter Nebenbedingungen auf das Problem anzuwenden. Dabei wird eine Fläche durch eine Triangulierung approximiert. Zu dieser Triangulierung werden Funktionale angegeben, die näherungsweise Oberfläche und Volumen dieser Triangulierung bestimmen. Diese Funktionale basieren auf Quadraturformeln, die in beiden Fällen gerade exakt genug sind, um für die euklidische Hintergrundmetrik das exakte Ergebnis zu liefern. Dabei wurde bei der Volumenberechnung die Integration über ein großes dreidimensionales Volumen vermieden, so daß diese mit wenig mehr Aufwand gegenüber der Berechnung der Oberfläche ausgeführt werden kann. Nun wird auf der Triangulierung eine Menge von Variationen eingeführt, die den Bewegungen der Eckpunkte in gegebene Richtungen entsprechen. Diese Variationen ergeben einen endlichdimensionalen Raum von Freiheitsgraden. Damit wird erreicht, daß das Problem für numerische Verfahren zur Minimierung unter Nebenbedingungen zugänglich ist.

Die Verfahren, die dazu verwendet werden, sind die Methode der modifizierten Lagrange-Funktion, die ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen in ein Problem ohne Nebenbedingungen transformiert, und die Methode der konjugierten Gradienten zur Lösung des entstehenden globalen Problems. Dabei wurde zur Konvergenzverbesserung eine Vorkonditionierung durch die hierarchische Basis vorgenommen. Die genannten Verfahren erlauben es, nur mit ersten Ableitungen der umgebenden Metrik auszukommen, was sie auch interessant erscheinen läßt, falls die Metrik nicht in geschlossener Form vorliegt, sondern zum Beispiel nur auf einem Gitter, wie dies bei Metriken der Fall ist, die in numerischen Simulationen der Einsteingleichungen erzeugt werden.

Ein verwandtes Problem ist die Suche von Minimalflächen, d.h. Flächen deren mittlere Krümmung verschwindet. Zur Lösung solcher Probleme existieren ver-

schiedene Ansätze. Eine Möglichkeit ist die Reduktion der Oberfläche mit Hilfe des mittleren Krümmungsflusses, der den Fluß zum L^2 -Gradienten des Oberflächenfunktionals darstellt. Ein entsprechender Algorithmus, der auf einer Finite-Element-Diskretisierung des Laplace-Beltrami Operators beruht, wird von Dziuk in [Dzi91] vorgestellt. Ein anderer Ansatz verwendet die Niveauflächenformulierung dieses Flusses. Diese wird von Pasch in seiner Dissertation [Pas94] untersucht. Diese Methoden lassen sich als Minimierungsverfahren deuten, haben allerdings den Nachteil sehr langsamer Konvergenz. Hutchinson und Dziuk beschreiben in [DH99a, DH99b] ein Verfahren zur Minimierung des Dirichletintegrals, das Minimalflächen mit harmonischer Parametrisierung ergibt. Für geschlossene Flächen läßt sich ein solcher Ansatz nicht ohne weiteres verwenden, da die Identität, als harmonische Abbildung der Sphäre in sich, kein stabiler kritischer Punkt des Dirichletfunktionals ist. Man kann daher nicht erwarten, die Verzerrung einer Triangulierung zu kontrollieren, ohne Nebenbedingungen zu stellen. Dann ist dieser Ansatz algorithmisch gesehen aber nicht leichter als der hier gewählte.

Die numerische Berechnung von Flächen konstanter mittlerer Krümmung ist aus mehreren Gründen interessant. Zum einen kann das isoperimetrische Problem auf dem \mathbf{R}^3 mit einer gegebenen Metrik betrachtet werden, was an sich schon ein interessantes Problem ist.

Andere Motivation kommt aus der Physik, genauer, aus der Allgemeinen Relativitätstheorie. Dort treten asymptotisch flache 3-Mannigfaltigkeiten als raumartige Schnitte einer asymptotisch flachen Lorentzmannigfaltigkeit L auf, die ein isoliertes gravitierendes System modelliert.

Sei nun N das asymptotisch flache Ende einer 3-Mannigfaltigkeit, d.h. N ist diffeomorph zu $\mathbf{R}^3 \setminus B_1(0)$ und die Metrik erfülle für $r \rightarrow \infty$

$$|\bar{g}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}| \leq Cr^{-1} \quad |\partial\bar{g}_{\alpha\beta}| \leq Cr^{-2} \quad \bar{\text{Ric}} \geq -Cr^{-2}\bar{g}$$

Für solches N lassen sich verschiedene Massen-Begriffe definieren. Einer dieser Begriffe ist die ADM-Masse [ADM61], definiert als Flußintegral im Unendlichen

$$m_{ADM} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi} \int_{S_r} \left(\frac{\partial\bar{g}_{\alpha\alpha}}{\partial\bar{y}^\beta} - \frac{\partial\bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial\bar{y}^\alpha} \right) \nu^\beta \text{vol}_{S_r}$$

Die ADM-Masse ist eine geometrische Invariante und endlich, falls die totale Skalar­krümmung von N endlich ist. Sie gibt dabei die Gesamtenergie des Systems an. Sie ist immer nichtnegativ, falls die Skalar­krümmung von N nichtnegativ ist, und verschwindet genau dann, wenn N der euklidische Raum ist, wie zuerst von Schoen und Yau in [SY79] bewiesen. Die Nichtnegativität der Skalar­krümmung folgt wiederum aus der schwachen Energiebedingung an den Energie-Impuls-Tensor der Einsteingleichungen und aus Bedingungen an die Einbettung von N in L .

Ein weiterer Massenbegriff ist die *Hawking-Masse* oder *Hawking quasi local mass*.

Diese ist für eine 2-Fläche Σ in N wie folgt definiert

$$m_H(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{\Sigma} H^2 \text{vol}_{\Sigma} \right)$$

Für große approximativ runde Sphären Σ_r mit Radius r gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} m_H(\Sigma_r) = m_{ADM}$$

Hat man nun Flächen konstanter mittlerer Krümmung, und kennt deren Flächeninhalt und den Wert der konstanten mittleren Krümmung, so läßt sich damit die Hawking-Masse sehr einfach berechnen. Da die Flächen von Huisken und Yau approximativ rund sind, erhält man dadurch eine Approximation der ADM-Masse. Dabei erhält man die mittlere Krümmung als Lagrange-Parameter aus oben genannten Verfahren. Dies ist eine Größe, die sich nur aus ersten Ableitungen der konstruierten Funktionale und damit nur aus ersten Ableitungen der Hintergrundmetrik ergibt. Man kann also die Hawking-Masse auf solchen Flächen, wie die ADM-Masse, nur mit ersten Ableitungen der Metrik berechnen.

Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung wurden von Huisken und Yau darüberhinaus dazu benutzt, ein Massenzentrum zu definieren. Dieses ergibt sich als euklidischer Schwerpunkt der Flächen, der sich sehr einfach numerisch berechnen läßt, wenn die Flächen bekannt sind.

Die von Huisken und Yau konstruierten Blätterungen ergeben außerdem einen Diffeomorphismus

$$F : (r_0, \infty) \times S^2 \rightarrow N \setminus N_0$$

so daß die Fläche $F(r, S^2)$ den Flächeninhalt $4\pi r^2$ und konstante mittlere Krümmung hat. Dabei ist $N_0 \subset B_{r_1}(0)$ ein inneres Gebiet.

Man erhält also geometrisch definierte Koordinaten, die durch einige Zusatzanforderungen (vgl. [Ham97, 3]) eindeutig gemacht werden können. Diese Koordinaten könnten sich bei der Evolution der Metrik mit den Einsteingleichungen als nützliches Hilfsmittel erweisen, denn sie besitzen sowohl eine geometrische Interpretation als isoperimetrische Flächen, als auch eine physikalische Interpretation als Massezentrum des Systems.

Mit Hilfe dieser Koordinaten besteht die Möglichkeit, ein Verfahren zu konstruieren, mit dem man für zwei gegebene Außengebiete numerisch testen kann, ob sie isometrisch sind.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt gegliedert

Kapitel 1 beschreibt kurz die verwendete Notation und gibt die benötigten differentialgeometrischen Grundlagen an.

Kapitel 2 formuliert das isoperimetrische Problem und zeigt, daß die Euler-Lagrange-Gleichung des Variationsproblems die Gleichung $H = \text{const.}$ ergibt. Desweiteren wird hier, motiviert durch die Zweite Variation des Oberflächenfunktionals, der Begriff der Stabilität bzw. strikten Stabilität definiert.

Kapitel 3 faßt analytische Resultate zusammen, die das isoperimetrische Problem betreffen. Hier findet sich insbesondere eine Darstellung der Resultate von Huisken und Yau aus [HY96] für asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten.

Kapitel 4 beschreibt die Methoden, mit denen das isoperimetrische Problem diskretisiert wurde und gibt die Konstruktion der diskreten Funktionale für Oberfläche und Volumen an.

Kapitel 5 beschreibt und untersucht Verfahren zur Lösung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen, die nach der Diskretisierung auftreten.

Kapitel 6 enthält Details zur Implementierung der Verfahren und einige Notizen und Besonderheiten.

Kapitel 7 schließlich beschreibt einige numerisch durchgeführten Experimente, die zeigen, daß das Verfahren funktioniert, und die Geschwindigkeit des Verfahrens messen.

1 Notation und Grundlagen

In diesem Abschnitt werden kurz die Grundlagen aus der Differentialgeometrie vorgestellt, die später benötigt werden, um das isoperimetrische Problem mit Methoden der Variationsrechnung zu untersuchen. Dieses Kapitel setzt gewisse Kenntnisse über Riemannsche Mannigfaltigkeiten voraus, die man etwa in [Jos98] mit Blick auf die Analysis oder in [Fra97] mit Blick auf die Physik nachlesen kann.

1.1 Notation

Um die Formeln übersichtlicher zu halten wird die Einsteinsche Summenkonvention verwendet. Dabei wird ein Produkt, in dem derselbe Index einmal unten und einmal oben auftaucht über diesen Index summiert, wobei der Index von 1 bis zur Raumdimension läuft.

In dieser Arbeit sind immer zwei Dimensionen relevant. Zum einen ist das die Dimension der umgebenden Mannigfaltigkeit N , die in den Kapiteln 1 und 2 n -dimensional, und in der restlichen Arbeit 3-dimensional sein wird. Für Summation von 1 bis n bzw. später von 1 bis 3 werden immer griechische Indizes α, β, \dots verwendet. Alle geometrischen Größen, die sich auf N beziehen, werden mit einem Querstrich bezeichnet $\bar{g}_{\alpha\beta}, \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ u.s.w.

Zum Anderen wird eine Kodimension-1 Untermannigfaltigkeit Σ in N betrachtet. Die Dimension von Σ ist also $n - 1$ und wenn nur über diesen Bereich summiert werden soll, werden lateinische Indizes verwendet. Außerdem werden die zu Σ gehörenden geometrischen Größen ohne Querstrich geschrieben g_{ij}, Γ_{ij}^k u.s.w.

Beispielsweise ist

$$\bar{g}_{\alpha\beta} X^k \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} \nu^\beta = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \bar{g}_{\alpha\beta} X^k \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} \nu^\beta.$$

1.2 Grundlagen

Im Folgenden sei N eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik \bar{g} . Das Tangentialbündel von N wird mit TN bezeichnet, $\mathcal{X}(N)$ ist die Menge der Vektorfelder auf N .

In lokalen Koordinaten \bar{y}^α von N kann man die Metrik mit Hilfe der Komponenten

$$\bar{g}_{\alpha\beta} := \bar{g} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}^\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\beta} \right)$$

darstellen.

Der Levi-Civita-Zusammenhang auf N wird mit $\bar{\nabla}$ bezeichnet. Dieser ist dann für ein Vektorfeld $X = X^\alpha \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\alpha}$ gegeben durch

$$\bar{\nabla} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\beta} X = \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \bar{y}^\beta} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha X^\gamma \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^\alpha},$$

wobei die *Christoffel-Symbole* $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ von $\bar{\nabla}$ durch

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} \bar{g}^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\delta}}{\partial \bar{y}^\beta} + \frac{\partial \bar{g}_{\delta\beta}}{\partial \bar{y}^\alpha} - \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{y}^\delta} \right)$$

gegeben sind.

Mit $\bar{\nabla}$ läßt sich zu einem Vektorfeld X auf N die $C^\infty(N)$ -lineare Abbildung

$$\bar{\nabla} X : Y \mapsto \bar{\nabla}_Y X$$

definieren. Die Spur $\operatorname{div} X = \operatorname{tr} \bar{\nabla} X$ dieser Abbildung heißt *Divergenz* von X .

In lokalen ON-Basisvektorfeldern e_1, \dots, e_n ist

$$\operatorname{div} X = \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X, e_i) \quad (1.1)$$

bzw. in einer Koordinatenbasis

$$\operatorname{div} X = \sum_{\alpha=1}^n \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \bar{y}^\alpha} + \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\beta X^\alpha \right). \quad (1.2)$$

Ist $\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ mit $\bar{F}(\cdot, 0) = \operatorname{id}_N$ und $\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right|_{t=0} = X$, wobei $X \in \mathcal{X}(N)$, dann ist die *Lie-Ableitung* einer l -Form ω in Richtung X gegeben durch

$$\mathcal{L}_X \omega = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \bar{F}(\cdot, t)^* \omega. \quad (1.3)$$

Dies ist wieder eine l -Form. Dabei bezeichnet $\bar{F}^* \omega$ den *Pullback* der Form ω , der für Vektorfelder $X_1, \dots, X_p \in \mathcal{X}(N)$ im Punkt $p \in N$ durch

$$\bar{F}^* \omega_p(X_1, \dots, X_l) = \omega_{F(p)}(d\bar{F}_p(X_1), \dots, d\bar{F}_p(X_l))$$

gegeben ist. Dies ist wieder eine l -Form.

Die Volumenform auf N wird mit vol_N bezeichnet und ist in lokalen Koordinaten \bar{y}^α gegeben durch

$$\operatorname{vol}_N := \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} d\bar{y}^1 \wedge \dots \wedge d\bar{y}^n.$$

Für die Lie-Ableitung der Volumenform vol_N gilt gerade

$$\mathcal{L}_X \operatorname{vol}_N = \operatorname{div} X \operatorname{vol}_N. \quad (1.4)$$

Das *Divergenztheorem* besagt, daß für kompakte $\Omega \subset N$ mit glattem Rand $\partial\Omega$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} X \operatorname{vol}_N = \int_{\partial\Omega} \bar{g}(X, \nu) \operatorname{vol}_{\partial\Omega} \quad (1.5)$$

gilt, wobei ν die äußere Normale an $\partial\Omega$ und $\operatorname{vol}_{\partial\Omega}$ die Volumenform auf $\partial\Omega$ ist.

Der *Riemannsche Krümmungstensor* \bar{R} ist der Tensor, der den drei Vektorfeldern $X, Y, Z \in \mathcal{X}(N)$ das Vektorfeld $\bar{R}(X, Y)Z$ mit

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z$$

zuordnet. Er mißt sozusagen wie stark kovariante Ableitungen auf N nicht vertauschbar sind. In lokalen Koordinaten ist \bar{R} gegeben durch

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \left(\bar{R} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\alpha}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\beta}}, \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\gamma}} \right) \right)^{\delta} = \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\alpha}} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\delta} - \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\beta}} \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\delta} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\alpha\varepsilon}^{\delta} - \bar{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\beta\varepsilon}^{\delta}$$

Die Spur des Riemannschen Krümmungstensors heißt *Ricci-Tensor*. Es ist

$$\bar{\operatorname{Ric}}(X, Y) = \operatorname{tr} (Z \mapsto \bar{R}(Z, X)Y)$$

und seine Komponenten sind

$$\bar{\operatorname{Ric}}_{\alpha\beta} = \bar{R}_{\alpha\beta}^{\gamma}.$$

Σ nennt man eine $(n-1)$ -dimensionale, kompakte, eingebettete Hyperfläche in N , wenn Σ eine $(n-1)$ -dimensionale, kompakte Mannigfaltigkeit ist und eine glatte injektive Abbildung

$$F : \Sigma \rightarrow N$$

existiert, so daß das Differential dF auf ganz Σ injektiv ist.

Dann kann mit Hilfe von F und \bar{g} auf Σ eine Metrik $g = F^* \bar{g}$ definiert werden. Für Vektoren X_p, Y_p in $p \in \Sigma$ gilt dabei

$$g_p(X_p, Y_p) = \bar{g}_{F(p)}(dF_p(X_p), dF_p(Y_p))$$

In lokalen Koordinaten x^i für Σ und \bar{y}^{α} für N sind die Komponenten von g gegeben durch

$$g_{ij}(p) = \bar{g}_{F(p)} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i_p}, \frac{\partial F}{\partial x^j_p} \right) = \bar{g}_{\alpha\beta}(F(p)) \frac{\partial F^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial F^{\beta}}{\partial x^j}.$$

Der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ zu g auf Σ entsteht durch Projektion des Levi-Civita-Zusammenhangs von N . Man hat für $X, Y \in \mathcal{X}(\Sigma)$

$$\nabla_X Y = dF^{-1} \left((\bar{\nabla}_{dF(X)} dF(Y))^{\operatorname{tang.}} \right)$$

Sind Σ und N orientierbar, so existiert ein globales Normalenvektorfeld ν längs F , d.h. eine Abbildung $\nu : \Sigma \rightarrow TN$ mit $\nu_p \in T_{F(p)}N$, $\bar{g}(\nu, \nu) = 1$ und $\bar{g}(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^i}) = 0$ für $i = 1, \dots, n-1$.

Die Krümmung von Σ in N wird durch die *Weingartenabbildung* A beschrieben. A ist das Endomorphismenfeld, das im Punkt p in Σ durch

$$A_p : T_p\Sigma \rightarrow T_p\Sigma : X \mapsto \nabla_X \nu$$

gegeben ist. Die Spur $H_p = \text{tr } A_p$ dieser Endomorphismen heißt *mittlere Krümmung* von Σ in p , das Quadrat des Betrags von A heißt *totale Krümmung*.

Mit Hilfe von A läßt sich die *Zweite Fundamentalform* h auf Σ für Tangentialvektoren X, Y definieren als

$$h(X, Y) = g(A(X), Y).$$

Da Tangentialvektoren orthogonal zur Normalen sind und $\bar{\nabla}$ metrisch ist, gilt

$$\begin{aligned} h(X, Y) &= g(A(X), Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \nu, Y) \\ &= -\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_X Y) + X\bar{g}(\nu, Y) = -\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_X Y), \end{aligned} \quad (1.6)$$

und wegen der Torsionsfreiheit von $\bar{\nabla}$ ist für kommutierende Vektorfelder X, Y

$$\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_X Y) = \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_Y X).$$

Rechnung (1.6) rückwärts, mit X und Y vertauscht, liefert dann

$$h(X, Y) = h(Y, X) \quad \text{bzw.} \quad g(A(X), Y) = g(X, A(Y)).$$

Somit ist h symmetrisch und A selbstadjungiert.

Da A selbstadjungiert ist, existiert zu $p \in \Sigma$ eine Basis von $T_p\Sigma$ aus \bar{g} -orthogonalen Eigenvektoren von A_p . Diese Eigenvektoren heißen *Hauptkrümmungsrichtungen* und die zugehörigen Eigenwerte *Hauptkrümmungen* in p .

In lokalen Koordinaten gelten für die Komponenten von h die Weingartengleichungen

$$\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^j} = -h_{ij} \nu^\alpha \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial \nu^\alpha}{\partial x^i} + \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \nu^\gamma = h_{ij} g^{jl} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} \quad (1.8)$$

Der Riemannsche Krümmungstensor R auf Σ und der Riemannsche Krümmungstensor \bar{R} auf N hängen durch die Gaußgleichungen

$$R_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}$$

und die Gleichungen von Codazzi-Mainardi

$$\nabla_i h_{jk} - \nabla_k h_{ij} = \bar{g} \left(\bar{R} \left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) \frac{\partial F}{\partial x^k}, \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) \quad (1.9)$$

zusammen.

Ist X ein nicht notwendig tangentiales Vektorfeld entlang Σ , d.h. $X : \Sigma \rightarrow TN$ mit $X_p \in T_{F(p)}N$, so kann man auch für X die Divergenz auf Σ bilden, indem man setzt

$$\operatorname{div}_\Sigma X := \operatorname{tr}_\Sigma \left(Y \mapsto (\bar{\nabla}_Y X)^{\operatorname{tang.}} \right).$$

Es wird nun also nur noch eine $n - 1$ dimensionale Spur gebildet. In einer lokalen ON-Basis e_1, \dots, e_{n-1} von $T\Sigma$ gilt also

$$\operatorname{div}_\Sigma X = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{g}(\bar{\nabla}_{e_i} X, e_i). \quad (1.10)$$

Man kann nun das Divergenztheorem (1.5) auf solche Vektorfelder entlang Σ verallgemeinern. Es gilt

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma X \operatorname{vol}_\Sigma = \int_\Sigma \bar{g}(X, \nu) H \operatorname{vol}_\Sigma. \quad (1.11)$$

Dies zeigt man, indem man $X = X^{\operatorname{tang.}} + \bar{g}(X, \nu) \nu$ in Tangential- und Normalanteil zerlegt. Die Divergenz ist \mathbf{R} -linear, also verschwindet nach dem Divergenztheorem 1.5 der Beitrag des tangentialen Anteils, und es bleibt

$$\int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma X \operatorname{vol}_\Sigma = \int_\Sigma \operatorname{div}_\Sigma (\bar{g}(X, \nu) \nu) \operatorname{vol}_\Sigma.$$

Außerdem rechnet man mit (1.10) nach, daß

$$\operatorname{div}_\Sigma (\bar{g}(X, \nu) \nu) = \bar{g}(X, \nu) \operatorname{div}_\Sigma \nu = \bar{g}(X, \nu) H.$$

Ist (N, \bar{g}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und ist $\psi > 0$ eine Funktion auf N , so ist die symmetrische 2-Form $\hat{g} = \psi^4 \bar{g}$ wiederum eine Metrik auf N . Da \hat{g} und \bar{g} die gleichen Winkel messen, nennt man \hat{g} und \bar{g} *konform*.

Die Krümmungsgrößen zu \hat{g} lassen sich nun aus den entsprechenden Größen zu \bar{g} berechnen, wie die folgenden Lemmata für die Christoffelsymbole, den Ricci-Tensor und die Weingartenabbildung einer Hyperfläche zeigen.

Lemma 1.1 *Ist (N, \bar{g}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ist $\hat{g} = \psi^4 \bar{g}$ so berechnet man die Christoffelsymbole $\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ von \hat{g} aus den Christoffelsymbolen $\bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ von \bar{g} mittels*

$$\hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha = \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha + 2\psi^{-1} \left(\delta_\beta^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^\gamma} + \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^\beta} - \bar{g}_{\beta\gamma} \bar{g}^{\alpha\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^\rho} \right).$$

Damit kann man die Komponenten des Ricci-Tensor $\widehat{\text{Ric}}$ von \hat{g} aus den Komponenten von $\bar{\text{Ric}}$ für \bar{g} mittels

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Ric}}_{\alpha\beta} = \bar{\text{Ric}}_{\alpha\beta} & - 2\psi^{-1} \left((n-2) \bar{\nabla}_{\alpha\beta}^2 \psi + g_{\alpha\beta} \Delta \psi \right) \\ & + 2\psi^{-2} \left(3(n-2) \bar{\nabla}_{\alpha} \psi \bar{\nabla}_{\beta} \psi - (2n-5) g_{\alpha\beta} |\nabla \psi|^2 \right)\end{aligned}$$

berechnen.

Beweis: Die erste Gleichung folgt aus der Definition der Christoffelsymbole, die zweite folgt aus der Definition der des Ricci-Tensors und aus der ersten Gleichung nach einer längeren Rechnung. \square

Lemma 1.2 *Ist Σ eine Hyperfläche in (N, \bar{g}) mit den Hauptkrümmungen λ_i , und ist $\hat{g} = \psi^4 \bar{g}$ eine zu \bar{g} konforme Metrik, dann bleiben die Hauptkrümmungsrichtungen von Σ als Hyperfläche in (N, \hat{g}) gleich und die neuen Hauptkrümmungen $\hat{\lambda}_i$ sind für $i = 1, \dots, n-1$*

$$\hat{\lambda}_i = \psi^{-2} \lambda_i + 2\psi^{-3} \partial_{\nu} \psi.$$

Dabei ist ν die Einheitsnormale an Σ bezüglich \bar{g} .

Beweis: Die Normale $\hat{\nu}$ an Σ bezüglich \hat{g} ist gegeben durch

$$\hat{\nu} = \psi^{-2} \nu$$

Seien X_i die Hauptkrümmungsrichtungen von Σ zu \bar{g} , d.h. $\bar{g}(A(X_i), X_j) = \delta_{ij} \lambda_i$ und $\bar{g}(X_i, X_j) = \delta_{ij}$. Dann gilt mit $\nu = \nu^{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\alpha}}$ und $X_i = X_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ in lokalen Koordinaten x für Σ und \bar{y} für N

$$\begin{aligned}& \hat{g}(\hat{A}(X_i), X_j) \\ &= \psi^4 \bar{g} \left(X_i^k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^k} \psi^{-2} \right) \nu + \psi^{-2} \left(\frac{\partial \nu^{\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial F^{\beta}}{\partial x^k} \hat{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} \nu^{\gamma} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\alpha}} \right), X_j \right) \\ &= \psi^2 \bar{g}(A(X_i), X_j) \\ & \quad + 2\psi \bar{g} \left(X_i^k \frac{\partial F^{\beta}}{\partial x^k} \nu^{\gamma} \left(\delta_{\beta}^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^{\gamma}} + \delta_{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^{\beta}} - \bar{g}_{\beta\gamma} \bar{g}^{\alpha\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^{\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\alpha}}, X_j \right) \\ &= \psi^2 \delta_{ij} \lambda_i + 2\psi \bar{g}(\partial_{\nu} \psi X_i, X_j) \\ &= \psi^2 \delta_{ij} \lambda_i + 2\psi \partial_{\nu} \psi \delta_{ij}\end{aligned}$$

Dabei verschwinden im vorletzten Schritt die beiden weggelassenen Terme, da einerseits

$$X_i^k \frac{\partial F^{\beta}}{\partial x^k} \nu^{\gamma} \delta_{\gamma}^{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{y}^{\beta}} \frac{\partial}{\partial \bar{y}^{\alpha}} = \partial_{X_i} \psi \nu$$

was einen Vektor ergibt, der \bar{g} -orthogonal zu X_j ist, und andererseits

$$\bar{g}_{\beta\gamma}\nu^\gamma\frac{\partial F^\beta}{\partial x^k} = \bar{g}\left(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^k}\right) = 0.$$

Daher ist \hat{A} in der Basis der X_i auch diagonal und hat die behaupteten Eigenwerte, da die X_i in der Metrik \hat{g} die Länge ψ^2 haben. \square

Lemma 1.3 *Ist auf $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, \delta)$ die konforme Schwarzschildmetrik $g_S = \psi^4\delta$ mit $\psi = 1 + \frac{m}{2r}$ für $m > 0$ gegeben, so gilt für die Komponenten des Ricci-Tensors im Punkt y*

$$\text{Ric}_{\alpha\beta}^S = \frac{m}{r^3}\psi^{-2} \left(\delta_{\alpha\beta} - 3\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\epsilon}\frac{y^\gamma y^\epsilon}{r^2} \right).$$

Der Ricci-Tensor hat also den Eigenwert $-2mr^{-3}\psi^{-6}$ in radialer Richtung y , und die Eigenwerte $mr^{-3}\psi^{-6}$ in Richtungen, die orthogonal zu y sind.

Beweis: Dies ergibt sich nach einer einfachen Rechnung aus Lemma 1.1 mit $n = 3$ und $\bar{g}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$. \square

2 Variationsrechnung

In diesem Kapitel soll das isoperimetrische Problem mit Mitteln der Variationsrechnung untersucht werden. Dabei soll insbesondere gezeigt werden, daß die Euler-Lagrange Gleichung dieses Problems $H \equiv \text{const.}$ lautet. Zunächst aber soll das Problem präzise formuliert werden.

Sei jetzt und im restlichen Kapitel (N, \bar{g}) eine orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n , und sei $\Omega \subset N$ eine kompakte Teilmenge von N mit glattem Rand $\Sigma = \partial\Omega$.

Ω heißt Lösung des isoperimetrischen Problems zum Volumen V_0 falls

$$\begin{aligned} |\Omega| &= V_0 \\ \text{und } |\partial\Omega| &\leq |\partial\Omega'| \quad \text{für alle } \Omega' \subset\subset N \text{ mit } |\Omega'| = V_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Um Methoden der Variationsrechnung anzuwenden, benötigt man den Begriff der Variationsrichtung.

Definition 2.1 *Ist $\Omega \subset N$ eine Teilmenge wie oben, so heißt eine 1-Parameterfamilie von Diffeomorphismen*

$$\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

mit $\bar{F}(\cdot, 0) = \text{id}_N$ eine Variation von Ω . Das Vektorfeld $\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right|_{t=0}$ heißt Variationsrichtung.

Abkürzend sei im Folgenden $\Omega_t = \bar{F}(\Omega, t)$ und $\Sigma_t = \bar{F}(\Sigma, t)$ für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Ein solches \bar{F} deformiert Ω auf differenzierbare Weise zu Teilmengen Ω_t von N , die den glatten Rand Σ_t haben. Nun stellt sich die Frage, welche Eigenschaft die Variationsrichtung haben muß, damit bei dieser Deformation das Volumen von Ω_t konstant bleibt. Dazu berechnet man die erste Variation des Volumenfunktions

$$\text{Vol}(\Omega) = \int_{\Omega} \text{vol}_N$$

Satz 2.2 *Ist $\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ eine Variation von Ω mit Variationsrichtung $\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right|_{t=0} = X$ so gilt*

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Sigma} \bar{g}(X, \nu) \text{vol}_{\Sigma}$$

Beweis: Es gilt

$$\text{Vol}(\Omega_t) = \int_{\Omega_t} \text{vol}_N = \int_{\Omega} \bar{F}(\cdot, t)^* \text{vol}_N$$

damit liefert Satz (1.4) und das Divergenztheorem (1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{Vol}(\Omega_t) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \bar{F}(\cdot, t)^* \text{vol}_N = \int_{\Omega} \mathcal{L}_X \text{vol}_N \\ &= \int_{\Omega} \text{div } X \text{vol}_N = \int_{\Sigma} \bar{g}(X, \nu) \text{vol}_{\Sigma} \end{aligned}$$

□

Diese Formel zeigt, daß die Variation des Volumens, wie erwartet, nur vom Normalanteil von X entlang Σ abhängt.

Desweiteren sieht man aus der Formel, daß für volumenerhaltende Variationen die Normalgeschwindigkeit $f = \bar{g}(X, \nu)$

$$\int_{\Sigma} f \text{vol}_{\Sigma} = 0$$

erfüllt, d.h. f ist dann L^2 -orthogonal zu den konstanten Funktionen auf Σ .

Umgekehrt erhält man zu jeder vorgegebenen Funktion $f \in C^{\infty}(\Sigma)$, für die $\int_{\Sigma} f = 0$ gilt, eine volumenerhaltende Variation mit dieser Normalgeschwindigkeit.

Lemma 2.3 *Ist $f \in C^{\infty}(\Sigma)$ mit $\int_{\Sigma} f \text{vol}_{\Sigma} = 0$ so existiert eine Familie von Diffeomorphismen*

$$\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$$

so daß auf Σ gilt, daß

$$\bar{g} \left(\frac{d\bar{F}}{dt} \Big|_{t=0}, \nu \right) = f$$

und außerdem

$$\text{Vol}(\bar{F}(\Omega, t)) = \text{Vol}(\Omega)$$

Beweis: (entsprechend [BdC84, Lemma 2.4]). Wähle Gaußsche Normalkoordinaten $x : \Sigma \times (-\delta, \delta) \rightarrow N$ um Σ , d.h. die Flächen $x(\Sigma, h)$ haben den Abstand h von Σ und die Vektoren $\frac{\partial x}{\partial h}(p, h)$ sind normal an die Flächen $x(\Sigma, h)$.

Sei $g \in C^{\infty}(\Sigma)$ eine Funktion mit $\int_{\Sigma} g \text{vol}_{\Sigma} \neq 0$. Sei außerdem $\phi \in C^{\infty}(\mathbf{R})$ eine Abschneidefunktion mit $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(h) = 1$ für $|h| \leq \frac{\delta}{8}$ und $\phi(h) = 0$ für $|h| \geq \frac{\delta}{4}$.

Setze damit

$$\begin{aligned} F : x(\Sigma \times (-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})) \times (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2) &\rightarrow N \\ (x(p, h), t_1, t_2) &\mapsto x(p, h + \phi(h)(t_1 f + t_2 g)) \end{aligned}$$

Dabei ist $\delta_1 = \frac{\delta}{4} \|f\|_\infty^{-1}$ und $\delta_2 = \frac{\delta}{4} \|g\|_\infty^{-1}$. Für $h > \frac{\delta}{4}$ ist F für festes t_1, t_2 die Identität, man kann also F durch die Identität auf ganz N zu einer Funktion \tilde{F} fortsetzen.

Für kleines $\max\{|t_1|, |t_2|\}$ ist die Funktion

$$h \mapsto h + \phi(h) (t_1 f + t_2 g)$$

nach dem Satz über die Umkehrfunktion differenzierbar umkehrbar. Daher sind die Funktionen $\tilde{F}(\cdot, t_1, t_2) : N \rightarrow N$ o.B.d.A. Diffeomorphismen (verkleinere eventuell δ , so daß dies für alle $t_i \in (-\delta_i, \delta_i)$ mit $i = 1, 2$ der Fall ist).

Betrachte jetzt die Gleichung

$$V(t_1, t_2) := \text{Vol}(F(\Omega, t_1, t_2)) = \text{const.}$$

Dann ist wegen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_1} \right|_{t_1=t_2=0, p \in \Sigma} &= f \nu \\ \left. \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t_2} \right|_{t_1=t_2=0, p \in \Sigma} &= g \nu \end{aligned}$$

und Satz 2.2 die Ableitung von V durch

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial V}{\partial t_1} \right|_{t_1=t_2=0} &= \int_{\Sigma} f \text{vol}_{\Sigma} = 0 \\ \left. \frac{\partial V}{\partial t_2} \right|_{t_1=t_2=0} &= \int_{\Sigma} g \text{vol}_{\Sigma} \neq 0 \end{aligned}$$

gegeben. Nach dem Satz über implizite Funktionen, angewandt auf V , existiert ein δ_3 und eine Funktion

$$\psi : (-\delta_3, \delta_3) \rightarrow (-\delta_2, \delta_2)$$

mit $\psi(0) = 0$ so daß

$$V(t_1, \psi(t_1)) = \text{const.}$$

Es gilt

$$\psi'(0) = \left(\frac{\partial V}{\partial t_1}(0) \right) \left(\frac{\partial V}{\partial t_2}(0) \right)^{-1} = 0.$$

Nun setze

$$\bar{F} : N \times (-\delta_3, \delta_3) \rightarrow N : (x, t) \mapsto \tilde{F}(x, t, \psi(t)),$$

dann gilt auf Σ

$$\left. \frac{\partial \bar{F}}{\partial t} \right|_{t=0} = (f + \psi'(0)g) \nu = f \nu,$$

\bar{F} ist also die gesuchte Variation. □

Um nun die die zweite Variation des Volumens und die erste und zweite Variation der Oberfläche zu berechnen, sei wieder $\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ eine 1-Parameterfamilie von Diffeomorphismen. Sei

$$F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N : F(p, t) = \bar{F}(p, t)$$

die zugehörige Variation des Randes von Ω . Betrachte auf Σ die Familie von Metriken $g_t := F(\cdot, t)^* \bar{g}$. In lokalen Koordinaten x^i von Σ gilt:

Lemma 2.4 *Sei $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ eine Variation von Σ mit $\frac{\partial F}{\partial t} = X$, $f = \bar{g}(X, \nu)$, so gilt*

(i)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (g_t)_{ij} = g_t \left(\nabla_i X_t, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g_t \left(\nabla_j X_t, \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \text{vol}_{\Sigma_t} = \text{div}_{\Sigma} X \text{vol}_{\Sigma}.$$

(iii)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} H_t = -\Delta_{\Sigma} f - f (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu)) + X^{\text{tang.}}(H).$$

Dabei bezeichnet Δ den Laplace-Operator auf Σ .

Beweis: In den folgenden Rechnungen sei p ein fester Punkt in Σ , x^i Normalkoordinaten um $p \in \Sigma$ für die Metrik $g = g_0$ für Σ und \bar{y}^α Normalkoordinaten um $F(p) \in N$, so daß die ersten Richtungsableitungen von g_{ij} und $\bar{g}_{\alpha\beta}$, und damit auch die Christoffelsymbole von g und \bar{g} , in p verschwinden. Außerdem wird der Parameter t nicht explizit hingeschrieben und Ableitungen nach t werden immer für $t = 0$ ausgewertet.

(i) In p gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}(p) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{g}_{\alpha\beta}(F(p, t)) \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \right) \\ &= \bar{g}_{\alpha\beta}(F(p, t)) \frac{\partial}{\partial x^i} X^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} + \bar{g}_{\alpha\beta}(F(p, t)) \frac{\partial}{\partial x^j} X^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^i} \\ &= \bar{g} \left(\bar{\nabla}_i X, \frac{\partial F}{\partial x^j} \right) + \bar{g} \left(\bar{\nabla}_j X, \frac{\partial F}{\partial x^i} \right) \\ &= g \left(\nabla_i X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) + g \left(\nabla_j X, \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \end{aligned}$$

(ii) Es ist $\text{vol}_\Sigma = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det(g_{ij})} &= \frac{1}{2\sqrt{\det(g_{ij})}} \det(g_{ij}) g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial t} g_{kl} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\det(g_{ij})} g^{kl} \left(\bar{g} \left(\bar{\nabla}_k X, \frac{\partial F}{\partial x^l} \right) + \bar{g} \left(\bar{\nabla}_l X, \frac{\partial F}{\partial x^k} \right) \right) \\ &= \text{div}_\Sigma X \sqrt{\det(g_{ij})} \end{aligned}$$

(iii) Es ist $H = g^{ij} h_{ij}$ und damit

$$\frac{\partial H}{\partial t} = h_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} + g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} h_{ij}. \quad (2.2)$$

wegen

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \delta_i^j = \frac{\partial}{\partial t} (g_{ik} g^{kj}) = g^{kj} \frac{\partial}{\partial t} g_{ik} + g_{ik} \frac{\partial}{\partial t} g^{kj}$$

ist

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} \frac{\partial}{\partial t} g_{kl}$$

also

$$h_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -g^{ik} g^{jl} h_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{kl} = -h^{kl} \frac{\partial}{\partial t} g_{kl}.$$

Teilt man X in Tangential- und Normalanteil, $X = X^{\text{tang.}} + f\nu$, und schreibt

$$X^{\text{tang.}} = X^k \frac{\partial F}{\partial x^k},$$

so erhält man für $\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}$ in Normalkoordinaten den Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = 2f h_{ij} + \frac{\partial X^i}{\partial x^k} g_{kj} + \frac{\partial X^j}{\partial x^k} g_{ki}$$

also ist

$$\begin{aligned} h_{ij} \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} &= -h^{kl} \left(2f h_{kl} + \frac{\partial X^k}{\partial x^i} g_{il} + \frac{\partial X^l}{\partial x^i} g_{ik} \right) \\ &= -2f |A|^2 - 2 \frac{\partial X^k}{\partial x^l} h_{kl} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Der zweite Term in (2.2) ergibt wegen der Weingartengleichung (1.7)

$$\begin{aligned} g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= -g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \bar{g}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \right) \nu^\beta \right\} \\ &= -g^{ij} \left\{ \bar{g}_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha X^\varepsilon \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \nu^\beta \right. \\ &\quad \left. + \bar{g}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \right) \frac{\partial \nu^\beta}{\partial t} \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Da $1 = \bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta$ ist

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\alpha\nu^\beta) = 2\bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\alpha\frac{\partial\nu^\beta}{\partial t}$$

Also verschwindet wegen der Weingartengleichung (1.7) der zweite Term in (2.4). Zerlege X nun wieder Tangential- und Normalanteil $X = X^k\frac{\partial F}{\partial x^k} + f\nu$. Damit rechnet man für den Beitrag des Tangentialanteils zu (2.4) nach, daß

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} \left(X^k \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} - X^k \left(h_{jk}\nu^\alpha - \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^k} + \Gamma_{jk}^l \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i\partial x^j} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} - \frac{\partial X^k}{\partial x^j} (h_{ik}\nu^\alpha) - \frac{\partial X^k}{\partial x^i} (h_{jk}\nu^\alpha) - X^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} h_{jk} \right) \nu^\alpha \\ &\quad - X^k h_{jk} h_{im} g^{ml} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} - X^k \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \right) \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l}. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (2.4) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\beta \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} \left(X^k \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^k} \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{\partial X^k}{\partial x^j} h_{ik} + \frac{\partial X^k}{\partial x^i} h_{jk} + X^k \left(\frac{\partial}{\partial x^i} h_{jk} \right) \right) \\ &\quad + g^{ij} X^k \left(\left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha \right) \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^k} - \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\alpha \right) \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^k} \right). \end{aligned}$$

Nach der Codazzi-Gleichung (1.9) ist

$$\frac{\partial}{\partial x^i} h_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k} h_{ij} + \bar{R}(\nu, \frac{\partial F}{\partial x^j}, \frac{\partial F}{\partial x^k}, \frac{\partial F}{\partial x^i})$$

Der Krümmungsterm hebt dann gerade die Terme mit den Christoffelsymbolen weg. Damit ist der Beitrag des tangentialen Anteils von X zu (2.4) gegeben durch

$$2\frac{\partial X^k}{\partial x^j} h_k^j + X^{\text{tang.}}(H) \tag{2.5}$$

Für den Beitrag des Normalanteils $f\nu$ von X zu (2.4) rechnet man zunächst

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j} (f\nu^\alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x^j} \nu^\alpha + f \left(h_{jk} g^{kl} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} - \bar{\Gamma}_{\beta\delta}^\alpha \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \nu^\delta \right) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j} \nu^\alpha + \frac{\partial f}{\partial x^i} (h_{ik} g^{kl} \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l}) + f \frac{\partial}{\partial x^i} (h_{ik} g^{kl}) \frac{\partial F^\alpha}{\partial x^l} \\ &\quad + f h_{ik} g^{kl} \frac{\partial^2 F^\alpha}{\partial x^i\partial x^l} - f \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\beta\delta}^\alpha \right) \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \nu^\delta. \end{aligned}$$

wobei die Ableitungen von ν jeweils mit der Weingartengleichung (1.8) ersetzt wurden. Damit ist

$$\begin{aligned} & \bar{g}_{\alpha\beta}\nu^\beta \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(f\nu^\alpha) \\ &= \frac{\partial f^2}{\partial x^i \partial x^j} - fh_{jk}g^{kl}h_{il} - f\bar{g}_{\alpha\gamma} \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\beta\delta}^\alpha \right) \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \nu^\delta \nu^\gamma. \end{aligned}$$

In (2.4) eingesetzt, ergibt dies den Beitrag des Normalanteils von X zu (2.4)

$$\begin{aligned} & -\Delta f + f|A|^2 \\ & + fg^{ij} \left(\bar{g}_{\alpha\delta} \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\beta\delta}^\alpha \right) \frac{\partial F^\varepsilon}{\partial x^i} \frac{\partial F^\beta}{\partial x^j} \nu^\delta \nu^\gamma - \bar{g}_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial y^\varepsilon} \bar{\Gamma}_{\gamma\delta}^\beta \right) \frac{\partial F^\gamma}{\partial x^i} \frac{\partial F^\delta}{\partial x^j} \nu^\beta \nu^\varepsilon \right) \\ &= -\Delta f + f|A|^2 + fg^{ij} \bar{R} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}, \nu, \frac{\partial F}{\partial x^j}, \nu \right) \\ &= -\Delta f + f|A|^2 - f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu). \end{aligned}$$

Zusammen ergibt dies mit (2.5)

$$g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} h_{ij} = -\Delta f + f|A|^2 - f\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + X^{\text{tang.}}(H) + 2 \frac{\partial X^i}{\partial x^j} h_i^j$$

Setzt man das mit (2.3) in (2.2) ein, ergibt sich die Behauptung. □

Mit diesem Lemma und Satz 2.2 kann man nun die zweite Variation des Volumens von Ω berechnen.

Satz 2.5 *Ist $\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ eine Variation von Ω mit*

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial t} = X_t$$

dann gilt mit $f_t = \bar{g}(X_t, \nu)$ bzw. $f = f_0$ und $X = X_0$

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} |\Omega_t| = \int_\Sigma \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} + f \operatorname{div}_\Sigma X \right) \operatorname{vol}_\Sigma$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} |\Omega_t| &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Sigma_t} f_t \operatorname{vol}_{\Sigma_t} \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \operatorname{vol}_\Sigma + f \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \operatorname{vol}_{\Sigma_t} \right) \\ &= \int_\Sigma \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} + f \operatorname{div} X \right) \operatorname{vol}_\Sigma \end{aligned}$$

□

Nun zur Variation der Oberfläche. Es gilt

Satz 2.6 *Ist $F : \Sigma \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ eine Variation von Σ mit*

$$\frac{\partial F}{\partial t} = X_t$$

dann gilt mit $f_t = \bar{g}(X_t, \nu)$ bzw. $f = f_0$ und $X = X_0$

(i)

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |\Sigma_t| = \int_{\Sigma} f H \operatorname{vol}_{\Sigma} \quad (2.6)$$

(ii) Für die zweite Variation der Oberfläche gilt

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} |\Sigma_t| &= \int_{\Sigma} (-f \Delta f - f^2 (|A|^2 + \bar{\operatorname{Ric}}(\nu, \nu)) + f X^{\operatorname{tang.}}(H)) \operatorname{vol}_{\Sigma} \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} H + f H \operatorname{div} X \right) \operatorname{vol}_{\Sigma} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Insbesondere hängt die erste Variation der Oberfläche ebenfalls nur vom Normalanteil von X entlang Σ ab.

Beweis:

(i) Es ist wegen Lemma 2.4 (ii) und dem Divergenztheorem (1.11)

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |\Sigma_t| = \int_{\Sigma} \operatorname{div} X \operatorname{vol}_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \bar{g}(X, \nu) H \operatorname{vol}_{\Sigma}$$

(ii) Damit ist mit Lemma 2.4 (ii) und (iii)

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} |\Sigma_t| &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\Sigma_t} f_t H_t \operatorname{vol}_{\Sigma_t} \\ &= \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} H \operatorname{vol}_{\Sigma} + f \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0} \operatorname{vol}_{\Sigma} + f H \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \operatorname{vol}_{\Sigma_t} \right) \\ &= \int_{\Sigma} (-f \Delta f - f^2 (|A|^2 + \bar{\operatorname{Ric}}(\nu, \nu)) + f X^{\operatorname{tang.}}(H)) \operatorname{vol}_{\Sigma} \\ &\quad + \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial f_t}{\partial t} \Big|_{t=0} H + f H \operatorname{div}_{\Sigma} X \right) \operatorname{vol}_{\Sigma} \end{aligned}$$

□

Damit zeigt man folgendes Theorem

Theorem 2.7 *Ist $\Omega \subset N$ eine kompakte Teilmenge von N mit glattem Rand Σ und ist Ω eine Lösung von (2.1), so gilt*

(i) $H = \text{const.}$ auf Σ

(ii) für alle Funktionen $f \in C^\infty(\Sigma)$ mit $\int_\Sigma f \text{vol}_\Sigma = 0$ ist

$$\int_\Sigma (-f\Delta f - f^2 (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu))) \text{vol}_\Sigma \geq 0$$

Beweis: Ist $f \in C^\infty(\Sigma)$, so konstruiere mit Lemma 2.3 eine volumenerhaltende Variation $\bar{F} : N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$ mit Normalgeschwindigkeit $f = \bar{g}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial t}\Big|_{t=0}, \nu\right)$. Dann ist wegen (2.6)

$$0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} |\Sigma_t| = \int_\Sigma f H \text{vol}_\Sigma$$

d.h. H ist eine Funktion die L^2 -orthogonal zu allen Funktionen ist, die ihrerseits L^2 -orthogonal zu den konstanten Funktionen sind. Damit ist H eine konstante Funktion.

Sind zu obiger Variation f_t und X_t wie in Satz 2.5 definiert, so gilt

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} |\Omega_t| = \int_\Sigma \left(\frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{t=0} + f \text{div} X \right) \text{vol}_\Sigma$$

und damit, weil H konstant ist

$$\int_\Sigma \left(H \frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{t=0} + H f \text{div} X \right) \text{vol}_\Sigma = 0$$

so daß mit (2.7)

$$0 \leq \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} |\Sigma_t| = \int_\Sigma (-f\Delta f - f^2 (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu))) \text{vol}_\Sigma$$

□

Dieses Theorem motiviert

Definition 2.8 *Auf einer Fläche Σ mit konstanter mittlerer Krümmung ist der Stabilitätsoperator oder Jacobi-Operator J auf einer Funktion $f \in C^\infty(\Omega)$ gegeben durch*

$$Jf = -\Delta f - f (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu))$$

Weiter definiert man

Definition 2.9 *Ist Σ eine Fläche wie oben und ist J auf der Menge*

$$M := \left\{ f \in C^\infty(M) : \int_{\Sigma} f \, \text{vol}_{\Sigma} = 0 \right\}$$

nichtnegativ, d.h. für alle $f \in M$ gilt

$$\int_{\Sigma} f J f \, \text{vol}_{\Sigma} \geq 0,$$

so heißt Σ stabil. Ist J sogar positiv, d.h. es existiert ein $\mu > 0$, so daß für alle $f \in M$ gilt

$$\int_{\Sigma} f J f \, \text{vol}_{\Sigma} \geq \mu \|f\|_2^2,$$

so heißt Σ strikt stabil.

Im Hinblick auf Theorem 2.7 sind die Bedingungen $H = \text{const.}$ und Stabilität der Randfläche Σ von Ω notwendig dafür, daß Ω Lösung des isoperimetrischen Problems ist. Ist Σ zusätzlich strikt stabil, so ist dies hinreichend dafür, daß Ω ein lokales Minimum des isoperimetrischen Problems ist, d.h. es existiert dann keine volumenerhaltende Variation, die die Oberfläche von Σ verkleinert.

Andererseits sieht man, daß hier, entsprechend 5.3, die mittlere Krümmung H die Rolle des Lagrange-Parameters übernimmt, da sich die erste Variation des Volumens und der Oberfläche gerade um den konstanten Faktor H unterscheiden.

3 Analytische Resultate

3.1 Das isoperimetrische Problem im \mathbf{R}^n

Im \mathbf{R}^n existieren nicht viele stabile Flächen konstanter mittlerer Krümmung, wie der folgende Satz von Barbosa und do Carmo zeigt

Theorem 3.1 (Barbosa-do Carmo [BdC84, Theorem 1.3])

Die einzigen geschlossenen, stabilen Flächen konstanter mittlerer Krümmung im \mathbf{R}^n sind die euklidischen Sphären.

Die euklidischen Sphären im \mathbf{R}^n sind jedoch nicht strikt stabil, da der kleinste Eigenwert des Laplace-Operators auf der Sphäre mit Radius r durch $\frac{n-1}{r^2}$ gegeben ist, und die Norm der Zweiten Fundamentalform ebenfalls gerade $\frac{n-1}{r^2}$ ist, so daß der Stabilitätsoperator

$$J = -\Delta - |A|^2$$

auf den ersten Eigenfunktion des Laplace verschwindet. Die drei zugehörigen Eigenfunktionen entsprechen gerade den Translationen der Sphären, die offensichtlich sowohl Oberfläche als auch Volumen erhalten.

3.2 Die Schwarzschildmetrik

Die Schwarzschildmetrik auf $\mathbf{R}^4 \setminus (\mathbf{R} \times \{(0, 0, 0)^T\})$ ist gegeben durch folgendes Linienelement

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

wobei $d\Omega^2$ das Linienelement der $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ ist.

Diese Metrik beschreibt ein einzelnes stationäres, statisches Schwarzes Loch an der Position $(t, 0, 0, 0)$, $t \in \mathbf{R}$. Eine Herleitung findet sich etwa in [Fli90]. Betrachtet man in dieser Raumzeit den $\{t = 0\}$ -Schnitt $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)^T\}$, so ergibt sich nach einer Koordinatentransformation die konform euklidische Metrik

$$g_S = \psi^4 \delta$$

wobei δ die euklidische Metrik ist, und

$$\psi : \mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)^T\} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto 1 + \frac{m}{2|x|}$$

der konforme Faktor.

Die euklidischen Sphären $S_r(0)$ um 0 mit Radius r haben in diesem Fall die konstante mittlere Krümmung

$$H_S(r) = \psi^{-3}(r) \left(\frac{2}{r} - \frac{m}{r^2} \right) \quad (3.1)$$

wie mit Lemma 1.2 nachzurechnen ist. Für $r = \frac{m}{2}$ ist $H_S(r) = 0$, also ist dies eine Minimalfläche. Mit Lemma 1.2 bekommt man außerdem, daß auf $S_r(0)$ für beliebiges $r > 0$ der Betrag der zweiten Fundamentalform durch

$$|A|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\psi^{-6} \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{2r^2} \right)^2$$

gegeben ist. Die Ricci-Krümmung in Normalenrichtung an die Fläche ist nach Lemma 1.3 konstant

$$\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) = -\frac{2m}{r^3} \psi^{-6}.$$

Zusammen hat man, daß der Stabilitätsoperator J auf $S_r(0)$ gegeben ist durch

$$Jf = -\Delta f - f 2r^{-2} \psi^{-6} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{4r^2} \right).$$

Was die innere Geometrie dieser Fläche betrifft, so ist sie isometrisch zu einer euklidischen Sphäre mit Radius $r\psi^2$ im \mathbf{R}^3 mit der flachen Metrik. Daher sind die kleinsten Eigenwerte des Laplace-Operators auf $S_r(0) \subset (R^3, g_S)$ durch 0 bzw. $\frac{2}{r^2\psi^4}$ gegeben. Man kann dann die kleinsten Eigenwerte des Stabilitätsoperators berechnen, sie sind

$$-2r^{-2} \psi^{-6} \left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{m^2}{4r^2} \right) \quad \text{bzw.} \quad 6mr^{-3} \psi^{-6}$$

Man sieht daß der kleinste Eigenwert für $r = \frac{m}{2}$ positiv ist, also ist die Minimalfläche mit Radius $\frac{m}{2}$ strikt stabil unter allen Variationen.

Interessanter ist jedoch, daß auch der zweite Term positiv ist, dies bedeutet daß die Flächen $S_r(0)$ strikt stabil sind. Sie bilden damit eine Blätterung des Raumes $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}, g_S)$ aus strikt stabilen Flächen konstanter mittlerer Krümmung.

3.3 Asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten

Die Ergebnisse von Huisken und Yau in [HY96] sind für die vorliegende Arbeit von besonderer Bedeutung. Deshalb wird in diesem Kapitel eine Zusammenfassung ihrer Ergebnisse vorgestellt. Die genannte Arbeit verallgemeinert die Ergebnisse, die im vorigen Abschnitt für die Schwarzschildmetrik vorgestellt wurden, auf asymptotisch flache Mannigfaltigkeiten, deren Metrik nahe an der Schwarzschildmetrik ist. Präziser ausgedrückt betrachtet man asymptotisch flache Enden (N, \bar{g})

einer 3-Mannigfaltigkeit, d.h. N ist diffeomorph zu $\mathbf{R}^3 \setminus B_1(0)$, und die Metrik \bar{g} hat in diesen Koordinaten die Gestalt

$$\bar{g} = g_S + P. \quad (3.2)$$

Dabei ist für $m > 0$ $g_S = (1 + \frac{m}{2r})^4 \delta$ die konforme Schwarzschildmetrik und P eine Störung, die schneller abfällt als r^{-2} , d.h.

$$|P_{\alpha\beta}| \leq C_1 r^{-2}$$

sowie

$$|\partial^k P_{\alpha\beta}| \leq C_{1+k} r^{-2-k} \quad \text{für } k = 1, \dots, 4$$

Huisken und Yau beweisen im genannten Artikel die Existenz einer isoperimetrischen Blätterung aus stabilen Flächen des asymptotisch flachen Endes außerhalb eines Balls, dessen Radius groß genug ist (d.h. in einer Region in der \bar{g} nahe genug an der Schwarzschildmetrik ist).

Zum Beweis verwenden die Autoren den *volumenerhaltenden mittleren Krümmungsfluß*. Dazu sei eine sphärische Anfangsfläche

$$F_0 : S^2 \rightarrow N$$

gegeben. Ausgehend von dieser Anfangsfläche ist eine 1-Parameterfamilie $F : S^2 \times (0, T) \rightarrow N$ gesucht, mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(p, t) &= (h - H)\nu(p, t) \\ F(p, 0) &= F_0(p) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei ist $\nu(p, t)$ die äußere Normale an $\Sigma_t = F(S^2, t)$ im Punkt p , H die mittlere Krümmung, und

$$h = \frac{1}{|\Sigma_t|} \int_{\Sigma_t} H \, \text{vol}$$

deren Mittelwert.

Nach Satz 2.6 ist

$$\frac{d}{dt} |\Sigma_t| = \int_{\Sigma_t} H(h - H) \, \text{vol}_{\Sigma_t} = - \int_{\Sigma_t} (h - H)^2 \, \text{vol}_{\Sigma_t}.$$

Damit reduziert dieser Fluß die Oberfläche von Flächen, deren mittlere Krümmung nicht konstant ist, und da

$$\int_{\Sigma_t} (h - H) \, \text{vol}_{\Sigma_t} = 0$$

bleibt das eingeschlossene Volumen konstant. Das eingeschlossene Volumen ist dabei bezüglich einer offenen Teilmenge von N zu nehmen, die kompakten Abschluß hat, und bei der Σ_t eines der disjunkten Randstücke ist. Damit ist dieser Fluß der Fluß zum auf die volumenerhaltenden Richtungen projizierten L^2 -Gradienten des Oberflächenfunktionals.

Dieser Fluß wird von Huisken und Yau mit euklidischen Sphären $\Sigma_0 = S_\sigma^2$ um 0 mit Radius σ gestartet. Für diese Startflächen weisen sie die Langzeitexistenz des Flusses nach und zeigen, daß die Flächen gegen eine Fläche Σ^σ konstanter mittlerer Krümmung konvergieren.

Mit Hilfe von $m > 0$, läßt sich dann zeigen, daß der Stabilitätsoperator für volumenerhaltende Variationen auf diesen Flächen Σ^σ strikt positiv ist. Damit erhalten die Autoren die Eindeutigkeit der Blätterung. Desweiteren impliziert die Positivität des Stabilitätsoperators starke Abschätzungen an die Position und Geometrie der Fläche.

Diese Abschätzungen werden dann benutzt um zu zeigen, daß die Flächen konstanter mittlerer Krümmung für wachsenden Radius immer näher an einer euklidischen Sphäre liegen und die Mittelpunkte dieser Sphären gegen einen festen Punkt konvergieren.

Konkret sind hier folgende Theoreme aus [HY96] wichtig

Theorem 3.2 (*Theorem 3.1 in [HY96]*)

Ist die Metrik \bar{g} auf N von der Form (3.2) und $m > 0$, so existiert ein σ_0 , das nur von C_1, \dots, C_5 und m abhängt, so daß für alle $\sigma \geq \sigma_0$ das Anfangswertproblem 3.3 eine eindeutige glatte Lösung für alle Zeiten $t \geq 0$ besitzt. Für $t \rightarrow \infty$ konvergieren diese Flächen exponentiell gegen eine Hyperfläche Σ^σ mit konstanter mittlerer Krümmung H_σ .

Eine Abschätzung an die Geometrie der Fläche liefert [HY96, Proposition 3.9 und 3.13], nämlich

$$|A^\circ| \leq C\sigma^{-3} \quad \text{und} \quad |\nabla A^\circ| \leq C\sigma^{-4}.$$

Dabei ist A° der spurlose Anteil der zweiten Fundamentalform. Dieser hat die Komponenten $h_{ij}^\circ = h_{ij} - \frac{1}{2}H\delta_{ij}$. Dies zeigt, daß die zweite Fundamentalform auf Σ^σ nahezu diagonal ist und die Abschätzung aus [HY96, Lemma 3.8,(i)] für die Eigenwerte λ_i der Zweiten Fundamentalform

$$\left| \lambda_i - \frac{1}{\sigma} \right| \leq C\sigma^{-2}$$

liefert dann, daß die Zweite Fundamentalform nahezu das $\frac{1}{\sigma}$ -fache der Identität ist. In diesen Abschätzungen können die geometrischen Größen bzgl. der Metrik \bar{g} oder bzgl. der euklidischen Metrik gebildet werden, wie [HY96, Proposition 2.1] zeigt. Damit sieht man, daß die Fläche Σ^σ nahe an einer euklidischen Sphäre ist.

Das Zentrum dieser Sphären für $\sigma \rightarrow \infty$ konvergiert gegen einen festen Vektor in \mathbf{R}^3 , wie in [HY96, Theorem 4.2] gezeigt.

Theorem 3.3 (Theorem 4.1 in [HY96])

Es existiert ein σ_0 , das nur von C_1, \dots, C_5 und $m > 0$ abhängt, so daß die so konstruierten Flächen konstanter mittlerer Krümmung für $\sigma \geq \sigma_0$ eine Blätterung von $N \setminus B_{\sigma_0}(0)$ bilden. Jede der Flächen Σ^σ ist strikt stabil, wobei der kleinste Eigenwert auf volumenerhaltenden Variationen von der Ordnung $6m\sigma^{-3}$ ist.

Im Beweis zu vorigem Satz zeigen Huisken und Yau außerdem eine untere Schranke an den kleinsten Eigenwert μ_0 des Stabilitätsoperators auf allen Variationen, nämlich

$$\mu_0 \geq -\frac{2}{\sigma^2} + \frac{10m}{\sigma^3} - \frac{c}{\sigma^4}, \quad (3.4)$$

die später bei der Wahl eines Parameters von Nutzen sein wird.

Das dritte Theorem, das hier zitiert werden soll, betrifft die Eindeutigkeit der Blätterung:

Theorem 3.4 *Ist $m > 0$ und sei $\frac{1}{2} < q \leq 1$ gegeben. Dann existiert ein $H_0 > 0$, das nur von C_1, \dots, C_5 , m und q abhängt, so daß für alle $0 < H < H_0$ die Fläche der Blätterung aus Theorem 3.3, die mittlere Krümmung H hat, die einzige stabile Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung H , die in $N \setminus B_{H^{-q}}(0)$ enthalten ist.*

Bemerkung: Der von Huisken und Yau benutzte volumenerhaltende mittlere Krümmungsfluß ist aus der Sicht der Variationsrechnung, wie bereits erwähnt, ein Fluß entlang des projizierten Gradienten des Oberflächenfunktionals, also ein Minimierungsverfahren.

Aus numerischer Sicht hat dieses Verfahren jedoch zwei Nachteile, unter denen die langsame Konvergenz von Gradientenverfahren der bedeutendste ist. Der andere Nachteil ist, daß man mit der Projektion des Gradienten nur eine infinitesimal volumenerhaltende Variationsrichtung bekommt. Will man aber in einer solchen Richtung einen nicht beliebig kleinen Schritt machen, so ändert sich das Volumen doch, so daß bei numerischer Berechnung dieses Flusses das Volumen nicht erhalten wird. Daher ist diese Methode nicht geeignet um das isoperimetrische Problem numerisch zu lösen.

Es ist aber trotzdem vielversprechend, dieses Problem als Variationsproblem zu betrachten, da man einerseits wegen der Stabilität der Flächen wirklich Minima in volumenerhaltenden Richtungen hat, und andererseits *alle* Eigenwerte des Stabilitätsoperators kontrolliert sind, nicht nur die in volumenerhaltender Richtung.

Dies ermöglicht es etwa, zur numerischen Lösung eine modifizierte Lagrange-Methode zu verwenden wie sie in Kapitel 5 vorgestellt wird.

Bemerkung: Die starken Abschätzungen an die Position und Geometrie der Fläche liefern gute Anfangsflächen für die numerische Lösung. Auch die Tatsache, daß schon der volumenerhaltende mittlere Krümmungsfluß für euklidische Sphären als Startflächen gut funktioniert zeigt, daß näherungsweise euklidische Sphären als Anfangsflächen für ein geeignetes Minimierungsverfahren gewählt werden können.

3.4 Allgemeine Mannigfaltigkeiten

Die Forderung in (2.1), daß die Gebiete Ω glatten Rand haben, scheint sehr stark zu sein. Es wurde jedoch gezeigt, daß man viel allgemeinere Mengen, sogenannte Caccioppoli-Mengen zulassen kann, und unter diesen Mengen minimieren. Man bekommt dann aus Kompaktheitsargumenten die nun für diese Klasse von Mengen zur Verfügung stehen, die Existenz einer Lösung von (2.1) in der Klasse dieser Mengen. Untersucht man nun die Regularität des Randes der Lösungsmenge, so erhält man für Dimensionen $n \leq 7$ daß der Rand eine glatte Untermannigfaltigkeit von N ist.

Eine Zusammenfassung der Resultate enthält [Sch99].

4 Diskretisierung des isoperimetrischen Problems

Bevor im nächsten Kapitel Verfahren zur numerischen Lösung von Optimierungsproblemen vorgestellt werden, soll in diesem Kapitel die Diskretisierung des isoperimetrischen Problems besprochen werden. Dabei wird das Berandete Gebiet außer Acht gelassen. Es wird nur noch die berandende Fläche betrachtet. Das eingeschlossene Volumen wird bezüglich einer gegebenen Referenzfläche berechnet und dabei als vorzeichenbehaftete Größe betrachtet. Zunächst soll die Diskretisierung einer 2-Fläche im \mathbf{R}^3 durch eine Triangulierung besprochen werden, danach werden diskrete Versionen der Funktionale für Oberfläche und Volumen definiert. Diese Funktionale wurden, mit Blick auf die asymptotisch flache Situation so gewählt, daß sie bei minimalem Aufwand im euklidischen Raum die exakten Größen liefern.

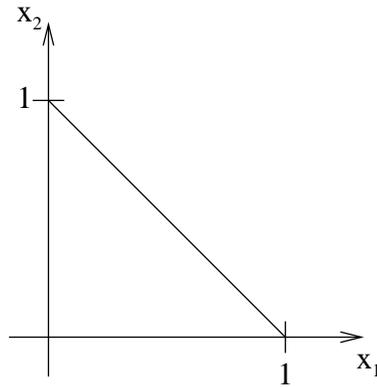
Im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln wird die betrachtete Randfläche nicht mehr glatt sein, da sie aus Dreiecken zusammengesetzt ist. Auch die benutzten Variationsrichtungen sind keine glatten Vektorfelder auf \mathbf{R}^3 , sondern ebenfalls nur fast überall differenzierbar. Die Funktionale für Oberfläche und Volumen lassen sich aber trotzdem definieren. Bei der Berechnung der Differentiale dieser Funktionale wird nicht versucht, die Formeln aus Kapitel 2 anzuwenden, in denen die Größe H auftritt, die aus zweiten Ableitungen entlang der Fläche gebildet wird und daher nicht verfügbar ist. Stattdessen werden die diskret definierten Funktionale nach ihren Freiheitsgraden abgeleitet und man erhält so implizit eine diskrete Version von H .

4.1 Triangulierungen und lineare Finite Elemente

Definition 4.1 *Eine reguläre Triangulierung $\mathcal{T} \subset \mathbf{R}^3$ ist eine Menge von Eckpunkten, Kanten und Dreiecken, so daß*

- (i) *jeder Eckpunkt Eckpunkt eines Dreiecks ist,*
- (ii) *jede Kante Kante eines Dreiecks ist, und*
- (iii) *falls die Schnittmenge zweier verschiedener Dreiecke nicht leer ist, so besteht sie aus einem gemeinsamen Eckpunkt oder einer gemeinsamen Kante der Dreiecke.*

Eine solche reguläre Triangulierung ist festgelegt, wenn man die Koordinaten ihrer Eckpunkte kennt, und weiß, welche Punkte ein Dreieck bilden. Ist p ein Eckpunkt der Triangulierung, so schreibt man $p \in \mathcal{T}$ und ist T ein Dreieck der Triangulierung, so schreibt man ebenfalls $T \in \mathcal{T}$. Für die folgenden Rechnungen

Abbildung 1: Das Standarddreieck im \mathbf{R}^2

sei nun immer \mathcal{T} eine solche reguläre Triangulierung. Für jedes Dreieck $T \in \mathcal{T}$ mit den Eckpunkten p_0, p_1, p_2 existiert nun ein linearer Diffeomorphismus vom Standarddreieck

$$T_S = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$$

auf T . Dieser Diffeomorphismus ist gegeben durch

$$F : T_S \rightarrow T : (x_1, x_2) \mapsto (1 - x_1 - x_2)p_0 + x_1p_1 + x_2p_2$$

Dadurch ist es möglich, lineare Funktionen entlang der Dreiecke zu definieren.

Definition 4.2 Sei T ein Dreieck und sei $F : T_S \rightarrow T$ ein linearer Diffeomorphismus. Dann heißt eine Funktion $\phi : T \rightarrow \mathbf{R}$ linear falls die Funktion $\phi \circ F : T_S \rightarrow \mathbf{R}$ linear ist.

Die linearen Funktionen auf einem Dreieck sind festgelegt durch ihre Werte an den Eckpunkten des Dreiecks.

Nun betrachtet man diejenigen Funktionen ϕ_p , die in einem Eckpunkt der Triangulierung den Wert 1 annehmen, und in allen anderen Eckpunkten verschwinden, wobei auf jedem Dreieck der Funktionswert aus den Funktionswerten in den Eckpunkten linear interpoliert wird. Der Aufspann dieser Funktionen wird der Ansatzfunktionenraum \mathcal{S} der *konformen finiten Elemente* genannt

$$\mathcal{S} := \left\{ \sum_{p \in \mathcal{T}} u_p \phi_p : u_p \in \mathbf{R} \right\}$$

Diese Funktionen sind stetig und fast überall differenzierbar.

4.2 Das diskrete Optimierungsproblem

Nun sei eine feste Referenztriangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ gegeben und für jeden Eckpunkt \tilde{p} in $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Deformationsrichtung $r_{\tilde{p}}$. Für eine Funktion $u \in \mathcal{S}$ bezeichne $\mathcal{T}(u)$ die Triangulierung, die durch Anwenden der Offsets u_p in jedem Punkt \tilde{p} entstehen, also die Triangulierung mit den Eckpunkten $p := \tilde{p} + u_{\tilde{p}}r_{\tilde{p}}$.

Es ist klar, daß dies nur unter bestimmten Bedingungen an $\tilde{\mathcal{T}}$, u und $r_{\tilde{p}}$ wieder eine reguläre Triangulierung ergibt. Im Falle einer bezüglich dem Punkt p_S sternförmigen Triangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$ ist dies aber der Fall, falls für \tilde{p} die Deformationsrichtung durch $r_{\tilde{p}} = \frac{\tilde{p} - p_S}{|\tilde{p} - p_S|}$ gegeben ist und $u_{\tilde{p}} < |\tilde{p} - p_S|$.

Es bezeichne $\hat{A}(\mathcal{T}(u))$ die diskrete Oberfläche von $\mathcal{T}(u)$ und $\hat{V}(\mathcal{T}(u))$ das zwischen $\tilde{\mathcal{T}}$ und $\mathcal{T}(u)$ eingeschlossene orientierte Volumen. Diese Funktionale werden in den nächsten Abschnitten definiert.

Das diskrete Problem lautet nun:

$$\begin{aligned} \text{minimiere } & \hat{A}(\mathcal{T}(u)) \quad \text{für } u \in \mathcal{S} \\ \text{so daß } & \hat{V}(\mathcal{T}(u)) = V_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Bemerkung: Die Deformation der Fläche durch Erhöhen bzw. Verringern eines Wertes u_p für einen festen Punkt, entspricht gerade einer Variation der Fläche. Dabei ist das Variationsvektorfeld auf $\mathcal{T}(u)$ durch $\phi_p r_p$ gegeben, wobei r_p der feste Deformationsvektor in p ist, und ϕ_p die Ansatzfunktion, die im Punkt p den Wert 1 annimmt und in allen anderen Eckpunkten der Triangulierung verschwindet.

Ist also eine Funktion $u = \sum u_p \phi_p \in \mathcal{S}$ gegeben, so entspricht die Deformation der Triangulierung mit den Offsets tu für $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ einer Variation entlang des Vektorfeldes $\sum u_p \phi_p r_p$. Die Qualität der Lösung von (4.1) hängt also davon ab, wie groß der Normalanteil der so zustandekommenden Vektorfelder ist.

4.3 Das diskrete Flächenfunktional

Der Flächeninhalt der Gesamttriangulierung ist die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Dreiecke. Dieser Flächeninhalt muß mittels Quadratur berechnet werden, da die Metrik auf einem Dreieck nicht notwendig konstant ist.

Wird das diskrete Flächenfunktional \hat{A} bezeichnet, dann ist

$$\hat{A}(\mathcal{T}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \hat{A}(T).$$

Den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet man am besten durch Transformation in eine Standardsituation. Dazu betrachtet man die Abbildung $F_T : T_S \rightarrow T$, die

das Standarddreieck T_S auf T abbildet. Sind p_0, p_1, p_2 die Eckpunkte von T , so ist F_T gegeben durch:

$$F_T(x_1, x_2) = (1 - x_1 - x_2)p_0 + x_1p_1 + x_2p_2$$

Damit erhält man die Basis $\frac{\partial F_T}{\partial x_1} = p_1 - p_0$, $\frac{\partial F_T}{\partial x_2} = p_2 - p_0$ des Tangentialraums an das Dreieck T . Die von \bar{g} auf T_S induzierte Metrik g hat in diesen Koordinaten die Komponenten:

$$g_{ij}(x_1, x_2) = \bar{g}_{F_T(x_1, x_2)} \left(\frac{\partial F_T}{\partial x_i}, \frac{\partial F_T}{\partial x_j} \right) = \bar{g}_{\alpha\beta}(F_T(x_1, x_2)) (p_1 - p_0)^\alpha (p_2 - p_0)^\beta.$$

Damit ist der exakte Flächeninhalt $A(T)$

$$A(T) = \int_{T_S} \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx.$$

Ist $\bar{g} = \delta$ die Euklidische Metrik, so ist $\sqrt{\det(g_{ij})}$ konstant auf T_S und man kann den exakten Flächeninhalt mit der Quadraturformel

$$A(T) = \int_{T_S} \sqrt{\det(g_{ij})} \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\det \left(g_{ij} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)}$$

berechnen. Diese Formel ist exakt für alle linearen Polynome auf T_S .

Im Allgemeinen Fall benutzt man auch diese Integrationsformel und setzt den diskreten Flächeninhalt

$$\hat{A}(T) := \frac{1}{2} \sqrt{\det \left(g_{ij} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right)}.$$

Man sieht an den obigen Formeln, daß \hat{A} so oft differenzierbar ist, wie \bar{g} .

4.4 Die Ableitung des diskreten Flächenfunktionals

Um später ein Optimierungsverfahren auf \hat{A} anzuwenden, braucht man die Ableitung des diskreten Flächenfunktionals. Auch hier kann man sich darauf beschränken, diese Ableitung für einzelne Dreiecke zu berechnen.

Sei also $T \in \mathcal{T}$ ein Dreieck mit den Eckpunkten p_0, p_1, p_2 . Dann darf p_i in die feste Richtung r_i bewegt werden. Nun ist die Ableitung von $\hat{A}(T_{(u_0, u_1, u_2)})$ nach den Variablen u_0, u_1, u_2 gesucht, wobei $T_{(u_0, u_1, u_2)}$ das Dreieck mit den Eckpunkten $p_k + u_k r_k$, $k = 1, 2, 3$ ist.

Betrachte zunächst die Ableitung in u_1 -Richtung, mit $u_0, u_2 = 0$. In diesem Fall definiert man eine Familie von Abbildungen

$$F_\varepsilon : T_S \rightarrow T_{(0,\varepsilon,0)} : (x_1, x_2) \mapsto (1 - x_1 - x_2)p_0 + x_1(p_1 + \varepsilon r_1) + x_2 p_2.$$

Dann ist $\hat{A}(T_{(0,\varepsilon,0)}) = \frac{1}{2} \sqrt{\det(g_{ij}(\varepsilon))}$ mit

$$g_{ij}(\varepsilon) = \bar{g}_{F_\varepsilon(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}(X_i, X_j)$$

wobei $X_1 = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_1} = p_1 + \varepsilon r_1 - p_0$ und $X_2 = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x_2} = p_2 - p_0$. Damit ist $\frac{\partial X_1}{\partial \varepsilon} = r_1$ und $\frac{\partial X_2}{\partial \varepsilon} = 0$.

Es ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial g_{11}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= 2\bar{g}_{F_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}(X_1, r_1) + \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\bar{g}_{\alpha\beta} \left(F_\varepsilon \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \right) X_1^\alpha X_1^\beta \\ \left. \frac{\partial g_{12}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \bar{g}_{F_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})}(X_2, r_1) + \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\bar{g}_{\alpha\beta} \left(F_\varepsilon \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \right) X_1^\alpha X_2^\beta \\ \left. \frac{\partial g_{22}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\bar{g}_{\alpha\beta} \left(F_\varepsilon \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \right) X_2^\alpha X_2^\beta. \end{aligned}$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \left(\bar{g}_{\alpha\beta} \left(F_\varepsilon \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) \right) = \frac{1}{3} (D_{r_1} g_{\alpha\beta}) \left(F_0 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right).$$

Das ist gerade ein Drittel der Richtungsableitung der $g_{\alpha\beta}$ in die Richtung r_1 . Außerdem ist

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \det(g_{ij}(\varepsilon)) &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} (g_{11}(\varepsilon)g_{22}(\varepsilon) - g_{12}(\varepsilon)^2) \\ &= g_{11}(0) \left. \frac{\partial g_{22}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + g_{22}(0) \left. \frac{\partial g_{11}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} - 2g_{12}(0) \left. \frac{\partial g_{12}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{A}(T_{(0,\varepsilon,0)}) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \frac{1}{2} \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \\ &= \frac{1}{4\hat{A}(T)} (g_{22} \bar{g}(X_1, r_1) - g_{12} \bar{g}(X_2, r_1)) \\ &+ \frac{1}{24\hat{A}(T)} (g_{11} \Lambda_{22,1} + g_{22} \Lambda_{11,1} + 2g_{12} \Lambda_{12,1}), \end{aligned}$$

wobei

$$\Lambda_{ij,k} = (D_{r_k} \bar{g}_{\alpha\beta}) \left(F_0 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \right) X_i^\alpha X_j^\beta$$

die Ableitung der Metrikkoeffizienten $\bar{g}_{\alpha\beta}$ in Richtung r_k ist. Eine ähnliche Rechnung für die Variation in p_0 und p_2 ergibt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{A}(T_{(\varepsilon,0,0)}) \\ &= \frac{1}{4\hat{A}(T)} (-g_{22} \bar{g}(X_1, r_0) - g_{11} \bar{g}(X_2, r_0) + g_{12} \bar{g}(X_2, r_0) + g_{12} \bar{g}(X_1, r_0)) \\ &+ \frac{1}{24\hat{A}(T)} (g_{11}\Lambda_{22,0} + g_{22}\Lambda_{11,0} - 2g_{12}\Lambda_{12,0}) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \hat{A}(T_{(0,0,\varepsilon)}) \\ &= \frac{1}{4\hat{A}(T)} (g_{11} \bar{g}(X_2, r_2) - g_{12} \bar{g}(X_1, r_2)) \\ &+ \frac{1}{24\hat{A}(T)} (g_{11}\Lambda_{22,2} + g_{22}\Lambda_{11,2} - 2g_{12}\Lambda_{12,2}). \end{aligned}$$

Hier werden die g_{ij} auf dem Ausgangsdreieck im Punkt $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ berechnet und \bar{g} und $\bar{g}_{\alpha\beta}$ immer am Punkt $F_0(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Um die Ableitung von $\hat{A}(T)$ für die Variation eines Punktes $p \in \mathcal{T}$ zu bekommen, berechnet man im Punkt p alle Ableitungen der dort zusammenstoßenden Dreiecke und summiert diese auf.

4.5 Das diskrete Volumenfunktional

Das diskrete Volumenfunktional entsteht wiederum aus Quadratur einzelner Teile der Triangulierung. Um das Volumen zu berechnen braucht man nun eine Referenztriangulierung $\tilde{\mathcal{T}}$. Man betrachtet ein Dreieck $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, das die Eckpunkte \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 und \tilde{p}_3 hat. Mit den zugehörigen Offsets u_1, u_2, u_3 ergibt sich durch Deformation das Dreieck T mit den Eckpunkten $p_k = \tilde{p}_k + u_k r_k$. Diese beiden Dreiecke schließen ein Volumen ein, wie in Abbildung 2 rechts zu sehen ist. Ist etwa $r_k = \frac{p_k - c}{|p_k - c|}$ die Radialrichtung zu einem Punkt $c \in \mathbf{R}^3$, so entsteht hierdurch ein Pyramidenstumpf. Das ist der Beitrag des Dreiecks T zum Gesamtvolumen. Diese Sichtweise führt dazu, daß man das Volumenfunktional lokal um die Referenztriangulierung berechnen kann, von der angenommen wird, daß sie "nahe" an der Triangulierung \mathcal{T} liegt, d.h. die Offsets u_k werden als klein angenommen. Man braucht keine aufwendige dreidimensionale Integration über große Volumina

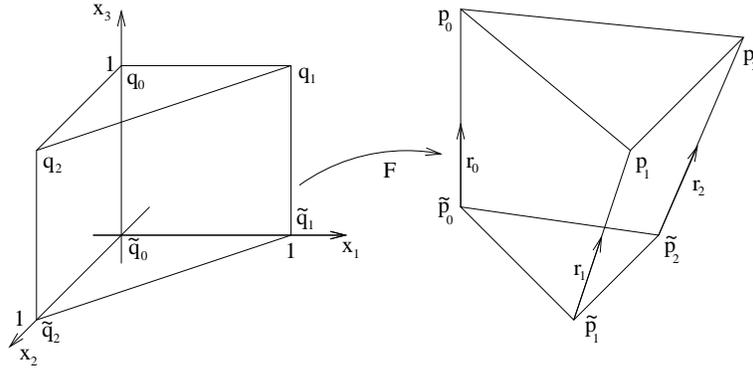


Abbildung 2: Rechts das Standardprisma P_S und links die verallgemeinerte Situation $P_{(u_0, u_1, u_2)}$

auszuführen, sondern kann die Volumenberechnung mit mit wenig mehr Aufwand als die Oberflächenberechnung durchführen. Dies erfordert, das Volumen als vorzeichenbehaftete Größe zu sehen, da nicht davon ausgegangen werden kann, daß sich die Referenztriangulierung und die deformierte Triangulierung nicht durchdringen.

Um das Volumen des entstehenden Gebildes $P_{(u_0, u_1, u_2)}$ zu berechnen, betrachtet man wieder eine Standardsituation, nämlich das Standardprisma $P_S := T_S \times [0, 1]$. Auch hier definiert man eine Abbildung $F_{(u_0, u_1, u_2)} : P_S \rightarrow P_{(u_0, u_1, u_2)}$ mit $F_{(u_0, u_1, u_2)}(q_k) = p_k$ und $F_{(u_0, u_1, u_2)}(\tilde{q}_k) = \tilde{p}_k$. $F_{(u_0, u_1, u_2)}$ hat die Form

$$\begin{aligned} F_{(u_0, u_1, u_2)}(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 - x_1 x_3) \tilde{p}_0 + (x_2 - x_2 x_3) \tilde{p}_1 + (1 - x_1 - x_2 - (1 - x_1 - x_2) x_3) \tilde{p}_3 \\ &= x_1 x_3 p_0 + x_2 x_3 p_1 + (1 - x_1 - x_2) x_3 p_2. \end{aligned}$$

Um das Volumen von $P_{(u_0, u_1, u_2)}$ zu berechnen, benutzt man den Transformationsatz für die Abbildung $F_{(u_0, u_1, u_2)}$ in folgender Form

$$\begin{aligned} \int_{P_{(u_0, u_1, u_2)}} 1 \text{ vol} &= \int_{P_{(u_0, u_1, u_2)}} \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} dx \\ &= \int_{F_{(u_0, u_1, u_2)}(P_S)} \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} dx \\ &= \int_{P_S} \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta} \circ F_{(u_0, u_1, u_2)})} |\det(DF_{(u_0, u_1, u_2)})| dx. \end{aligned}$$

Um nicht das Gesamtvolumen zu bekommen, sondern das orientierte Volumen schreiben wir im letzten Integral später nicht $|\det(DF_{(u_0, u_1, u_2)})|$ sondern nur $\pm \det(DF_{(u_0, u_1, u_2)})$, wobei das Vorzeichen noch zu wählen ist.

Der Faktor $\sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta} \circ F_{(u_0, u_1, u_2)})}$ läßt sich aus der umgebenden Metrik sofort

berechnen und macht keine weiteren Schwierigkeiten. Weiter ist

$$\begin{aligned} DF_{(u_0, u_1, u_2)}(x_1, x_2, x_3) &= (\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0 + x_3(u_1 r_1 - u_0 r_0), \\ &\quad \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0 + x_3(u_2 r_2 - u_0 r_0), \\ &\quad x_1 u_0 r_0 + x_1 u_1 r_1 + (1 - x_1 - x_2) u_2 r_2). \end{aligned}$$

Nach einer längeren Rechnung, die im Wesentlichen die Multilinearität der Determinante benutzt, erhält man für $\det(DF_{(u_0, u_1, u_2)}(x_1, x_2, x_3))$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} DF_{(u_0, u_1, u_2)}(x_1, x_2, x_3) & \tag{4.2} \\ &= \tilde{K}_0 u_0 x_1 + \tilde{K}_1 u_1 x_2 + \tilde{K}_2 u_2 (1 - x_1 - x_2) \\ &+ u_0 u_1 x_3 (-\tilde{K}_3 x_1 - \tilde{K}_4 (1 - x_2)) \\ &+ u_0 u_2 x_3 (-\tilde{K}_5 (1 - x_1) + \tilde{K}_6 x_2) \\ &+ u_1 u_2 x_3 (-\tilde{K}_7 x_1 - \tilde{K}_8 x_2) \\ &+ x_3^2 u_0 u_1 u_2 \tilde{K}_9 \end{aligned}$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0 &= \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_0) \\ \tilde{K}_1 &= \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_1) \\ \tilde{K}_2 &= \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_2) \\ \tilde{K}_3 &= \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, r_0, r_1) \\ \tilde{K}_4 &= \det(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_0, r_1) \\ \tilde{K}_5 &= \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, r_0, r_2) \\ \tilde{K}_6 &= \det(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_0, r_2) \\ \tilde{K}_7 &= \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, r_1, r_2) \\ \tilde{K}_8 &= \det(\tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_1, r_2) \\ \tilde{K}_9 &= \det(r_0, r_1, r_2) \end{aligned}$$

Die \tilde{K}_i hängen nur von den Referenzpunkten \tilde{p}_k ab, nicht aber von u_k oder gar von \bar{g} , brauchen also für eine gegebene Referenztriangulierung nur einmal berechnet zu werden.

Nun zur Wahl des Vorzeichens $\sigma = \pm 1$ von $\det(DF_{(u_0, u_1, u_2)})$. Das Volumen sollte wachsen, falls ausgehend von $u_k = 0$ eines der u_k erhöht wird. Dazu muß aber $\sigma \tilde{K}_k \geq 0$ sein für $k = 0, 1, 2$. Sind die Tripel $(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_k)$ für $k = 0, 1, 2$ gleich orientiert, dann haben die Konstanten $\tilde{K}_0, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2$ auch dasselbe Vorzeichen, so daß σ konsistent gewählt werden kann. Dies ist insbesondere der Fall, falls r_k eine Radialrichtung ist.

Ist im euklidischen Fall $\sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} = 1$, so wird das Volumenintegral zu

$$\int_P \det(DF_{(u_0, u_1, u_2)}) \, dx.$$

Dieses Integral läßt sich schreiben als

$$\int_0^1 \int_{T_0} \det(DF_{(u_0, u_1, u_2)})(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Für festes x_3 ist der Ausdruck (4.2) ein lineares Polynom in x_1 und x_2 . Dieser läßt sich durch die Schwerpunktregel, die schon für den Flächeninhalt verwendet wurde, exakt integrieren. Man erhält, nachdem das innere Integral so approximiert wurde, ein Integral über das Intervall $[0, 1]$, in dem Polynome mit Grad höchstens zwei integriert werden. Für dieses Integral kann man etwa die Gaußsche Integrationsformel mit zwei Stützpunkten verwenden, die sogar Polynome von Grad höchstens drei exakt integriert. Diese Formel hat die Stützstellen $z_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{12}}$ mit Gewichten $a_{1/2} = \frac{1}{2}$. Sollen größere Volumina berechnet werden, empfiehlt es sich, genauere Integrationsformeln zu verwenden. Die folgenden Rechnungen werden mit einer allgemeinen Integrationsformel mit N Stützstellen für das Intervall $[0, 1]$ durchgeführt, dabei sind die Gewichte mit a_i und Stützstellen mit z_i bezeichnet $i = 1, \dots, N$.

Insgesamt erhält man also

$$\int_P \det(DF_{(u_0, u_1, u_2)}) dx = \frac{1}{2} \sigma \sum_{i=1}^N a_i \det\left(DF_{(u_0, u_1, u_2)}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_i\right)\right).$$

Da nun die Integrationsformel gewählt ist, sieht man, daß $\det(DF_{(u_0, u_1, u_2)})$ nur für $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$ ausgewertet wird. Die Formel (4.2) vereinfacht sich somit zu

$$\begin{aligned} & DF_{(u_0, u_1, u_2)}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x_3\right) \\ &= \frac{1}{3}(K_0 u_0 + K_1 u_1 + K_2 u_2) \\ &+ \frac{1}{3} x_3 (K_3 u_0 u_1 + K_4 u_0 u_2 + K_5 u_1 u_2) \\ &+ x_3^2 u_0 u_1 u_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} K_0 &= \tilde{K}_0 = \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_0) \\ K_1 &= \tilde{K}_1 = \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_1) \\ K_2 &= \tilde{K}_2 = \det(\tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, \tilde{p}_2 - \tilde{p}_0, r_2) \\ K_3 &= -\tilde{K}_3 + 2\tilde{K}_4 = \det(2\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_0, r_0, r_1) \\ K_4 &= -2\tilde{K}_5 + \tilde{K}_6 = \det(\tilde{p}_0 + \tilde{p}_2 - 2\tilde{p}_1, r_0, r_2) \\ K_5 &= -\tilde{K}_7 - \tilde{K}_8 = \det(2\tilde{p}_0 - \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2, r_1, r_2) \\ K_6 &= \tilde{K}_9 = \det(r_0, r_1, r_2). \end{aligned}$$

Nun definieren wir das diskrete Volumenfunktional $\hat{V}(P)$ für einen Pyramidenstumpf als

$$\hat{V}(P) = \frac{1}{2}\sigma \sum_{i=1}^2 a_i \left(\det \left(DF_{(u_0, u_1, u_2)} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_i \right) \right) \cdot \sqrt{\det \left(\bar{g}_{\alpha\beta} \left(F_{(u_0, u_1, u_2)} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_i \right) \right) \right)} \right).$$

Ist $\tilde{\mathcal{T}}$ eine Referenztriangulierung und in jedem Punkt $p \in \tilde{\mathcal{T}}$ ein Offset u_p und eine Richtung r_p gegeben, dann bildet man die Triangulierung \mathcal{T} aus $\tilde{\mathcal{T}}$ indem der oben geschilderte Prozeß für jedes Dreieck aus $\tilde{\mathcal{T}}$ angewandt wird.

Das diskrete Volumen $\hat{V}_{\tilde{\mathcal{T}}}(\mathcal{T})$ zwischen $\tilde{\mathcal{T}}$ und \mathcal{T} ist definiert als Summe über alle diskreten Volumina aller entstehenden Kegelstümpfe.

Dieses Funktional ist ebenfalls so oft differenzierbar wie \bar{g} .

4.6 Die Ableitung des diskreten Volumenfunktionals

Auch von diesem Funktional wird später die Ableitung benötigt. Diese ist relativ einfach mit der obigen Formel zu berechnen. Dazu betrachtet man dieselbe Situation und setzt die Ableitung wieder aus den Ableitungen für die einzelnen Dreiecke zusammen.

Um die Rechnungen übersichtlicher zu halten, setze

$$d_i := \det \left(DF_{(u_0, u_1, u_2)} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_i \right) \right)$$

und

$$g_i := \sqrt{\det \left(\bar{g}_{\alpha\beta} \left(F_{(u_0, u_1, u_2)} \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_i \right) \right) \right)} \quad i = 1, \dots, N,$$

so daß

$$\hat{V}(P_{(u_0, u_1, u_2)}) = \frac{1}{2}\sigma \sum_{i=1}^N a_i d_i g_i$$

Damit ist

$$\frac{\partial \hat{V}(P_{(u_0, u_1, u_2)})}{\partial u_k} = \frac{1}{2}\sigma \sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\partial d_i}{\partial u_k} g_i + d_i \frac{\partial g_i}{\partial u_k} \right),$$

und es bleiben die Größen $\frac{\partial d_i}{\partial u_k}$ und $\frac{\partial g_i}{\partial u_k}$ zu berechnen, für $i = 1, \dots, N$ und

$k = 0, 1, 2$. Nach 4.3 ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial d_i}{\partial u_0} &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}z_i(K_3u_1 + K_4u_2) + z_i^2K_6u_1u_2 \\ \frac{\partial d_i}{\partial u_1} &= \frac{1}{3}K_1 + \frac{1}{3}z_i(K_3u_0 + K_5u_2) + z_i^2K_6u_0u_2 \\ \frac{\partial d_i}{\partial u_2} &= \frac{1}{3}K_2 + \frac{1}{3}z_i(K_4u_0 + K_5u_1) + z_i^2K_6u_0u_1\end{aligned}$$

mit den Konstanten K_k aus dem vorigen Abschnitt. Außerdem rechnet man mit der Kettenregel aus, daß

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_k} = \frac{1}{3}z_i \left(D_{r_k} \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} \right) (F_{(u_0, u_1, u_2)}(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, z_i)),$$

womit die komplette Ableitung von $\hat{V}(P_{(u_0, u_1, u_2)})$ bekannt ist. Um $\hat{V}(\mathcal{T})$ zu berechnen, summiert man in jedem Punkt die Beiträge der umliegenden Dreiecke, wie schon im Fall des diskreten Flächenfunktionals.

Bemerkung: Diese Funktionale und deren Ableitungen lassen sich auf einem beliebigen Dreieck mit konstantem Aufwand berechnen. Der Aufwand zur Berechnung der Funktionale und ihrer Ableitungen ist also proportional zur Anzahl der Dreiecke der Triangulierung, für die sie berechnet werden sollen.

5 Numerische Verfahren

Nachdem nun die diskreten Funktionale für Flächeninhalt und Volumen definiert worden sind, geht es in diesem Kapitel darum, Verfahren zur Optimierung mit Nebenbedingungen vorzustellen. Die hier benutzte modifizierte Lagrange-Methode benötigt ein globales Optimierungsverfahren. Als solches wurde die Methode der konjugierten Gradienten gewählt. Diese wiederum benötigt ein Verfahren zur Bestimmung eines Minimums einer Funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Deshalb wird zunächst die hier verwendete Methode des goldenen Schnitts vorgestellt.

Im folgenden Abschnitt bezeichne $|\cdot|$ die euklidische Norm von Vektoren im \mathbf{R}^N und, angewandt auf Matrizen, die zugehörige Operatornorm.

5.1 Die Methode des Goldenen Schnitts

Gegeben sei eine konvexe Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Gesucht ist ein numerisches Verfahren zur Bestimmung des Minimums x^* von f auf $[0, 1]$. Das folgende Verfahren beruht darauf, ein Intervall $[a, b] \subset [0, 1]$ zu finden in dem x^* liegt. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß $x^* \in [a, b]$ liegt ist, daß für ein $x \in (a, b)$ gilt $f(x) \leq \min\{f(a), f(b)\}$. Das Verfahren des goldenen Schnitts konstruiert nun eine Folge solcher Intervalle, die pro Schritt um einen festen Faktor kürzer werden. Dabei werden die Stellen, an denen f ausgewertet wird, so geschickt gewählt, daß pro Schritt nur eine Funktionsauswertung notwendig ist. Konkret geht man folgendermaßen vor.

Sei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der goldene Schnitt. Betrachte f an den vier Stellen $0 < 1 - \tau < \tau < 1$. Nun sind folgende Fälle möglich:

$$(i) \quad f(0) = \min\{f(0), f(1 - \tau), f(\tau), f(1)\},$$

$$(ii) \quad f(1 - \tau) = \min\{f(0), f(1 - \tau), f(\tau), f(1)\},$$

$$(iii) \quad f(\tau) = \min\{f(0), f(1 - \tau), f(\tau), f(1)\},$$

$$(iv) \quad f(1) = \min\{f(0), f(1 - \tau), f(\tau), f(1)\}.$$

In denn beiden ersten Fällen wird die Suche im Intervall $[0, \tau]$ fortgesetzt. Hier werden die vier Stützstellen $0, \tau(1 - \tau), \tau^2 = 1 - \tau$ und τ betrachtet. An drei dieser Stellen wurde f schon berechnet.

In den beiden anderen Fällen wird die Suche im Intervall $[1 - \tau, 1]$ fortgesetzt. Hier werden die vier Stützstellen $1 - \tau, \tau^2 = (1 - \tau), (1 - \tau)\tau$ und 1 betrachtet. Wiederum wurde an drei dieser Stellen f schon berechnet.

In jedem weiteren Schritt wird auf die gleiche Art und Weise die Intervalllänge um den Faktor $\tau \approx 0.61803398875$ reduziert. Dabei sind durch die Wahl von τ

Verkürzungsfaktor	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
Schritte	15	20	24	29	34	39	44	48

Tabelle 1: Anzahl der nötigen Schritte um durch die Methode des Goldenen Schnitts einen gegebenen Verkürzungsfaktor zu erreichen.

immer drei Funktionswerte schon bekannt, d.h. pro Schritt muß nur ein Wert von f neu berechnet werden.

In Tabelle 1 ist aufgeführt wieviele Schritte zum Erreichen eines bestimmten Verkürzungsfaktors des Ausgangsintervalls nötig sind.

5.2 Das nichtlineare CG-Verfahren zur globalen Optimierung

Dieses Verfahren wurde von Fletcher und Reeves in [FR64] vorgestellt. Es dient zur Lösung globaler, nichtlinearer Optimierungsprobleme.

Angewandt auf das quadratische Optimierungsproblem

$$\text{minimiere } x^T Q x + b^T x \quad x \in \mathbf{R}^N$$

für eine symmetrische, positiv definite $N \times N$ - Matrix Q und $b \in \mathbf{R}^N$ ist dieses Verfahren ist bei exakter Liniensuche äquivalent zur Methode der konjugierten Gradienten zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Qx = b.$$

Betrachtet man das allgemeine Problem

$$\text{minimiere } f(x) \quad x \in \mathbf{R}^N, \tag{5.1}$$

so lautet der Algorithmus folgendermaßen:

- Setze $g_0 = \text{grad } f(x_0)$ und $d_0 = -g_0$
- Iteriere für $k = 0, 1, \dots$
 - Falls $g_k = 0$ dann STOP, x_k ist stationäre Lösung von (5.1).
 - Sei $\alpha_k > 0$ so gewählt, daß $t \mapsto f(x_k + tp_k)$ an der Stelle $t = \alpha_k$ das erste lokale Minimum besitzt (Liniensuche).

– Setze

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k \quad g_{k+1} = \text{grad } f(x_{k+1})$$

und

$$\beta_k := \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k} \quad d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

Dieser Algorithmus ist insbesondere deshalb interessant, weil nur die Zielfunktion f selbst, sowie der Gradient $\text{grad } f$ der Zielfunktion zur Berechnung benötigt werden. Desweiteren benötigt man nur Speicherplatz für die Vektoren x_k, g_k, d_k und die Skalare α_k, β_k und $\|g_k\|_2^2$, wobei diese nur im k -ten Schritt benötigt werden, und danach direkt mit den Größen x_{k+1}, g_{k+1}, \dots für den nächsten Schritt überschrieben werden können.

Insgesamt ergibt sich daher eine einfache Implementierbarkeit bei linearem Speicherplatzbedarf.

Eine Verbesserung des Verfahrens wurde von Polak und Ribière in [PR69] vorgeschlagen. Dabei setzt man

$$\beta_k = \frac{g_{k+1}^T (g_{k+1} - g_k)}{g_k^T g_k}$$

Dies ist auch die hier implementierte Variante, da sie sich in numerischen Tests als robuster erwiesen hat.

Für beide Alternativen β_k zu wählen, gilt folgender Satz

Satz 5.1 *Seien folgende drei Bedingungen erfüllt:*

- (i) *Mit einem x_0 in \mathbf{R}^N ist die Menge $M_0 := \{x \in \mathbf{R}^N : f(x) \leq f(x_0)\}$ kompakt.*
- (ii) *Die Funktion f ist auf einer offenen Obermenge von M_0 stetig differenzierbar.*
- (iii) *Der Gradient $\text{grad } f$ ist auf M_0 lipschitzstetig.*

Dann ist das Verfahren durchführbar und es gilt: Bricht das Verfahren nicht nach endlich vielen Schritten mit einer stationären Lösung von (5.1) ab, und gilt im Falle des Polak-Ribière-Verfahrens $\lim |x_k - x_{k+1}| = 0$, so liefert der Algorithmus eine Folge (x_k) mit

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} |\text{grad } f(x_k)| = 0,$$

es gibt also einen Häufungspunkt von (x_k) , der eine stationäre Lösung von (5.1) ist.

Ist zusätzlich M_0 konvex und f auf M_0 gleichmäßig konvex, so konvergiert die Folge (x_k) gegen das dann eindeutige Minimum von f in M_0 .

Beweis: Siehe [Wer92, Satz 7.4.3] oder auch [Pow77]. \square

Im oben schon erwähnten quadratischen Fall hat man lineare Konvergenz mit einer asymptotischen Konvergenzrate von

$$\frac{\sqrt{\text{cond } Q} - 1}{\sqrt{\text{cond } Q} + 1}.$$

Dies deutet an, daß auch im nichtquadratischen Fall die Kondition der Hesse-Matrix von f eine entscheidende Rolle für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens spielt. Man sollte daher versuchen, durch Vorkonditionierung diese Kondition zu verbessern.

Vorkonditionierung im nichtquadratischen Fall funktioniert so, daß man nicht das Problem 5.1 betrachtet, sondern einen Basiswechsel $x = Sy$ mit einer nichtsingulären Matrix S durchführt, was auf das Problem

$$\text{minimiere } \tilde{f}(y) = f(Sy) \quad y \in \mathbf{R}^N$$

führt. Dann ist

$$\text{grad } \tilde{f}(y) = S^T \text{grad } f(Sy)$$

und

$$\text{Hess } \tilde{f}(y) = S^T \text{Hess } f(Sy) S,$$

so daß die Hesse-Matrix wie eine Bilinearform transformiert wird. Man kann nun versuchen, S so zu wählen, daß einerseits die Berechnung eines Matrix-Vektor-Produkts mit S und S^T nicht teuer ist, und andererseits $S^T \text{Hess } f S$ wesentlich besser konditioniert ist als $\text{Hess } f$.

Bei dem hier verwendeten Verfahren wird zur Vorkonditionierung die Offsetfunktion in der hierarchischen Basis dargestellt. Diese Darstellung wird in Abschnitt 5.4 genauer erklärt.

5.3 Optimierung mit Nebenbedingungen

Gesucht ist ein Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \text{minimiere} & \quad f(x) \quad x \in \mathbf{R}^N \\ \text{mit} & \quad c(x) = 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Dabei sind $f, c : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ differenzierbare, reellwertige Funktionen, genauer $f, c \in C^2(\mathbf{R}^N)$, und 0 sei regulärer Wert von c , d.h. falls $c(x) = 0$ so ist $\text{grad } c(x) \neq 0$. Die Menge

$$C := \{x \in \mathbf{R}^N : c(x) = 0\}$$

wird so zu einer Kodimension-1-Untermannigfaltigkeit von \mathbf{R}^N .

Der folgende Satz liefert eine notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung.

Satz 5.2 *Ist x^* die Lösung von (5.2), so gibt es ein $\lambda^* \in \mathbf{R}$ mit $\text{grad } f(x^*) = \lambda^* \text{grad } c(x^*)$. Dieses λ^* heißt Lagrange-Parameter.*

Beweis: Sei $X \in T_{x^*}C$ ein Tangentialvektor an C . Sei $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow C$ eine Kurve mit $\gamma(0) = x^*$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Dann ist wegen $c(\gamma(t)) = 0$

$$0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(\gamma(t)) = \text{grad } c(\gamma(0))^T \dot{\gamma}(0) = \text{grad } c(x^*)^T X$$

und damit verschwindet $\text{grad } c(x^*)^T$ als lineares Funktional auf allen Tangentialvektoren an C in x^* , $\text{grad } c(x^*)$ ist also parallel zur Normalen an C in x^* .

Da x^* ein Minimum von f ist, und 0 somit kritische Stelle von $f \circ \gamma$, gilt

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma(t)) = 0$$

was wie eben impliziert, daß $\text{grad } f(x^*)$ ebenfalls parallel zur Normalen an C in x^* ist.

Da $\text{grad } c(x^*) \neq 0$ ist, existiert also λ^* mit $\text{grad } f(x^*) = \lambda^* \text{grad } c(x^*)$. \square

Dieser Satz führt auf die Lagrange Methode zur Lösung des Problems (5.2). Dabei wird die Lagrange-Funktion

$$L : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : (x, \lambda) \mapsto f(x) - \lambda c(x)$$

verwendet. Gilt nun für (x^*, λ^*) , daß

$$\begin{aligned} \text{grad}_x L(x^*, \lambda^*) &= 0 \quad \text{und} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) &= 0, \end{aligned}$$

dann ist x^* eine kritische Stelle des Problems (5.2), da hier einerseits wegen $\text{grad}_x L(x^*, \lambda^*) = 0$ der Gradient der Zielfunktion und der Gradient der Nebenbedingung linear abhängig sind und andererseits wegen $0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = c(x^*)$ die Nebenbedingung erfüllt ist.

Diese Methode läßt sich bei kleineren Problemen direkt anwenden, hat aber den entscheidenden Nachteil, daß die gesuchte kritische Stelle von L nicht notwendig ein Minimum von L sein muß. Daher können keine Verfahren zur Minimumssuche verwendet werden, man muß also auf Methoden zur Nullstellenbestimmung von $\text{grad } L$ zurückgreifen. Solche Verfahren sind entweder langsam oder benötigen, wie zum Beispiel das Newton-Verfahren, zweite Ableitungen von f und c .

Eine genauere Untersuchung der Hessematrix von L an der Stelle x^* erlaubt eine Modifikation der Lagrange-Funktion, so daß die kritische Stelle doch zum Minimum wird.

Der folgende Satz liefert zunächst eine notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung.

Satz 5.3 *Ist X ein Vektor, der in x^* tangential an C ist, dann gilt*

$$X^T \text{Hess } L(x^*, \lambda^*) X \geq 0$$

d.h. die Hessesche von L ist positiv semidefinit.

Beweis: Sei wiederum $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Kurve in C , mit $\gamma(0) = x^*$ und $\dot{\gamma}(0) = X$. Der vorige Satz ergab sich aus der notwendigen Bedingung

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = 0.$$

Dieser Satz ergibt sich mit einer ähnlichen Rechnung aus

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} \geq 0$$

und der Beobachtung, daß für diese Rechnung f durch $L(\cdot, \lambda^*)$ ersetzt werden kann, da f und L auf C übereinstimmen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left. \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d^2}{dt^2} L(\gamma(t)) \right|_{t=0} \\ &= X^T \text{Hess}_x L(x^*, \lambda^*) X + \text{grad}_x L(x^*, \lambda^*)^T \ddot{\gamma}(0) \\ &= X^T \text{Hess}_x L(x^*, \lambda^*) X. \end{aligned}$$

□

Eine hinreichende Optimalitätsbedingung ergibt sich, wenn man im obigen Satz "positiv semidefinit" durch "positiv definit" ersetzt.

Satz 5.4 *Wenn $c(x^*) = 0$, $\text{grad } L(x^*, \lambda^*) = 0$ und wenn für jeden Vektor X , der in x^* tangential an C ist*

$$X^T \text{Hess}_x L(x^*, \lambda^*) X \geq a|X|^2$$

gilt, so ist x^ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $c = 0$.*

Beweis: Sei dazu

$$A = \text{Hess}_x L(x^*, \lambda^*).$$

Die Taylor-Entwicklung von L um x^* lautet dann wegen $\text{grad } L(x^*, \lambda^*) = 0$

$$L(x, \lambda^*) = L(x^*, \lambda^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)^T A(x - x^*) + o(|x - x^*|^2)$$

Angenommen x^* ist kein lokales Minimum in C . Dann existiert eine Folge $(x_k) \rightarrow x^*$ mit $c(x_k) = 0$ und $L(x_k, \lambda^*) \leq L(x^*, \lambda^*)$. Setze $X_k := x_k - x^*$.

Betrachte zunächst die Taylor-Entwicklung von c um x^*

$$c(x_k) = c(x^*) + \text{grad } c(x^*)^T X_k + o(|X_k|)$$

Da $c(x_k) = c(x^*) = 0$ und $\text{grad } c(x^*)$ parallel zur Normalen an C in x^* ist, existiert damit für $1 > \varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$, so daß für alle $k \geq k(\varepsilon)$ für den Normalanteil $X_k^{\text{nor.}}$ von X_k gilt

$$|X_k^{\text{nor.}}| \leq \varepsilon |X_k|.$$

Da $|X_k|^2 = |X_k^{\text{nor.}}|^2 + |X_k^{\text{tang.}}|^2$, ist dann

$$|X_k|^2 \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)} |X_k^{\text{tang.}}|^2.$$

Damit erhält man für $k \geq k(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} X_k^T A X_k &\geq a |X_k^{\text{tang.}}|^2 - 2|A| |X_k^{\text{tang.}}| |X_k^{\text{nor.}}| - |A| |X_k^{\text{nor.}}|^2 \\ &\geq (a(1 - \varepsilon^2) - 2\varepsilon|A| - \varepsilon^2|A|) |X_k|^2. \end{aligned}$$

Man sieht, daß man ε so wählen kann, daß der Koeffizient $\geq \frac{a}{2}$ wird. Setzt man dies in die Taylor-Entwicklung von L ein, erhält man für $k > k(\varepsilon)$

$$L(x_k, \lambda^*) \geq L(x^*, \lambda^*) + \frac{a}{2} |X_k|^2 + o(|X_k|^2) > L(x^*, \lambda^*)$$

für $|X_k|$ klein genug. Damit erhält man einen Widerspruch zur Wahl der Folge (x_k) . \square

Sei nun die Bedingung aus Satz 5.4 erfüllt. Dann könnte die Lagrange-Funktion in eine Richtung, die einen Anteil besitzt, der normal an C ist, einen negativen Eigenwert haben. Dies kann man durch Addieren eines Strafterms zu L beheben, indem man die Lagrange-Funktion wie folgt modifiziert. Man setzt

$$L_\rho : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : (x, \lambda) \mapsto f(x) - \lambda c(x) + \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

mit einem Strafparameter $\rho > 0$. Zunächst gilt, daß

$$\text{grad}_x L_\rho(x, \lambda) = \text{grad } f(x) - \lambda \text{grad } c(x) + \rho c(x) \text{grad } c(x)$$

Da die ersten beiden Terme, ausgewertet am Minimum x^* für den exakten Lagrangeparameter λ^* , zusammen verschwinden und der dritte Term wegen $c(x^*) = 0$ verschwindet, ist auch diese Funktion an der Stelle (x^*, λ^*) kritisch.

Zusätzlich ist

$$\begin{aligned} \text{Hess}_x L_\rho(x, \lambda) \\ = \text{Hess } f(x) - \lambda \text{Hess } c(x) + \rho \text{grad } c(x) \text{grad } c(x)^T + \rho c(x) \text{Hess } c(x). \end{aligned}$$

An der Stelle x^* verschwindet der letzte Term, und damit ist

$$\text{Hess}_x L_\rho(x^*, \lambda^*) = \text{Hess } f(x^*) - \lambda^* \text{Hess } c(x^*) + \rho \text{grad } c(x^*) \text{grad } c(x^*)^T.$$

Der letzte Term hat den Eigenwert 0 in alle an C tangentialen Richtungen und den Eigenwert $\rho \text{grad } c(x^*)^T \text{grad } c(x^*)$ in die Richtung $\text{grad } c(x^*)$. Wie folgender Satz zeigt, reicht dies aus, um $\text{Hess}_x L_\rho$ positiv definit zu machen, falls man ρ groß genug wählt.

Satz 5.5 *Ist die Hessesche von L in tangentialer Richtung positiv definit, dann gibt es ein $\rho_0 \in \mathbf{R}$, so daß für alle $\rho > \rho_0$ die Lösung von (5.2) ein lokales Minimum der modifizierten Lagrange-Funktion*

$$L_\rho : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : (x, \lambda) \mapsto f(x) - \lambda^* c(x) + \frac{\rho}{2} c(x)^2$$

ist.

Beweis: (entsprechend [Fle81, Theorem 12.2.1]). Wegen obiger Rechnung ist die Lösung x^* von (5.2) zunächst eine kritische Stelle von $L_\rho(\cdot, \lambda^*)$ mit dem exakten Lagrange-Parameter λ^* .

Sei A die Hessesche der (nicht modifizierten) Lagrange-Funktion

$$A = \text{Hess}_x L(x^*, \lambda^*)$$

Es existiert ein $a > 0$, so daß für alle in x^* an C tangentialen Vektoren X gilt, $X^T A X \geq a |X|^2$, da nach Voraussetzung die Hessesche der (nicht modifizierten) Lagrange-Funktion in tangentialen Richtungen positiv ist. Außerdem existiert ein $\mu \geq 0$, so daß für alle Vektoren Y gilt daß $Y^T A Y \geq -\mu |Y|^2$.

Sei $N = \text{grad } c(x^*)$ so daß die Hessesche H_ρ der modifizierten Lagrange-Funktion an der Stelle (x^*, λ^*) durch

$$H_\rho = A + \rho N N^T$$

gegeben ist. Ist Y ein beliebiger Vektor, so kann man $Y = Y^{\text{tang.}} + Y^{\text{nor.}}$ in einen an C tangentialen und einen normalen Anteil zerlegen, dabei ist $Y^{\text{nor.}} = \frac{N^T Y}{N^T N} N$.

Sei weiter $b = |A|$ die Norm von A . Damit gilt für die Hessesche der modifizierten Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned} Y^T H_\rho Y &= (Y^{\text{tang.}})^T H_\rho Y^{\text{tang.}} + 2(Y^{\text{tang.}})^T H_\rho Y^{\text{nor.}} + (Y^{\text{nor.}})^T H_\rho Y^{\text{nor.}} \\ &= (Y^{\text{tang.}})^T A Y^{\text{tang.}} + 2(Y^{\text{tang.}})^T A Y^{\text{nor.}} + (Y^{\text{nor.}})^T A Y^{\text{nor.}} + \rho(N^T Y)^2 \\ &\geq a|Y^{\text{tang.}}|^2 - 2b|Y^{\text{tang.}}||Y^{\text{nor.}}| + (\rho|N|^2 - \mu)|Y^{\text{nor.}}|^2 \end{aligned}$$

Betrachtet man nun die quadratische Form

$$(x, y) \mapsto ax^2 - 2bxy + (\rho|N|^2 - \mu)y^2$$

so ist diese wegen $a > 0$ nach dem Hurwitz-Kriterium positiv definit, falls

$$a(\rho|N|^2 - \mu) - b^2 > 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho > \rho_0 := |N|^{-2} \left(\mu + \frac{b^2}{a} \right).$$

Ist $\rho > \rho_0$, dann existiert damit ein $\beta = \beta(\rho) > 0$, so daß

$$ax^2 - 2bxy + (\rho|N|^2 - \mu)y^2 \geq \beta(x^2 + y^2)$$

was oben eingesetzt liefert, daß

$$Y^T H_\rho Y \geq \beta(|Y^{\text{tang.}}|^2 + |Y^{\text{nor.}}|^2) = \beta|Y|^2$$

Damit ist H_ρ für $\rho > \rho_0$ positiv definit, $L_\rho(\cdot, \lambda^*)$ hat also an der Stelle x^* ein lokales Minimum. \square

Dieser Satz führt auf folgende Methode zur Lösung von (5.2):

- Finde λ^* .
- Bestimme ρ wie oben.
- Führe eine unrestringierte Optimierung für die modifizierte Lagrange-Funktion durch.

Diese Methode ist so nicht anwendbar, da λ^* in den seltensten Fällen vorab berechnet werden kann.

Der Parameter ρ ist weniger kritisch, da ein großes Intervall von Werten funktioniert, und lediglich die schlechte Kondition der Funktion L numerisch Probleme macht, falls ρ zu groß ist.

Stattdessen wird folgender Algorithmus verwendet:

- Wähle ρ .

- Minimiere die Funktion $P_\rho(x) = f(x) + \frac{\rho}{2}c(x)^2$ und erhalte einen Startwert x_0 .
- Für $k = 1, 2, \dots$ iteriere
 - Setze $\lambda_k := \lambda_{k-1} - \rho c(x_{k-1})$
 - Minimiere $L_\rho(\cdot, \lambda_k)$ mit dem CG-Verfahren und erhalte eine neue Näherung $x_k(\lambda_k)$.
 - Teste Abbruchbedingung, falls erfüllt: STOP.

Die Wahl des Lagrange Parameters ist motiviert durch die Tatsache, daß bei einem Minimum \bar{x} von $L_\rho(\cdot, \lambda)$ gilt

$$0 = \text{grad}_x L_\rho(\bar{x}, \lambda) = \text{grad} f(\bar{x}) - (\lambda - \rho c(\bar{x})) \text{grad} c(\bar{x}).$$

Die modifizierte Lagrange-Methode wurde unabhängig voneinander von Hestens [Hes69] und Powell [Pow69] vorgestellt. Eine genauere Untersuchung findet sich auch in [Fle81]. Powell konnte in [Pow69] zeigen, daß die Folge (λ_k) unter der hinreichenden Bedingung aus Satz 5.4 linear gegen den exakten Lagrange-Parameter konvergiert. Dabei verbessert sich die Konvergenzrate mit wachsendem Strafparameter ρ . Konvergiert λ_k gegen λ^* , so konvergiert auch die Folge der $x_k(\lambda_k)$ bei exakter Minimierung gegen x^* , wie ebenfalls in [Pow69] gezeigt wird.

Desweiteren ist zu erwähnen, daß sich die obigen Resultate auf mehrere skalare Nebenbedingungen und unter gewissen Regularitätsannahmen auch auf Ungleichungsnebenbedingungen erweitern lassen.

5.4 Die Hierarchische Basis

Die im vorigen Kapitel beschriebenen stückweise linearen Ansatzfunktionen ϕ_p , die in einem Eckpunkt der Triangulierung 1 sind und in allen anderen verschwinden, bilden eine Basis des Ansatzfunktionenraums, die üblicherweise *Knotenbasis* genannt wird.

Hat man nun eine Hierarchie von Triangulierungen, die durch Verfeinerung auseinander hervorgehen, so haben die Knotenbasen, die zu den verschiedenen Verfeinerungsstufen gehören nichts miteinander zu tun, wie dies Abbildung 4 im eindimensionalen Fall zeigt. Eine Idee der hierarchischen Basis ist, die gewählte Basis für den Ansatzfunktionenraum der Hierarchie der Verfeinerung anzupassen.

Zur Vereinfachung betrachte nur uniforme Verfeinerungen, bei denen alle Dreiecke der gegebenen Triangulierung unterteilt werden. Man wählt zunächst die Knotenbasis für die größte Verfeinerungsstufe. Werden nun alle Dreiecke unterteilt, wie in Abbildung 3 gezeigt, so entstehen neue Punkte der Triangulierung, so

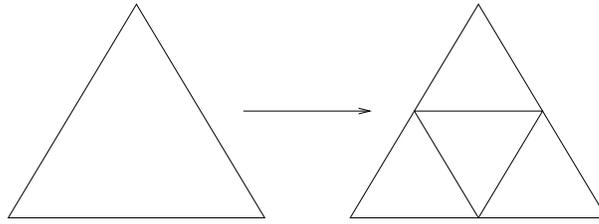


Abbildung 3: Die Verfeinerung eines Dreiecks zu vier kongruenten Dreiecken

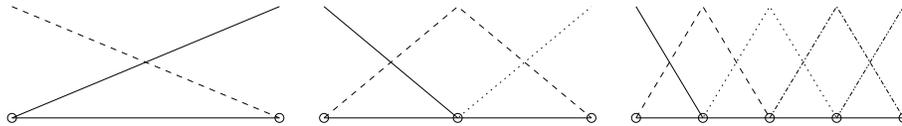


Abbildung 4: Knotenbasen zu drei Unterteilungsstufen eines Intervalls

daß neue Basisfunktionen nötig sind. Man nimmt dazu den Teil der Knotenbasis der feinen Triangulierung, der den neu hinzugekommenen Punkten entspricht. Auch dies ist in Abbildung 5 im eindimensionalen Fall angedeutet. Damit erhält man Basen B_j der Ansatzfunktionenräume \mathcal{S}_j zur j -ten Verfeinerungsstufe, die der Zerlegung der Ansatzfunktionenräume

$$\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \dots \subset \mathcal{S}_k$$

in unterschiedliche Verfeinerungsstufen angepaßt sind.

Dieses Verfahren geht auf Ideen von Faber zurück, die 1909 veröffentlicht wurden [Fab09]. Diese werden von Yserentant in [Yse86, Yse92] und von Bank, Dupont und Yserentant in [BDY88] verwendet, um einen Vorkonditionierer für das CG-Verfahren zu konstruieren und zu untersuchen. Dabei ergibt sich eine erhebliche Beschleunigung der iterativen Verfahren, die zur Lösung der linearen Gleichungssysteme verwendet werden, die durch den Finite-Elemente-Ansatz aus elliptischen Randwertproblemen hervorgehen. Genauer, für eine Diskretisierung mit N Punkten und k -Verfeinerungsstufen ist eine numerische Lösung des Problems mit Aufwand $O(Nk)$ möglich, während für einen Ansatz in der Knotenbasis der Aufwand etwa $O(N^2)$ ist. Ein entsprechender Algorithmus wird von Leinen in seiner Dissertation [Lei90] und in [Lei95] vorgestellt. Die dort verwendete Datenstruktur wird auch hier benutzt. Die Basistransformation S , sowie die Multiplikation mit S^T und S^{-1} , läßt sich mit dieser Datenstruktur in Linearzeit berechnen.

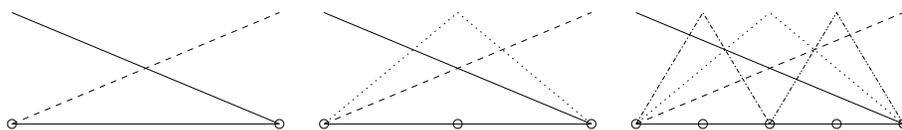


Abbildung 5: Die hierarchische Basis zu drei Unterteilungsstufen eines Intervalls

5.5 Anwendbarkeit der Verfahren

Diskretisiert man genau genug, d.h. wählt man die Verfeinerungsstufe groß genug, und sind die gewählten Integrationsformeln exakt genug und liefern die Deformationsrichtungen jedes Punktes ausreichend viele transversale Variationen, dann kann man erwarten, daß die diskreten Funktionale, wie in Kapitel 5 definiert, sich qualitativ wie die kontinuierlichen Funktionale verhalten.

Es existiert dann einerseits eine Lösung des Problems (4.1) und andererseits ist dort die Hessesche der zugehörigen Lagrange-Funktion in tangentialen Richtungen positiv, wie die Abschätzungen an den Stabilitätsoperator in Theorem 3.3 zeigen.

Desweiteren existiert ein passender Strafparameter, so daß die Hessesche der modifizierten Lagrange-Funktion positiv wird. Eine Abschätzung für einen solchen Strafparameter findet sich auch in 6.6. Dann existiert eine Umgebung U des Minimums, so daß die zusätzlichen Voraussetzungen für Satz 5.1 für U erfüllt sind (vgl. dazu [Wer92, Satz 7.1.15]). Man hat also Konvergenz des CG-Verfahrens gegen das lokale Minimum der modifizierten Lagrange-Funktion, wenn man in U startet und die Schrittweite des CG-Verfahrens soweit beschränkt, daß U nicht verlassen wird.

Diese Konvergenz läßt sich in den numerischen Experimenten beobachten, so daß man in der Tat davon ausgehen kann, mit den diskreten Funktionalen das qualitative Verhalten nachzubilden.

Die Konvergenz dieses Minimums für das diskrete Verfahren gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems bei wachsender Feinheit der Triangulierung wird hier nicht gezeigt. Sie könnte aber daraus folgen, daß der hier gewählte Ansatz eng verwandt ist damit, die Gleichung $H = \text{const.}$ mit einem schwachen Ansatz zu lösen. Diese Gleichung, interpretiert als Gleichung für die Funktion der Offsets, wird eine quasilineare elliptische Gleichung, deren Linearisierung gerade durch eine Gleichung für die Hessesche der modifizierten Lagrange-Funktion gegeben ist.

Die Hessesche der modifizierten Lagrange-Funktion ist im kontinuierlichen Fall eine koerzive Bilinearform (was in 6.6 genauer untersucht wird). Für solche Gleichungen ist bekannt, daß Finite-Element-Ansätze in der L^2 -Norm konvergieren, und zwar quadratisch mit der Auflösung.

Zusammengefaßt sollte gesagt werden, daß die verwendeten Verfahren in ihrer Gesamtheit eine vielversprechende Kombination ergeben, in dieser Arbeit jedoch keine Konvergenzaussagen für das vorliegende Problem bewiesen werden.

5.6 Alternative Verfahren

Die gewählte Schrittweitenstrategie, nämlich die exakte Schrittweite zu berechnen, ist eine sehr teure Methode. Man könnte sie durch andere Strategien ersetzen, die aber bei schlecht konditionierten Problemen, wie sie hier durchaus auftreten könnten (s. 6.6), nicht robust genug sind. Exemplarisch seien hier die Stichworte Powell-Schrittweite und Armijo-Schrittweite genannt, die in [Wer92, Kapitel 7.2.1] vorgestellt werden.

Zur globalen Optimierung existiert eine weitere Klasse von Verfahren, die Klasse der Quasi-Newton-Verfahren, innerhalb der die Broyden-Klasse und darin wiederum das BFGS-Verfahren von Broyden, Fletcher, Goldfarb und Shanno als besonders effizientes Verfahren gilt. Die Quasi-Newton-Verfahren benutzen Informationen aus Gradientenauswertungen der Zielfunktion, um eine Näherung an die Hesse-Matrix im Minimum zu erzeugen. Diese wird dann ähnlich wie beim Newton-Verfahren benutzt, um Abstiegsrichtungen zu erzeugen, daher der Name Quasi-Newton-Verfahren. Diese Verfahren haben jedoch den gravierenden Nachteil, daß sie für die Näherung der Hesseschen Speicherplatz benötigen. Der Speicherplatzbedarf dieser Verfahren wächst also quadratisch mit der Anzahl der Freiheitsgraden, was diese Verfahren für große Auflösungen ungeeignet macht.

Weitere Minimierungsverfahren, die zweite Ableitungen benötigen, wie zum Beispiel das Newton-Verfahren, wurden hier nicht berücksichtigt.

Für eine Übersicht über das Gebiet der nichtlinearen Optimierung mit und ohne Nebenbedingungen sei auf [Fle80, Fle81] verwiesen.

6 Implementierung

Nun da die Verfahren vorgestellt sind, ergeben sich einige praktische Fragen hinsichtlich der Implementierung und Verwendung dieser Verfahren.

6.1 Datenstrukturen und Algorithmen

Das Programm ist vollständig in C++ geschrieben. Eine Referenz zu dieser Sprache findet sich etwa in [Str98].

Die Triangulierung wird mit einer Datenstruktur repräsentiert, die schon von Leinen in [Lei90, Lei95] vorgestellt wurde. Dort diente sie zur Implementierung von Finite-Element-Code für zweidimensionale, elliptische Randwertprobleme und wurde speziell dafür entwickelt, daß die Vorkonditionierung durch die hierarchische Basis (s. 5.4) möglichst einfach und effizient zu implementieren ist. Die Struktur baut die Gesamttriangulierung aus Punkten, Kanten und Dreiecken auf.

Die Topologie der Triangulierung entsteht durch Referenzen der einzelnen Objekte aufeinander. So besteht eine Kante aus Referenzen auf zwei Punkte und ein Dreieck aus Referenzen auf drei Kanten.

Die Datenstruktur erlaubt die Verfeinerung der Dreiecke. Ein unterteiltes Dreieck verbleibt dabei in der Datenstruktur, referenziert aber die aus ihm entstehenden Teildreiecke. Ebenso speichert jede Kante Referenzen auf die Teilkanten die durch Verfeinern entstehen. Damit ergibt sich eine Baumstruktur, welche die Hierarchie der Triangulierungen unterschiedlicher Feinheit reflektiert.

Zusätzlich zu den topologischen Daten enthalten die drei Objekte numerische Daten. In einem Punkt sind dies die Koordinaten des Referenzpunktes, die Variationsrichtung, der aktuelle Offset, der Gradient des Flächen- sowie des Volumenfunctionals, die Darstellung des Offsets in der hierarchischen Basis und zwei Hilfsfelder, die zur Speicherung der Größen g und d dienen, die im CG-Verfahren (s. 5.2) verwendet werden.

Die Kanten enthalten keine numerischen Daten, die Dreiecke jedoch Flächeninhalt und Volumen, sowie die Konstanten K_0, \dots, K_6 zur Volumenberechnung, die in 4.5 eingeführt wurden. Diese Konstanten werden nur in den feinsten Dreiecken benötigt und auch nur dort ist für sie Platz reserviert.

Die verwendete Datenstruktur ist relativ einfach um Methoden zur adaptiven Verfeinerung zu erweitern, wie dies schon in [Lei90, Lei95] beschrieben ist. Davon wird hier jedoch wegen der zu erwartenden Glattheit der Flächen kein Gebrauch gemacht. Trotzdem muß die Triangulierung durch Verfeinern aufgebaut werden, damit die Information über die Gitterhierarchie in der Datenstruktur gespeichert ist.

Verfeinerungsstufe	0	1	2	3	4	5	6	i
Punkte	6	18	66	258	1026	4098	16386	$2 + 4^{i+1}$
Kanten	12	48	192	768	3072	12288	49152	$3 \cdot 4^{i+1}$
Dreiecke	8	32	128	512	2048	8192	32768	$2 \cdot 4^{i+1}$

Tabelle 2: Anzahl von Punkten, Kanten und Dreiecken bei einer gegebenen Verfeinerungsstufe

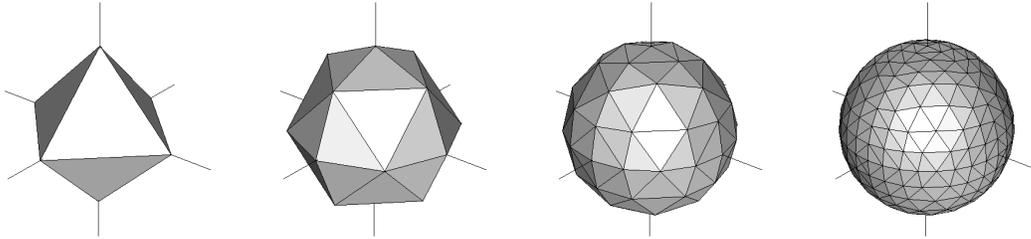


Abbildung 6: Unterschiedliche Verfeinerungsstufen des Oktaeders

6.2 Erzeugung von Startflächen

Als Startflächen werden immer Triangulierungen von euklidischen Sphären verwendet, die aus dem Oktaeder mit 8 Dreiecken und den 6 Eckpunkten $\pm(1, 0, 0)$, $\pm(0, 1, 0)$ und $\pm(0, 0, 1)$ erzeugt werden.

Diese Ausgangstriangulierung wird uniform verfeinert, wie in Abbildung 3 zu sehen ist. Danach werden die neu entstandenen Punkte radial auf die euklidische Einheitssphäre projiziert. Die Radialrichtung wird dann in jedem Punkt auf seine aktuelle Position gesetzt, danach wird die entstandene Triangulierung eventuell skaliert und translatiert.

In Tabelle 2 ist die Anzahl von Punkten, Kanten und Dreiecken aufgelistet, die bei einer gegebenen Verfeinerungsstufe die Triangulierung bilden, und Abbildung 6 zeigt einige Verfeinerungstufen.

6.3 Metriken

Zur Berechnung von Flächeninhalt und Volumen, wie in 4.3 – 4.6 beschrieben, muß die umgebende Metrik \bar{g} gegeben sein. Diese wird als Klasse repräsentiert, die folgende Operationen unterstützt:

- (i) Auswerten der Metrik an einem gegebenen Punkt $p \in \mathbf{R}^3$, auf zwei gegebenen Vektoren X, Y , d.h. berechnen von

$$\bar{g}_p(X, Y).$$

Dies wird zur Berechnung des diskreten Flächenfunktional in 4.3 benötigt.

- (ii) Auswerten der Ableitung der Metrikoeffizienten $\bar{g}_{\alpha\beta}$ in eine gegebene Richtung R und kontrahieren mit zwei gegebenen Vektoren X, Y , d.h. berechnen von

$$(D_R \bar{g}_{\alpha\beta})(p) X^\alpha Y^\beta.$$

Dies wird zur Berechnung der Ableitung des diskreten Flächenfunktionals in 4.4 benötigt.

- (iii) Auswerten der Dichte der Metrik an einem gegebenen Punkt $p \in \mathbf{R}^3$, d.h. berechnen von

$$\sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta}(p))}.$$

Dies wird zur Berechnung des diskreten Volumenfunktionals in 4.5 benötigt.

- (iv) Auswerten der Ableitung der Dichte der Metrik in eine gegebene Richtung R an einem gegebenen Punkt $p \in \mathbf{R}^3$, d.h. berechnen von

$$D_R \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta}(p))}.$$

Dies wird zur Berechnung der Ableitung des diskreten Volumenfunktionals in 4.6 benötigt.

Die Funktion, die im Programm die geometrischen Daten berechnet, bekommt eine Metrikklasse als Parameter, die obige Operationen unterstützt. Dabei ist diese Klasse beliebig austauschbar, so daß jede Metrik vom Programm unterstützt wird.

Die in Kapitel 7 berechneten Beispiele verwenden alle konform euklidische Metriken, d.h. Metriken der Form $\bar{g} = \psi^4 \delta$ wobei $\psi \in C^\infty(\Omega)$, und δ die euklidische Metrik auf \mathbf{R}^3 ist. Dabei ist $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein Außengebiet mit $\mathbf{R}^3 \setminus B_\rho(0) \subset \Omega$ für ein geeignetes $\rho \geq 0$.

Für diese Metriken sind die obigen Operationen recht einfach zu realisieren, wenn man ψ und die Ableitung von ψ in eine gegebene Richtung an beliebigen Punkten $p \in \mathbf{R}^3$ auswerten kann. Dabei gilt:

(i)

$$\bar{g}_p(X, Y) = \psi(p)^4 \langle X, Y \rangle$$

(ii)

$$(D_R \bar{g}_{\alpha\beta})(p) X^\alpha Y^\beta = 4 (D_R \psi)(p) \psi(p)^3 \langle X, Y \rangle$$

(iii)

$$\sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta}(p))} = \psi(p)^6$$

(iv)

$$\left(D_R \sqrt{\det(\bar{g}_{\alpha\beta})} \right) (p) = 6 (D_R \psi)(p) \psi(p)^5.$$

Hier ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt.

Aus diesem Grund wurde dem Programm eine Klasse zur Behandlung konform euklidischer Metriken hinzugefügt, die als Parameter nur noch die Funktion ψ zusammen mit deren Ableitungen benötigt.

6.4 Abbruchbedingungen

Für den Algorithmus, der am Ende von 5.3 angegeben wurde, sind verschiedene Arten von Abbruchbedingungen notwendig. Zum einen muß die äußere Schleife beendet werden, und zum anderen muß die Minimierung im Inneren der Schleife abgebrochen werden, wenn diese genau genug ist, und zuletzt braucht man eine Abbruchbedingung für die Liniensuche. Diese Abbruchbedingungen müssen aufeinander abgestimmt werden, da es zum Beispiel keinen Sinn macht, große Genauigkeit des CG-Verfahrens zu verlangen, andererseits aber die Liniensuche nicht genau genug durchzuführen (s. dazu etwa [Fle80, Table 4.1.2]).

Die Liniensuche wird abgebrochen, wenn eine bestimmte relative Genauigkeit erreicht wird, d.h. es werden immer gleich viele Funktionsauswertungen gemacht. Dabei ist für die Rechnung mit doppelt genauen Gleitkommazahlen eine Genauigkeit 10^{-7} – 10^{-9} ausreichend (s. [PTVF92, Abschnitt 10.1]), was wie aus Tabelle 1 zu entnehmen ist, etwa 34–44 Schritten entspricht. Das ist eine relativ teure Methode zur Wahl der Schrittweite, aber andererseits sehr robust, insbesondere wenn die Zielfunktion nicht sehr gut konditioniert ist.

Das CG-Verfahren zur Minimierung braucht zwei Arten von Abbruchbedingungen. Zum Einen sollte das Verfahren abbrechen, wenn es das Minimum der Funktion gefunden hat, und zum Anderen sollte abgebrochen werden, wenn das Verfahren mit vertretbarem Aufwand kein Minimum erreicht. Dabei ist die Abbruchbedingung im Falle eines Erfolges einfach, da in einem Minimum x^* der Zielfunktion f $\text{grad } f(x^*) = 0$ gilt. Deshalb kann als Abbruchbedingung

$$\|\text{grad } f(x)\| \leq \tau_1$$

verwendet werden, wobei man eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ wählen muß. Hier wurde als Norm $\sqrt{\text{grad } f(x)^T \text{grad } f(x)}$ gewählt, wobei der Gradient in der hierarchischen Basis dargestellt wird. Diese Norm ist nicht unabhängig von der Verfeinerungsstufe, aber leicht zu berechnen.

Die Abbruchbedingungen für den Fall eines Mißerfolges sind etwas schwieriger zu wählen. Zunächst ist als Absicherung eine obere Grenze für die Anzahl der

gemachten Schritte angebracht, desweiteren muß das Verfahren abgebrochen werden, falls die Triangulierung so verformt wird, daß einzelne Punkte nahe am Zentrum der Ausgangssphäre liegen. Ein Beispiel hierfür zeigt Abbildung 29.

Macht das Verfahren keine Fortschritte, wird also $\alpha = 0$ als Schrittweite gewählt, so sollte nicht sofort abgebrochen werden, da die Wahl der Suchrichtung nach Polak-Ribière dann dazu führt, daß das CG-Verfahren mit dem Gradienten der Zielfunktion neu startet. Man sollte daher einige Schritte mit kleinem α erlauben, um dieses Verhalten des Algorithmus zur Geltung kommen zu lassen. Die hier verwendete Methode ist, einige solche kleinen Schritte zu erlauben — etwa 5–10 — dann aber abzubrechen, falls dazwischen kein Schritt gemacht wird, bei dem α größer ist.

Die Schleife der modifizierten Lagrange-Methode wird abgebrochen, falls sich λ durch die Update-Methode nicht mehr stark ändert, d.h. falls

$$\left| \frac{\lambda_{\text{neu}} - \lambda_{\text{alt}}}{\lambda_{\text{neu}}} \right| < \tau_2.$$

Dabei kann, wie praktische Versuche zeigen, $\tau_2 \approx \tau_1$ gewählt werden.

Diese recht grobe Methode ist gerechtfertigt, da es hier vor allem darum geht, Flächen konstanter mittlerer Krümmung zu suchen, nicht aber darum, die Volumenbedingung möglichst genau einzuhalten. Denn hat man nach Minimierung der modifizierten Lagrange-Funktion für λ_{alt} die Offsetfunktion u als Näherungslösung mit

$$\|\text{grad } L_\rho(u, \lambda_{\text{alt}})\| \leq \tau_1,$$

so ist

$$\|\text{grad } \hat{A}(u) - \lambda_{\text{alt}} \text{grad } \hat{V}(u) + \rho(\hat{V}(u) - V_0) \text{grad } \hat{V}(u)\| \leq \tau_1$$

und da $\lambda_{\text{neu}} = \lambda_{\text{alt}} - \rho(\hat{V}(u) - V_0)$ gilt, ist

$$\|\text{grad } \hat{A}(u) - \lambda_{\text{neu}} \text{grad } \hat{V}(u)\| \leq \tau_1$$

d.h. auch hier sind $\text{grad } \hat{A}$ und $\text{grad } \hat{V}$ an der Stelle u nahezu linear abhängig. Also liefert u eine Näherungslösung des diskreten isoperimetrischen Problems zu einer anderen Volumenbedingung (nämlich gerade $\hat{V} = \hat{V}(u)$).

6.5 Berechnung von Blätterungen

Will man nicht nur eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung berechnen, sondern mehrere, braucht man eine Folge von Volumenbedingungen, die zu Flächen in einem vernünftigen Abstand führen. Dazu wird hier folgende Strategie verwendet.

Angenommen, man hat eine Triangulierung \mathcal{T}_1 , die schon das diskrete isoperimetrische Problem löst. Nach 3.3 ist diese in einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit nahezu sphärisch, wenn ihr Radius groß genug ist. Eine weitere Fläche konstanter mittlerer Krümmung, die etwas mehr Volumen einschließt, ist dann ebenfalls nahezu eine euklidische Sphäre mit etwas größerem Radius.

Will man nun eine solche Fläche berechnen, die etwa den Abstand δ von \mathcal{T}_1 besitzt, so kann man so vorgehen, daß man \mathcal{T}_1 als Referenztriangulierung verwendet und dann alle Offsets auf δ setzt, um eine Triangulierung \mathcal{T}_2 zu erhalten. Dies ist eine gute Anfangstriangulierung, falls die Variationsrichtung nahezu der Normalenrichtung entspricht, denn dann sind \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 nahezu konzentrische Sphären. Nun berechnet man das Volumen, das \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 einschließen. Dieses Volumen wird als Volumennebenbedingung benutzt, um die modifizierte Lagrange-Methode neu zu starten. Der für \mathcal{T}_1 ermittelte Lagrange-Parameter kann als Startwert für den Lagrange-Parameter für das neue Problem benutzt werden.

Diese Strategie ist optimal, was die Genauigkeit der Volumenberechnung betrifft, da die Offsets während der Iteration nahezu gleich sind, sofern die Deformationsrichtung nicht zu sehr von der Normalen abweicht. Dadurch, daß in diesem Fall nicht sehr viel Volumen überstrichen wird, erreicht man also für alle Dreiecke, bzw. verallgemeinerte Prismen, vergleichbare Genauigkeit bei der Volumenberechnung.

Als Illustration betrachte man am besten die Bilder im Kapitel 7.

Nun stellt sich natürlich auch noch die Frage, wie man zu einer ersten Fläche konstanter mittlerer Krümmung gelangt. Dazu sind zwei Möglichkeiten implementiert. Die erste Möglichkeit ist nicht für alle Metriken geeignet, denn hier wird das Flächenfunktional mit dem CG-Verfahren ohne Nebenbedingungen minimiert. Wenn die Minimierung erfolgreich abbricht, so erhält man eine Minimalfläche. Eine solche braucht aber nicht immer zu existieren. Hat man jedoch eine gefunden so kann man obiges Verfahren zu Berechnung von Blätterungen mit der Minimalfläche und dem Lagrange-Parameter 0 starten. Diese Möglichkeit ist sehr schnell, da hier nur einmal minimiert werden muß, andererseits ist sie abhängig von der Metrik nicht immer anwendbar. Man sollte ebenfalls beachten, daß Minimalflächen nur lokale Minima des Flächenfunktionals sind, man muß also mit einer kleinen Schrittweite arbeiten, um sie nicht zu verfehlen.

Eine andere Möglichkeit eine Startfläche zu bekommen ist, mit einer großen Sphäre zu beginnen und eine Fläche zu suchen, die das gleiche Volumen wie diese Startfläche einschließt, d.h. schon jetzt mit einer Optimierung unter Nebenbedingungen zu beginnen. Das hat den Vorteil, daß man für große Radien mit einer euklidischen Sphäre sehr nahe an der erwarteten Lösung startet, wenn man das Massezentrum näherungsweise kennt, aber den Nachteil daß man nichts darüber weiß, welchen Lagrange-Parameter man verwenden soll.

Man kann daher nichts anderes tun als mit $\lambda = 0$ starten, was auch schon nahe am Lagrange-Parameter liegt. Dann geht die modifizierte Lagrange-Funktion über in

$$P_\rho := L_\rho(\cdot, 0) = \hat{A} + \frac{\rho}{2} \left(\hat{V} - V_0 \right)^2$$

Das Verfahren, diese Funktion zu minimieren, um das Optimierungsproblem zu lösen, wird *Strafmethode* genannt. Für $\rho \rightarrow \infty$ konvergiert das Minimum von P_ρ gegen die Lösung des Optimierungsproblems. Dies ist ein Verfahren, das häufig angewandt wird, um Startwerte für den Lagrange-Parameter zu erhalten.

6.6 Die Wahl des Strafparameters

Der Strafparameter ρ , der für die modifizierte Lagrange-Methode gewählt werden muß, sollte nicht konstant gehalten werden, während eine ganze Blätterung berechnet wird. Betrachte dazu folgende Rechnung im \mathbf{R}^3 . Die Sphäre um 0 mit Radius r werde mit S_r bezeichnet. Betrachtet man die Variation entlang der Normalen mit konstanter Geschwindigkeit, bleibt als Freiheitsgrad nur der Radius.

Die Funktionale sind dann

$$A(r) = 4\pi r^2 \quad \text{bzw.} \quad V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Stellt man als Nebenbedingung $V(r) = V(\sigma)$, so ist der exakte Lagrange Parameter durch die mittlere Krümmung der Sphäre mit Radius σ also gerade $\lambda^* = \frac{2}{\sigma}$ gegeben. Die modifizierte Lagrange-Funktion lautet dann

$$L_\rho(r, \lambda^*) = 4\pi r^2 - \frac{8}{3\sigma}\pi r^3 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi \sigma^3 \right)^2.$$

Man rechnet nach, daß

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} L_\rho(\sigma, \lambda^*) = -8\pi + 16\rho\pi\sigma^4.$$

Dieser Ausdruck ist positiv, falls

$$\rho > \frac{1}{2}\sigma^{-4},$$

und für festgehaltenes ρ wächst dieser Ausdruck wie σ^4 . Dies zeigt, daß zur Berechnung einer Blätterung des \mathbf{R}^3 der Strafparameter abnehmen sollte, wenn die Kondition des Problems beschränkt bleiben soll.

Diese Rechnung liefert ein Größenordnung, in der der Strafparameter gewählt werden kann. Einen funktinierenden Wert ermittelt man dann durch praktische Versuche.

Im Fall einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit kann man erwarten, daß sich die modifizierte Lagrange-Funktion im Außenbereich ähnlich verhält. Allerdings ist zu bemerken, daß die Variation des Radius zu Normalgeschwindigkeiten führt, deren L^2 -Norm auf den Flächen $S_\sigma(0)$ sich wie σ verhält. Berücksichtigt man dies, so ist der Eigenwert der zweiten Ableitung der obigen Lagrange Funktion nur noch von der Ordnung σ^2 . Die folgende Rechnung zeigt, daß im Fall einer asymptotisch flachen Mannigfaltigkeit, mit wachsendem σ der Parameter ρ wie σ^{-4} fallen darf, und wie σ^{-2} fallen sollte.

Um dies zu zeigen, betrachtet man die exakten Funktionale für Flächeninhalt und Volumen und konstruiert daraus folgende Lagrange-Funktion

$$L_\rho(\Sigma, \lambda) = |\Sigma| - \lambda \text{Vol}(\Sigma) + \frac{\rho}{2}(\text{Vol}(\Sigma) - V_0)^2.$$

Ist Σ eine kompakte Fläche mit konstanter mittlerer Krümmung H , so ist der exakte Lagrange-Parameter durch H gegeben, und man erhält für eine Variation Σ_t von Σ mit Normalengeschwindigkeit f aus den Variationformeln für Fläche und Volumen

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d^2}{dt^2} L_\rho(\Sigma_t, H) \right|_{t=0} \\ &= \int_{\Sigma} (-f \Delta f - f^2 (\bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) + |A|^2)) \text{vol}_{\Sigma} + \rho \left(\int_{\Sigma} f \text{vol}_{\Sigma} \right)^2. \end{aligned}$$

Also entspricht die Hesse-Matrix in diesem Fall der symmetrischen Bilinearform

$$\begin{aligned} B_\rho : (f, g) &\mapsto \int_{\Sigma} (-f \Delta g - fg (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu))) \text{vol}_{\Sigma} \\ &+ \rho \left(\int_{\Sigma} f \text{vol}_{\Sigma} \right) \left(\int_{\Sigma} g \text{vol}_{\Sigma} \right). \end{aligned}$$

Deren kleinsten Eigenwert gilt es nun in Abhängigkeit von ρ abzuschätzen. Sei dazu $f \in C^\infty(\Sigma)$ und $\bar{f} = \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} f \text{vol}_{\Sigma}$ der Mittelwert von f . Dann ist

$$B_\rho(f, f) = B_\rho(\bar{f}, \bar{f}) + B_\rho(f - \bar{f}, f - \bar{f}) + 2B_\rho(\bar{f}, f - \bar{f}). \quad (6.1)$$

Ist μ_1 der kleinste Eigenwert des Stabilitätsoperators $J = -\Delta - (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu))$ auf volumenerhaltenden Variationen, so gilt wegen $\int f - \bar{f} = 0$, daß

$$B_\rho(f - \bar{f}, f - \bar{f}) \geq \mu_1 \|f - \bar{f}\|_2^2. \quad (6.2)$$

Ist μ_0 der kleinste Eigenwert des Stabilitätsoperators auf allen Funktionen, so gilt

$$B_\rho(\bar{f}, \bar{f}) \geq \mu_0 \|\bar{f}\|_2^2 + \rho |\Sigma| \|\bar{f}\|_2^2. \quad (6.3)$$

Um den dritten Term von (6.1) abzuschätzen, benötigt man folgende Abschätzung aus [HY96], die auf einer Fläche Σ wie aus Theorem 3.2 gilt. Dabei hängt C

nur von den Konstanten C_k , $k = 1, \dots, 5$ ab, und σ ist der Radius-Parameter aus Theorem 3.2, der für folgende Rechnung für große σ durch $\sqrt{|\Sigma|/4\pi}$ ersetzt werden kann.

$$|(|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu)) - 2\sigma^{-2} + 10m\sigma^{-3}| \leq C\sigma^{-4}$$

mit dieser Abschätzung ist wegen $\Delta \bar{f} = 0$ und $\int f - \bar{f} = 0$

$$\begin{aligned} B_\rho(\bar{f}, f - \bar{f}) &= - \int_\Sigma \bar{f}(f - \bar{f}) (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu)) \text{vol}_\Sigma \\ &= \bar{f} (2\sigma^{-2} - 10m\sigma^{-3}) \int_\Sigma (f - \bar{f}) \text{vol}_\Sigma \\ &\quad + \int_\Sigma \bar{f}(f - \bar{f}) (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - 2\sigma^{-2} + 10m\sigma^{-3}) \text{vol}_\Sigma \\ &= \int_\Sigma \bar{f}(f - \bar{f}) (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu) - 2\sigma^{-2} + 10m\sigma^{-3}) \text{vol}_\Sigma, \end{aligned}$$

also ist mit Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |2B_\rho(\bar{f}, f - \bar{f})| &\leq 2C\sigma^{-4} \|\bar{f}\|_2 \|f - \bar{f}\|_2 \\ &\leq C\sigma^{-4} (\|\bar{f}\|_2^2 + \|f - \bar{f}\|_2^2) \\ &= C\sigma^{-4} \|f\|_2^2. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Zusammen liefern (6.1) – (6.4)

$$B_\rho(f, f) \geq \mu_1 \|f - \bar{f}\|_2^2 + (\mu_0 + \rho|\Sigma|) \|\bar{f}\|_2^2 - C\sigma^{-4} \|f\|_2^2, \tag{6.5}$$

bzw. falls

$$\mu_0 + \rho|\Sigma| \geq \mu_1 \tag{6.6}$$

gilt, ist

$$B_\rho(f, f) \geq (\mu_1 - C\sigma^{-4}) \|f\|_2^2.$$

Da $\mu_1 \geq 6m\sigma^{-3} - O(\sigma^{-4})$ wie in Theorem 3.3 gilt, ist somit $(\mu_1 - C\sigma^{-4})$ positiv, falls σ groß genug ist.

Also ist die Bedingung (6.6) für große σ hinreichend dafür, daß das Funktional B_ρ positiv ist. Wegen

$$\mu_0 \geq -2\sigma^{-2} + 10m\sigma^{-3} - O(\sigma^{-4})$$

was im Zusatz zu 3.3 gezeigt wird, führt dies auf

$$\rho \geq \frac{1}{|\Sigma|} (2\sigma^{-2} - 4m\sigma^{-3} + O(\sigma^{-4}))$$

was wegen $|\Sigma| = O(\sigma^2)$ wiederum bedeutet, daß ρ wie σ^{-4} fallen darf.

Andererseits ist mit einer ähnlichen Rechnung

$$\begin{aligned} B_\rho(1,1) &= - \int_\Sigma (|A|^2 + \bar{\text{Ric}}(\nu, \nu)) \text{vol}_\Sigma + \rho |\Sigma|^2 \\ &\geq (-2\sigma^{-2} + 10m\sigma^{-3}) |\Sigma| + \rho |\Sigma|^2 - O(\sigma^{-4}) |\Sigma|. \end{aligned}$$

Schränkt man also B_ρ auf einen diskreten Funktionenraum \mathcal{S} ein, der die konstanten Funktionen auf Σ enthält, so ist damit der größte Eigenwert $\mu_{\max.}$ von B_ρ abgeschätzt durch

$$\mu_{\max.} \geq (-2\sigma^{-2} + 10m\sigma^{-3}) + \rho |\Sigma|.$$

Dieser wächst also für festes ρ wie $|\Sigma| = O(\sigma^2)$. Daher sollte ρ mindestens wie σ^{-2} fallen, damit der größte Eigenwert beschränkt bleibt. (Bem: Die Eigenwerte des Laplace-Operators, die von \mathcal{S} aufgelöst werden, skalieren wie σ^{-2} , tragen also nicht zum Wachstum bei.)

Die Hesse-Matrix der diskreten modifizierten Lagrange-Funktion entspricht einer diskreten Version dieser Bilinearform, wobei die eingesetzten Funktionen den Normalanteilen der zugelassenen Variationen entsprechen. Falls diese Variationen alle transversal sind, kann man daher erwarten, daß sich diese Resultate für das kontinuierliche Problem auf die diskretisierte Situation übertragen lassen, falls die Diskretisierung genau genug ist.

6.7 Ausgabeformate

Die Triangulierung kann vom Programm in verschiedenen Formaten ausgegeben werden. Zum einen kann ein internes Datenformat geschrieben werden, das die Triangulierung zusammen mit den relevanten numerischen Daten, d.h. Koordinaten der Punkte, Radialrichtung und Offsets in den Punkten abspeichert, so daß dies zur Weiterverarbeitung wieder eingelesen werden kann. Dabei werden die Informationen zur hierarchischen Struktur erhalten.

Desweiteren kann die Triangulierung in einem Format ausgegeben werden, das von `geomview` (s. [P⁺00]) interpretiert und angezeigt werden kann. Dieses Format beinhaltet alle Informationen um die Triangulierung zu rekonstruieren, die hierarchischen Informationen gehen jedoch verloren.

6.8 Mögliche Erweiterungen

Die Variationsrichtungen der Punkte der Dreiecke werden während der Iteration nicht verändert. Eine Veränderung dieser Richtungen könnte sich als sinnvoll erweisen, insbesondere dann wenn eine der Richtungen nicht mehr transversal ist. Es wurde jedoch bewußt darauf verzichtet, die Normalenrichtung zu berechnen,

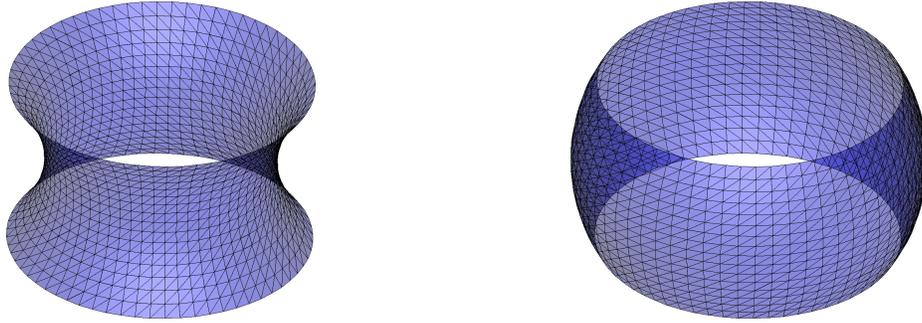


Abbildung 7: Vom Programm als Minimalfläche mit festgehaltenem Rand erzeugte Flächen, links in der euklidischen Metrik, rechts in der Schwarzschildmetrik.

und diese als Variationsrichtung zu verwenden, da sich bei entsprechenden Verfahren zur Implementierung des mittleren Krümmungsfluß dadurch Instabilitäten ergaben.

Das Verfahren kann neben den betrachteten sphärischen Flächen auch andere Topologien modellieren, wie zum Beispiel Flächen höheren Geschlechts oder Flächen mit festgehaltenem Rand. Letzteres wird erreicht, indem man die Variationsrichtung der festgehaltenen Punkte auf 0 setzt. Abbildung 7 zeigt links ein so erzeugtes Bild eines Katenoids, d.h. der Minimalfläche zwischen zwei festgehaltenen Kreisen gleichen Radius in der euklidischen Metrik, rechts ist die Lösung desselben Problems für die Schwarzschildmetrik mit $m = 4$ zu sehen. Der festgehaltene Rand besteht dabei aus zwei Kreisen mit Radius 1.7, die einen senkrechten Zylinder der Höhe 2 beranden.

7 Numerische Beispielrechnungen

Die hier dargestellten Beispiele wurden auf einer Triangulierung der Verfeinerungsstufe 6 mit 16386 Punkten wie in 6.2 berechnet. Als Abbruchkriterium für die Minimierung der Lagrangefunktion wurde $\|\text{grad}_x L\| \leq 10^{-3}$ verwendet, wobei $\text{grad}_x L$ in der hierarchischen Basis dargestellt ist. Die modifizierte Lagrange-Methode wurde abgebrochen, falls sich eine relative Änderung des Lagrangeparameters um weniger als 10^{-3} ergab.

Alle Abbildungen, die Flächen zeigen, wurden mit `geomview` erstellt, dieses Programm wurde am "The Geometry Center" der University of Minnesota entwickelt, und ist in [P⁺00] dokumentiert.

7.1 Die Schwarzschildmetrik

Als erster Test für das Programm wurde die Schwarzschildmetrik betrachtet, die schon in 3.2 untersucht wurde.

Startet man im Fall $m = 1$ das Verfahren auf einer triangulierten Sphäre mit Radius 0.5 und Zentrum $(0, 0, 0)$, d.h. der Minimalfläche in diesem Raum, so erhält man eine Folge von Flächen Σ_i und eine Folge von Lagrangeparametern $\hat{\lambda}_i$, die als mittlere Krümmung gedeutet werden können (s. Kapitel 2).

Nun läßt sich auf der Fläche ein Radius \tilde{r}_i bezüglich des Zentrums $(0, 0, 0)$ definieren.

$$\tilde{r}_i := \frac{1}{|\Sigma_i|} \int_{\Sigma_i} |x| d\mu_{\Sigma_i}(x).$$

Dieser Radius läßt sich durch die Integrationsformel, die in 4.3 für den Flächeninhalt vorgestellt wurde, approximativ berechnen. Dies ergibt zu jeder Fläche den numerischen Radius \hat{r}_i .

Das Diagramm für $d = 0$ in Abbildung 9 zeigt die numerisch ermittelte mittlere quadratische Abweichung $\hat{\sigma}_i$ von $|x|$ auf Σ_i von diesem Radius. Die exakte mittlere quadratische Abweichung σ_i ist definiert durch

$$\sigma_i := \left(\frac{1}{|\Sigma_i|} \int_{\Sigma_i} ||x| - r_i|^2 \right)^{1/2}$$

Zur numerischen Berechnung von $\hat{\sigma}_i$ wird wieder die in 4.3 vorgestellte Integrationsformel benutzt.

Das Diagramm in Abbildung 8 zeigt die exakte mittlere Krümmung H_S in Abhängigkeit von r als durchgezogene Linie und zu jeder Fläche Σ_i das Paar $(\hat{r}_i, \hat{\lambda}_i)$ als Kreuz.

Benutzt man als Startfläche nicht eine Sphäre mit Zentrum 0, sondern eine um $(d, 0, 0)$ zentrierte Sphäre, erhält man, bedingt durch die unterschiedlich großen

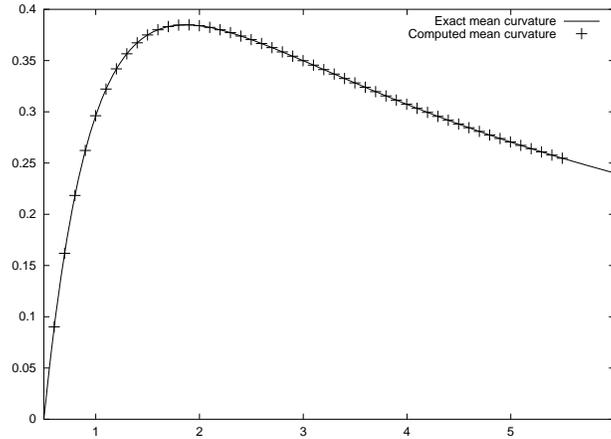


Abbildung 8: Die exakte mittlere Krümmung einer Sphäre mit Radius r in der Schwarzschildmetrik in Abhängigkeit von r und die berechnete mittlere Krümmung.

Dreiecke, eine etwas größere Ungenauigkeit in der mittleren quadratischen Abweichung wie Abbildung 9 für verschiedene Werte von d zeigt. Die Abbildung zeigt außerdem, daß der Radius der berechneten Flächen für unterschiedliche Startwerte schwankt, obwohl jede Fläche exakt berechnet gleichen Radius hätte. Dies zeigt Ungenauigkeiten in der Berechnung der geometrischen Daten wie Oberfläche und Volumen, die durch Streckung bzw. Stauchung von Dreiecken bei der Translation des Gitters entstehen. Diese Ungenauigkeiten summieren sich im Laufe der Rechnung auf, haben jedoch keine Auswirkung auf die Relation zwischen berechnetem Radius und berechneter mittlerer Krümmung, wie Abbildung 10 für $d = 0.4$ zeigt.

Eine Größe, die Aussagen über die Relation des berechneten Flächeninhalts zur mittleren Krümmung macht, ist die Hawking-Masse $m_H(\Sigma)$ einer Fläche Σ mit

$$m_H(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} \left(16\pi - \int_{\Sigma} H^2 \text{vol}_{\Sigma} \right), \quad (7.1)$$

die sich auf Flächen konstanter mittlerer Krümmung offensichtlich auf

$$m_H(\Sigma) = \frac{|\Sigma|^{1/2}}{(16\pi)^{3/2}} (16\pi - |\Sigma|H^2) \quad (7.2)$$

reduziert.

Benutzt man die Formel (3.1) für die mittlere Krümmung der Flächen $S_r(0)$ und die Formel $|S_r(0)| = 4\pi r^2 \psi^4(r)$, so ergibt sich

$$m_H(S_r(0)) = m.$$

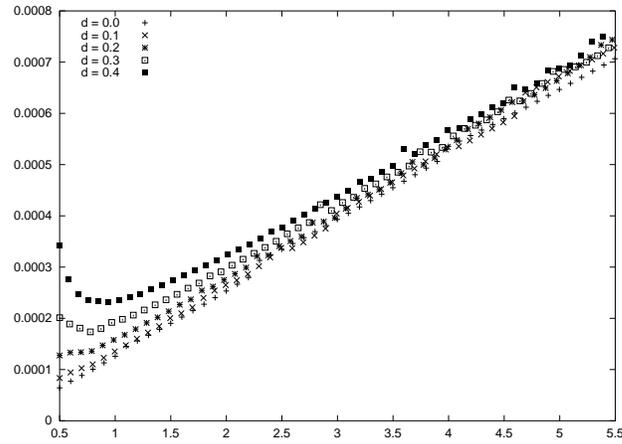


Abbildung 9: Die numerisch ermittelte mittlere quadratische Abweichung der Funktion $|x|$ von \hat{r}_i in der Schwarzschildmetrik in Abhängigkeit von \hat{r}_i für verschiedene Werte von d .

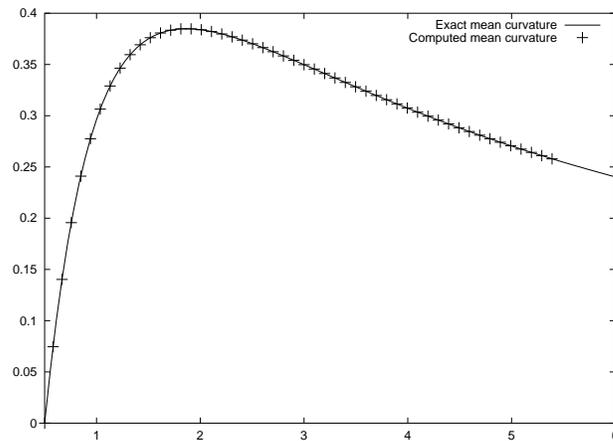


Abbildung 10: Die exakte mittlere Krümmung einer Kugel mit Radius r in der Schwarzschildmetrik in Abhängigkeit von r und die berechnete mittlere Krümmung im Fall einer translatierten Startfläche mit $d = 0.4$.

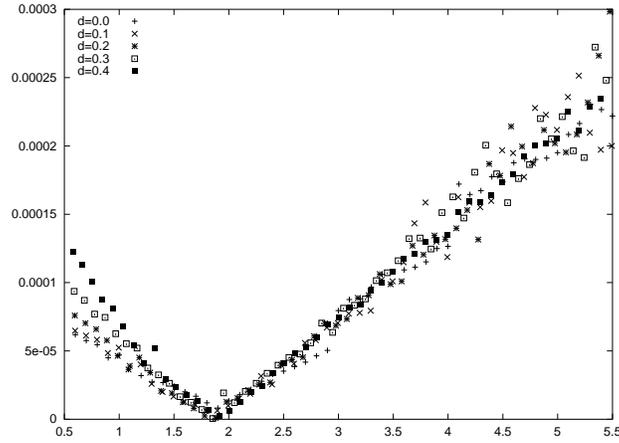


Abbildung 11: Die Abweichung der berechneten Hawking Masse vom erwarteten Wert 1 in Abhängigkeit des Radius.

Im betrachteten Fall mit $m = 1$ ist also $m_H(S_r(0)) = 1$. Die Grafik in Abbildung 11 zeigt den Fehler $|\hat{m}_H(\Sigma_i) - 1|$ wobei \hat{m}_H die nach der Formel (7.2) mit den numerischen Größen $|\Sigma_i|$ und $\hat{\lambda}_i$ berechnete approximative Hawking-Masse ist.

Das Studium des Verhaltens des Programms im Falle der Schwarzschildmetrik zeigt, wo die Stärken und Schwächen der Implementierung liegen. Zum Einen werden Flächen mit mittlerer Krümmung berechnet, bei denen die mittlere Krümmung, Flächeninhalt und Radius sehr genau zusammenpassen, zum Andern aber führen Ungenauigkeiten, die bei wiederholter Volumenberechnung auftreten, zu Abweichungen darin, welche Flächen man erhält.

7.2 Metriken vom Brill-Lindquist Typ

Die Schwarzschildmetrik kann auf N Schwarze Löcher mit Massen m_i und Positionen $x_i \in \mathbf{R}^3$ verallgemeinert werden, indem man hier den konformen Faktor

$$\psi(x) := 1 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2|x - x_i|}$$

verwendet. Dabei steht $|\cdot|$ für den euklidischen Abstand. Man erhält dadurch eine Metrik auf $\mathbf{R}^3 \setminus \{x_1, \dots, x_N\}$. Der so entstehende Typ von Metriken, heißt *Brill-Lindquist-Typ*.

7.2.1 Zwei Schwarze Löcher gleicher Masse mit gemeinsamer Minimalfläche

In diesem Fall ist $N = 2$, $m_1 = m_2 = 1.3$, $x_1 = (0.5, 0, 0)$ und $x_2 = (-0.5, 0, 0)$. Der Abstand der Singularitäten gegenüber ihren Massen ist hier so klein, daß eine Minimalfläche existiert, die beide Schwarzen Löcher umschließt. Die Abbildungen 13 und 14 zeigen verschiedene Flächen der Blätterung. Dabei ist die innerste Fläche, die in Abbildung 14 zu sehen ist, dieselbe wie die äußerste Fläche in Abbildung 13. Diese Fläche ist die gemeinsame Minimalfläche, die beide Schwarzen Löcher umschließt. Ganz innen sind zwei kleine Flächen zu sehen, die die Minimalflächen um die beiden Singularitäten zeigen. Die Blätterung um diese Minimalflächen zeigt Abbildung 15. Zur Rechnung wurde beim Nach-innen-Rechnen der Strafparameter $\rho = 3$ gewählt, beim Nach-außen-Rechnen $\rho = 1$. Selbst mit verschiedenen Werten von ρ konnte das Verfahren im Falle der Blätterung um die kleine Minimalfläche nie weiter als bis zu den gezeichneten Flächen rechnen und diese erhält man mit $\rho = 3$.

Man sollte jedoch bedenken, daß die Flächen der inneren Blätterung in einer Region liegen, in der die Metrik nicht in der Nähe einer flachen Metrik ist. Daher sind die Annahmen, die bei der Konstruktion der diskreten Funktionale für Fläche und Volumen gemacht wurden nicht erfüllt. Diese Ergebnisse sind also mit Vorsicht zu betrachten.

In Abbildung 12 ist die mittlere quadratische Abweichung des Radius der Flächen in Abbildung 14 zu sehen. Es wurde der entsprechende Wert für jede berechnete Fläche gezeichnet, wohingegen Abbildung 14 nur jede fünfte berechnete Fläche zeigt. Man sieht deutlich, daß die Flächen sich immer mehr einer euklidischen Sphäre annähern, da die mittlere quadratische Abweichung des Radius sehr schnell abfällt.

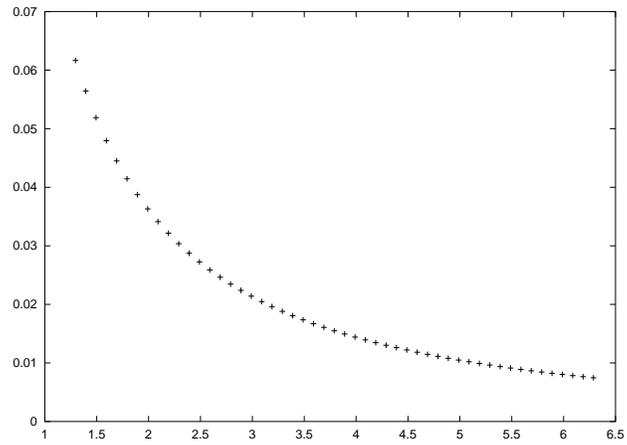


Abbildung 12: Die mittlere quadratische Abweichung des Radius auf Σ_i in Abhängigkeit von \hat{r}_i in einem Raum mit zwei Schwarzen Löchern gleicher Masse auf den äußeren Flächen.

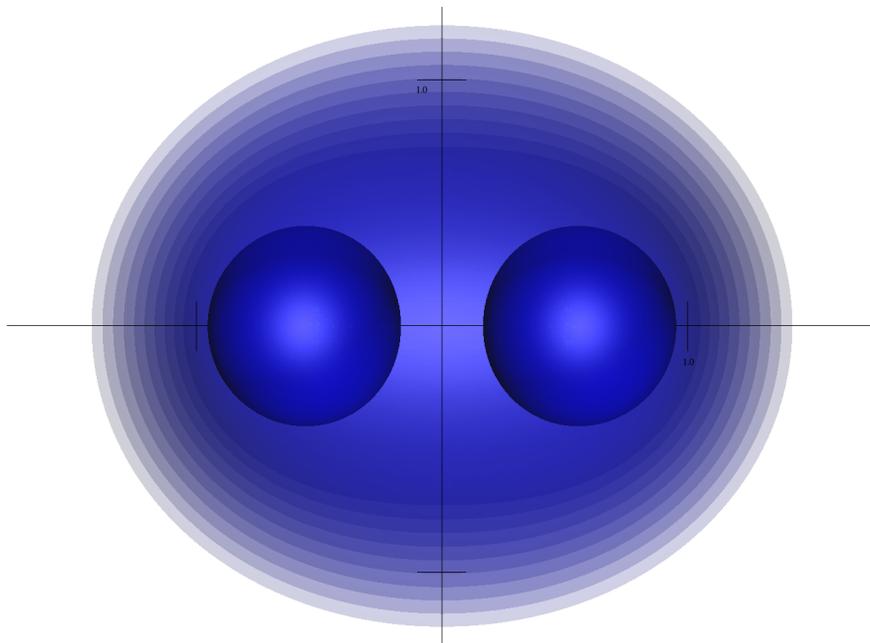


Abbildung 13: Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern gleicher Masse, startend mit der gemeinsamen Minimalfläche, nach innen gerechnet.

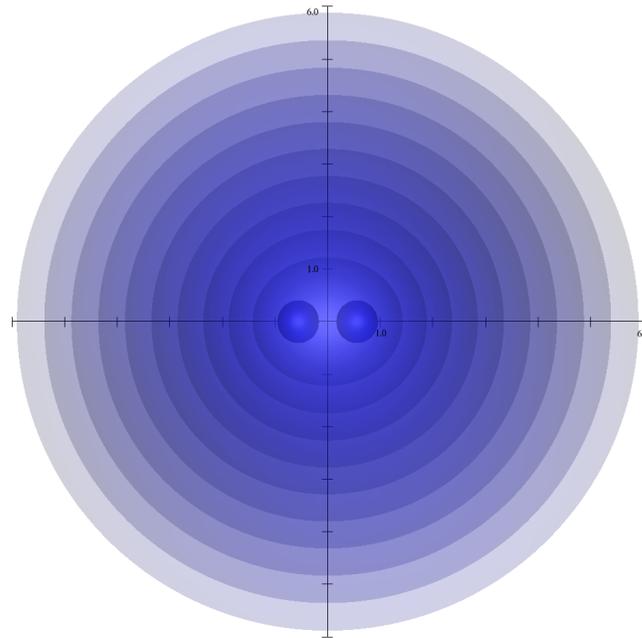


Abbildung 14: Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern gleicher Masse, startend mit der gemeinsamen Minimalfläche, nach außen gerechnet.

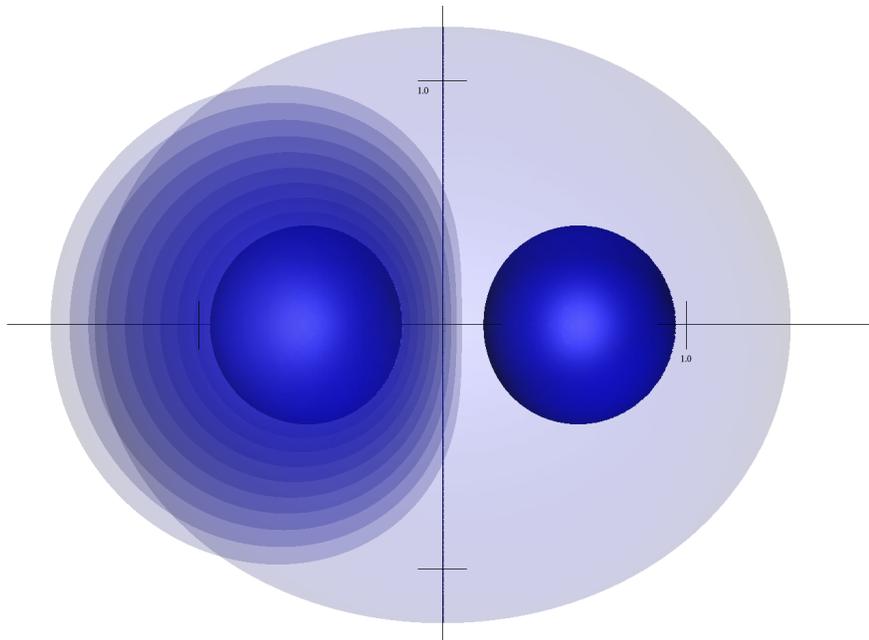


Abbildung 15: Die Flächen konstanter mittlerer Krümmung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern gleicher Masse, startend mit der Minimalfläche um eine Singularität, nach außen gerechnet.

7.2.2 Zwei schwarze Löcher unterschiedlicher Masse mit gemeinsamer Minimalfläche

Hier ist die Metrik wiederum vom Brill-Lindquist-Typ mit zwei Singularitäten, d.h. $N = 2$, an den Stellen $x_1 = (0.5, 0, 0)$, $x_2 = (-0.5, 0, 0)$, wobei allerdings im Unterschied zur vorigen Rechnung $m_1 = 0.8$ und $m_2 = 1.6$ gesetzt wurden.

Die Grafiken in Abbildung 16–20 zeigen verschiedene Flächen konstanter mittlerer Krümmung. In allen Grafiken sind drei Minimalflächen zu sehen, die gemeinsame Minimalfläche der beiden Schwarzen Löcher und für jedes Schwarze Loch die es umschließende Minimalfläche. Diese sind gesondert in Abbildung 16 gezeichnet.

In Abbildung 20 ist die Blätterung vom gemeinsamen Horizont startend nach außen hin gerechnet zu sehen. Von allen berechneten Flächen wurde nur jede fünfte gezeichnet. Der Strafparameter ρ wurde auf 1 gesetzt. Auch hier sieht man gut, daß die Flächen sich immer mehr einer Sphäre annähern.

In Abbildung 17 wurde die Berechnung wiederum von der gemeinsamen Minimalfläche gestartet, aber mit erhöhter Feinheit nach innen gerechnet. Hier ist auch nur jede fünfte der berechneten Flächen zu sehen. An der letzten Fläche stoppte die Berechnung wegen schlechter Kondition des Problems. Hierbei wurde $\rho = 3$ gewählt.

Die Abbildung 18 zeigt Flächen einer anderen Blätterung, die von der Minimalfläche um das leichtere Schwarze Loch gestartet und nach außen gerechnet wurde. Wie in den vorigen Abbildungen wurde auch nur jede fünfte der berechneten Flächen gezeichnet. Die äußerste sichtbare Fläche war die letzte fehlerfrei berechnete Fläche, danach war die Kondition des Problems zu schlecht. Als Strafparameter wurde für diese Rechnung $\rho = 3$ verwendet.

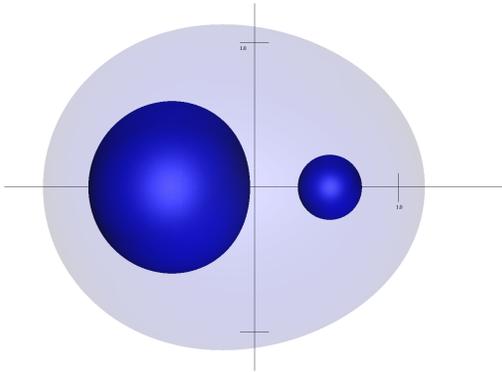


Abbildung 16: Die Minimalflächen in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern unterschiedlicher Masse.

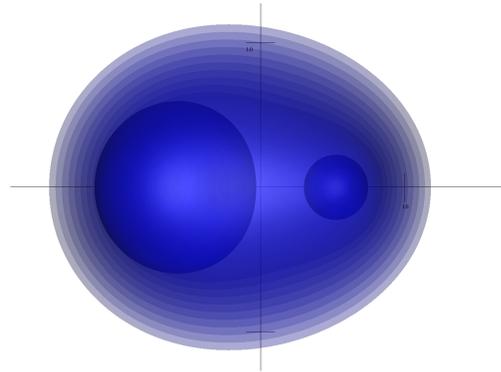


Abbildung 17: Die Blätterung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern unterschiedlicher Masse, startend mit der Minimalfläche, nach innen gerechnet.

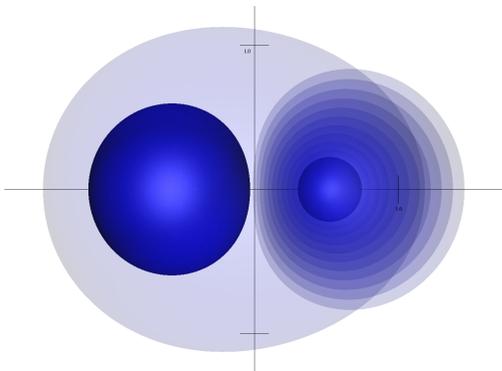


Abbildung 18: Die Blätterung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern unterschiedlicher Masse, startend mit der Minimalfläche um das leichtere schwarze Loch, nach außen gerechnet.

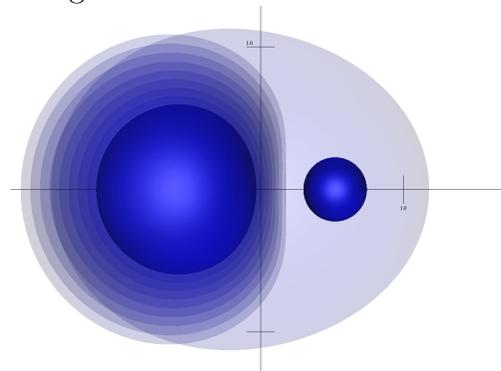


Abbildung 19: Die Blätterung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern unterschiedlicher Masse, startend mit der Minimalfläche um das schwerere schwarze Loch, nach außen gerechnet.

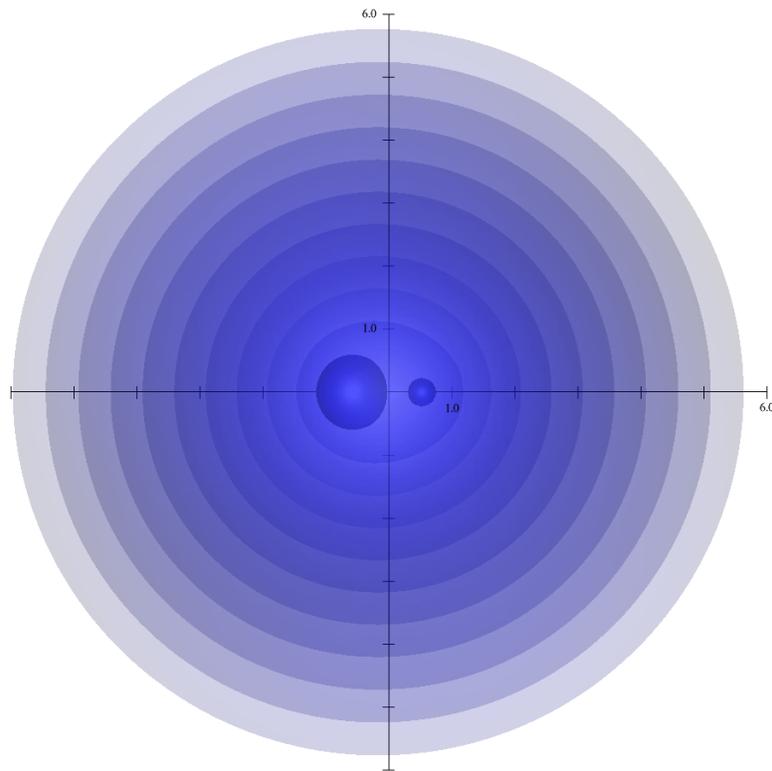


Abbildung 20: Die Blätterung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern unterschiedlicher Masse, startend mit der Minimalfläche, nach außen gerechnet.

7.2.3 Zwei schwarze Löcher gleicher Masse ohne gemeinsame Minimalfläche

Auch hier wird eine Metrik vom Brill-Lindquist-Typ verwendet, wobei $N = 2$, $x_1 = (d, 0, 0)$, $x_2 = (-d, 0, 0)$ und $m_1 = m_2 = 1$. Als Startfläche wurde eine Kugel um 0 mit Radius $2d$ gewählt, was angesichts der Bilder aus den vorigen Abschnitten, die die äußere Blätterung zeigen, eine gute Anfangsfläche zu sein scheint. Ausgehend von dieser Fläche wurde eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung berechnet, die dasselbe Volumen einschließt wie die Startfläche. Danach wurde von dieser Fläche aus nach innen gerechnet. Das resultierende Bild für $d = 3.0$ ist in Abbildung 21 zu sehen. Hier ist nur jede zehnte der berechneten Flächen gezeichnet. Die Blätterung um eines der Schwarzen Löcher beginnend mit der entsprechenden Minimalfläche zeigt Abbildung 22, wiederum ist nur jede zehnte der berechneten Flächen zu sehen. Die beiden kleinsten Flächen, die zueinander symmetrisch sind, bilden die Minimalflächen um die Singularitäten.

Auch hier läßt sich das erwartete Verhalten der Flächen, immer sphärischer zu werden, anhand der mittleren quadratischen Abweichung beobachten, wie Abbildung 23 zeigt. In dieser Grafik ist wiederum die mittlere quadratische Abweichung gegen den numerisch ermittelten Radius aufgetragen.

Die Hawking Masse der Blätterung um beide Singularitäten sollte für große Radien etwa 2 sein, was der Gesamtmasse des Systems entspricht. In der Tat zeigt die Hawking-Masse, berechnet auf den äußeren Flächen, die Tendenz, mit größer werdendem Radius näher an 2 zu liegen, sie war immer kleiner als 2. Die beobachtete Abweichung ist jedoch wesentlich größer als die zu erwartende Genauigkeit, sie ist etwa von der Ordnung r^{-4} , wie numerisch ermittelt wurde. Abbildung 24 zeigt die Abweichung für die Werte von $d = 1, 2, 3, 4, 5$.

Als Hawking Masse der Blätterung um eine Singularität erwartet man den Wert $1 + \frac{1}{4d}$, was aus zwei verschiedenen Überlegungen folgt. Zum einen ist für große d und kleine m_1, m_2 die Minimalfläche um eine Singularität nahezu eine euklidische Kugel. Nun soll deren Radius und Oberfläche näherungsweise berechnet werden. Für eine euklidische Kugel $B_r(x_1)$ um x_1 mit Radius r gilt

$$|B_r(x_1)| = \int_{B_r(x_1)} \left(1 + \frac{m_1}{2|x - x_1|} + \frac{m_2}{2|x - x_2|}\right)^4 dx.$$

Für großes d und kleines r ist $\frac{m_2}{2|x - x_2|} \approx \frac{m_2}{4d}$, also

$$|B_r(x_1)| \approx 4\pi \left(1 + \frac{m_1}{2r} + \frac{m_2}{4d}\right)^4 r^2. \quad (7.3)$$

Dies ist minimal für

$$r = \frac{m_1}{2} \left(1 + \frac{m_2}{4d}\right)^{-1}.$$

Setzt man dies in (7.3) ein, erhält man

$$|B_r(x_1)| \approx 16m_1^2 \left(1 + \frac{m_2}{4d}\right)^2.$$

Setzt man dies wiederum mit $H = 0$ in (7.2) ein, ergibt sich

$$m_H(B_r(x_1)) \approx \sqrt{\frac{|B_r(x_1)|}{16\pi}} = m_1 \left(1 + \frac{m_2}{4d}\right) = m_1 + \frac{m_1 m_2}{4d},$$

so daß man mit $m_1 = m_2 = 1$ gerade den oben behaupteten Wert erhält.

Die zweite Überlegung ist, daß die Differenz der Hawkingmasse im Unendlichen und der Summe der Hawkingmassen der Flächen um die Singularitäten, der Gesamtenergie des gravitierenden Systems entspricht. Diese ist, nach Newton, für Massen m_1, m_2 im Abstand $2d$ gerade durch $\frac{m_1 m_2}{2d}$ gegeben.

Berechnet man nun die Differenz der Hawking-Massen im Unendlichen m_H^∞ und um jede Singularität m_H^1 bzw. m_H^2 so ergibt sich in der Tat

$$m_H^1 + m_H^2 - m_H^\infty = m_1 + \frac{m_1 m_2}{4d} + m_2 + \frac{m_1 m_2}{4d} - (m_1 + m_2) = \frac{m_1 m_2}{2d},$$

also genau die Newtonsch Gravitationsenergie.

Die numerisch berechnete Hawking-Masse auf den Flächen der Blätterung, die eine Singularität einschließt, ist nahezu konstant. Sie ist größer als die Masse $m_1 = 1$ des Schwarzen Lochs, und beträgt, wie erwartet, etwa $1 + \frac{1}{4d}$. Die Abweichung hiervon ist für verschiedene Werte von d in Abbildung 25 in Abhängigkeit vom Radius aufgetragen.

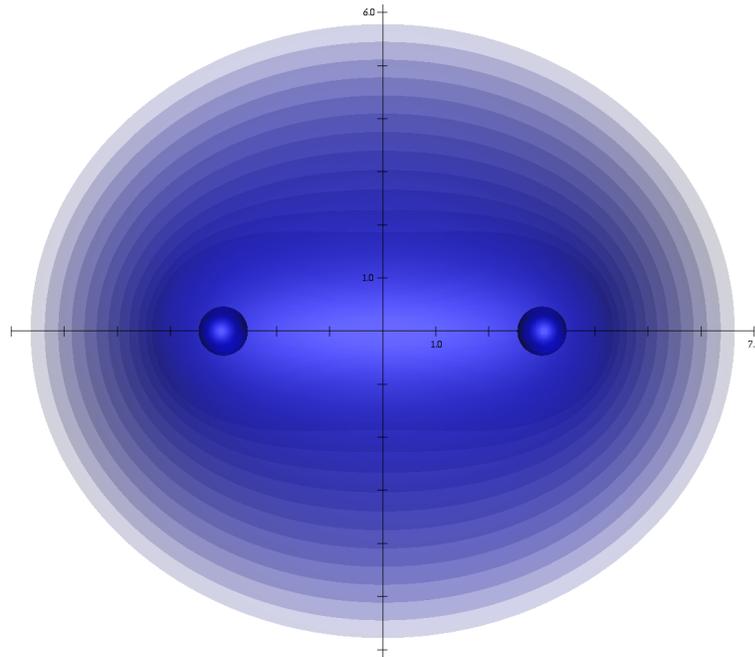


Abbildung 21: Die Blätterung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern gleicher Masse mit Abstand 6, von außen nach innen gerechnet.

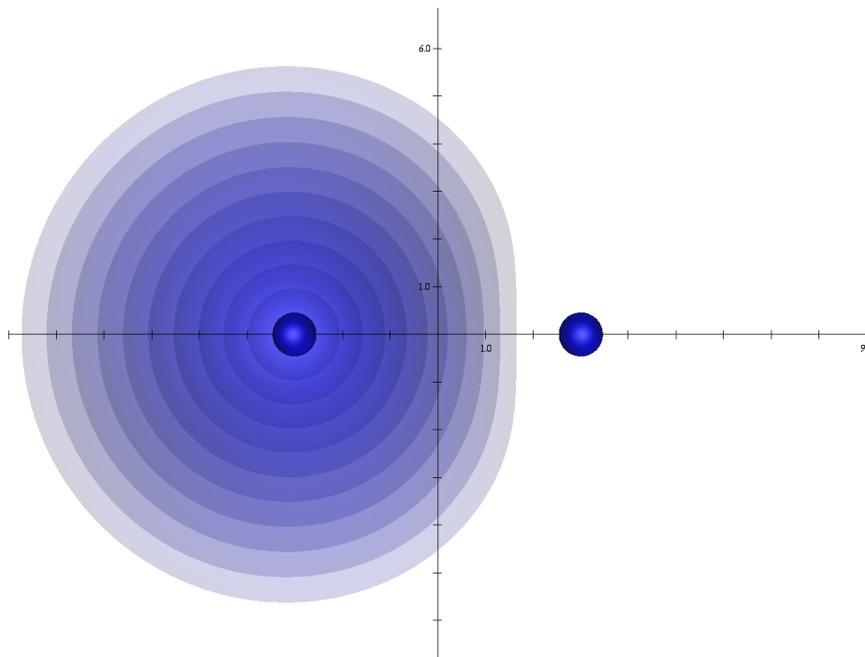


Abbildung 22: Die Blätterung in einem Raum mit zwei schwarzen Löchern gleicher Masse mit Abstand 6, um eine Singularität, beginnend mit der Minimalfläche, nach außen gerechnet.

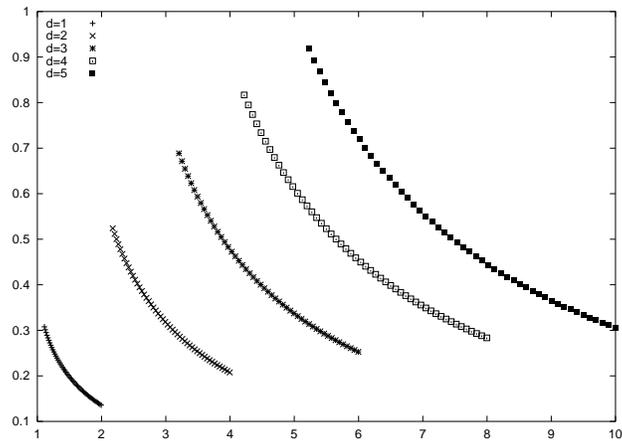


Abbildung 23: Die mittlere quadratische Abweichung des Radius einzelner Flächen gegen den Radius abgetragen, für unterschiedlicher Abstände.

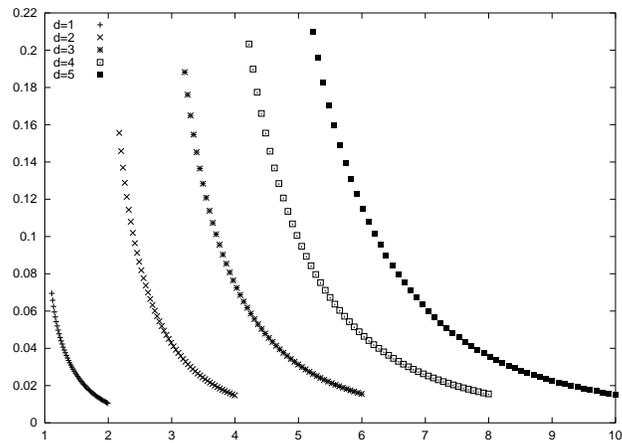


Abbildung 24: Die Abweichung der Hawkingmasse der äußeren Flächen vom erwarteten Wert 2, für unterschiedliche Werte von d

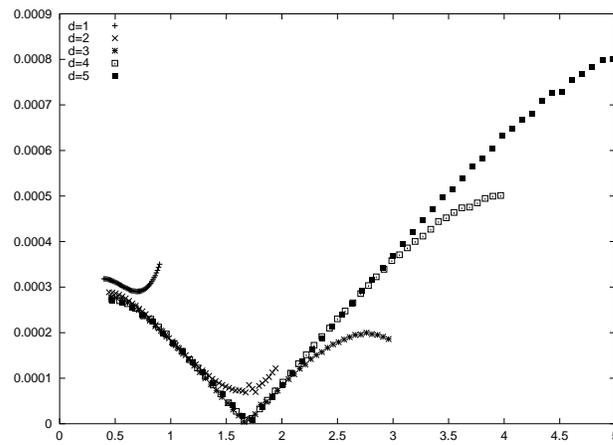


Abbildung 25: Die Abweichung der Hawkingmasse der inneren Flächen vom erwarteten Wert $1 + \frac{1}{4d}$, für unterschiedliche Werte von d .

7.2.4 Zur Korrektheit des Minimalflächenfinders

Benutzt man das CG-Verfahren ohne Nebenbedingung, d.h. minimiert man den Flächeninhalt für sich, so erhält man nach erfolgreicher Terminierung eine (numerische) Minimalfläche.

Diese Minimalflächen sind in der numerischen Relativitätstheorie interessant, da sie in einem Spezialfall einen scheinbaren Horizont bilden.

Deshalb beschreibt [ABB⁺00] auch einen Test für Verfahren, die Minimalflächen berechnen.

In einem dieser Tests wird eine Metrik vom Brill-Lindquist-Typ mit drei schwarzen Löchern der Masse $m = 1$ benutzt, deren Singularitäten an den Stellen $(d, 0, 0)$, $(0, d, 0)$ und $(0, 0, d)$ liegen.

Nun kann man die Frage stellen, für welche $d > 0$ ein gemeinsamer Horizont existiert, bzw. wo die kritische Stelle \bar{d} liegt, so daß für $d < \bar{d}$ noch ein gemeinsamer Horizont existiert, und für $d > \bar{d}$ nicht mehr. In [ABB⁺00] wurde durch numerische Experimente $\bar{d} \in [1.4, 1.5]$ bestimmt. Dieses Intervall kann durch das hier verwendete Verfahren bestätigt werden. Durch Bisektion dieses Intervalls kann man mit dem hier benutzten Verfahren $\bar{d} \in [1.45, 1.475]$ annehmen. Dieses Ergebnis wurde mit Verfeinerungsstufe 7, d.h. 65538 Punkten berechnet. Trotz aller Vorsicht bei der Berechnung ist die Unsicherheit des kleineren Intervalls jedoch recht groß, insbesondere die obere Grenze ist recht unsicher, da ein schwach ausgeprägtes lokales Minimum leicht verfehlt werden kann.

Die Abbildungen 26 bis 29 zeigen die letzten Iterierten des Verfahrens für verschiedene Werte von d . Dabei wurde in allen Fällen eine Sphäre mit Radius 2 um $(0.5, 0.5, 0.5)$ als Ausgangsfläche verwendet. In allen Abbildungen sind die Achsen in der Länge von zwei Einheiten gezeichnet, die Positionen der Singularitäten sind durch Kugeln um die entsprechenden Punkte angedeutet.

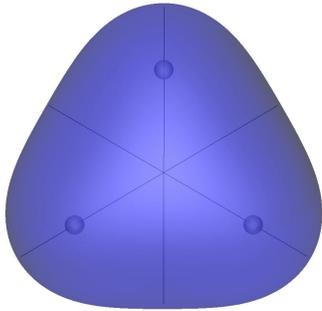


Abbildung 26: Die gemeinsame Minimalfläche im Fall $d = 1.3$

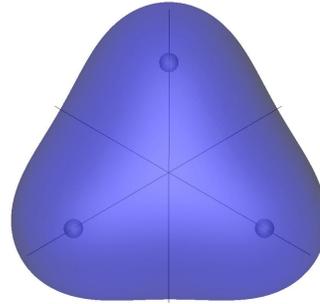


Abbildung 27: Die gemeinsame Minimalfläche im Fall $d = 1.4$

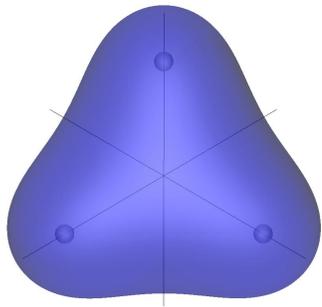


Abbildung 28: Die gemeinsame Minimalfläche im Fall $d = 1.45$

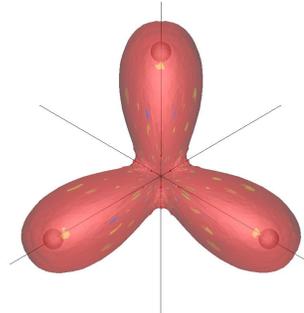


Abbildung 29: Die letzte Iterierte des Verfahrens im Fall $d = 1.475$ nach Abbruch mit Fehler

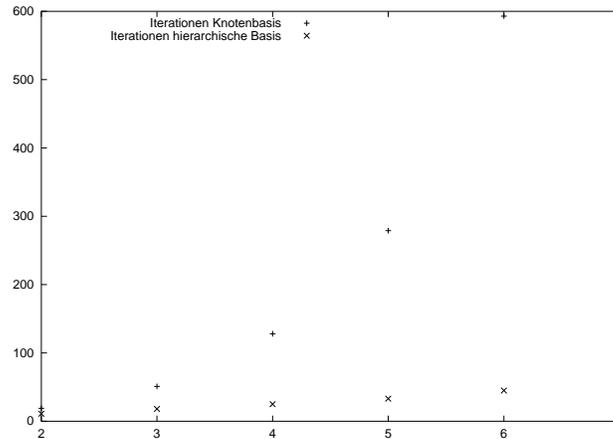


Abbildung 30: Anzahl der Iterationen für hierarchische Basis und Knotenbasis in Abhängigkeit der Verfeinerungsstufe bei nichtrestringierter Minimierung.

7.3 Performance

Um die Performance des Verfahrens zu testen, und diese mit einer Implementierung zu vergleichen, die die hierarchische Basis nicht verwendet, wurde der Fall $d = 1.3$ aus vorigem Abschnitt 7.2.4 betrachtet. Zunächst wurde eine Minimierung ohne Nebenbedingungen für das Flächenfunktional durchgeführt. Diese wurde abgebrochen, wenn die Norm des Gradienten des Flächenfunktionals sich gegenüber seinem Anfangswert um 10^{-3} reduziert hatte. Die benutzte Norm war dabei die L^2 -Norm des Gradienten, dargestellt in der Knotenbasis. Dabei wurden bei jeder Liniensuche genau 39 Schritte gemacht, was einer relativen Genauigkeit von 10^{-8} entspricht.

Abbildung 30 zeigt die Anzahl der Iterationen des Verfahrens bis zum Abbruch für verschiedene Verfeinerungsstufen. Man sieht sehr gut, daß die Zahl der Iterationen für die hierarchische Basis mit der Zahl der Verfeinerungsschritte etwa linear wächst, die Zahl der Iterationen für die Knotenbasis jedoch viel schneller.

Die Zeit, die die Verfahren benötigen, ist in Abbildung 31 zu sehen, wobei die y-Achse logarithmisch skaliert ist. Man sieht deutlich, daß die Komplexität für das Verfahren mit hierarchischer Basis wesentlich besser ist. Die Zeit wurde dabei mit dem Unix-Befehl `time` auf einem Athlon XP 2000+ ermittelt.

Nun wurde ein entsprechendes Experiment mit Nebenbedingungen gemacht. Es wurde wiederum die Metrik aus 7.2.4 mit $d = 1.3$ betrachtet. Dann wurde ausgehend von der Späre um $(0.5, 0.5, 0.5)$ mit Radius 3 eine Fläche gesucht, die das gleiche Volumen einschließt wie diese Fläche. Dabei wurde der Strafparameter $\rho = 0.1$ und der Lagrangeparameter auf 0.0960304 gesetzt, was nahe dem exak-

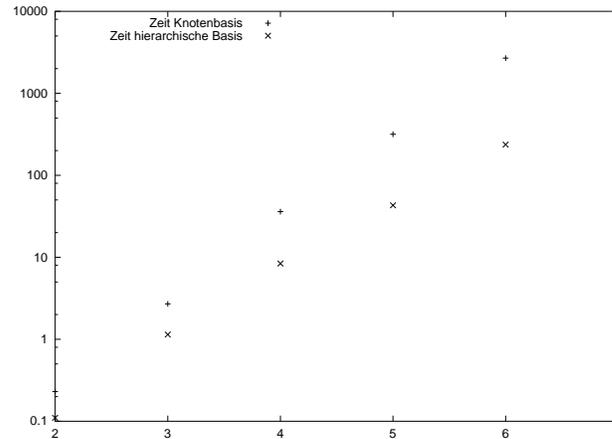


Abbildung 31: Zeit in Sekunden für hierarchische Basis und Knotenbasis in Abhängigkeit der Verfeinerungsstufe bei nichtrestringierter Minimierung.

ten Lagrange-Parameter liegt. Dann wurde die modifizierte Lagrange-Funktion zu diesen Daten einmal minimiert, und zwar so lange, bis der Gradient, gemessen in der L^2 -Norm bezüglich der Knotenbasis, um den Faktor 10^{-3} gegenüber seinem Startwert reduziert war. Dann wurden wieder die benötigte Zeit und die Anzahl der Iterationen für verschiedene Verfeinerungsstufen festgehalten. Diese sind in Abbildung 32 bzw. 33 aufgetragen. Man sieht hier, daß die hierarchische Basis wiederum einen Vorteil gegenüber der Knotenbasis hat, wenn dieser auch nicht so deutlich ausfällt wie beim vorigen Experiment ohne Nebenbedingungen. Wie oben wurde die Zeit mit dem Unix-Befehl `time` auf einem Athlon XP 2000+ ermittelt.

Um die Abhängigkeit der Kondition des Problems vom gewählten Strafparameter zu verdeutlichen, wurden beim vorigen Experiment bei Verfeinerungsstufe 4 verschiedene Werte des Strafparameters getestet. Dabei wurde das Verfahren abgebrochen, wenn sich der Gradient um den Faktor 10^{-3} gegenüber seinem Anfangswert reduziert hatte. Die bis dahin benötigten Iterationen sind zusammen mit der absoluten Abweichung des Volumens in Tabelle 3 gezeigt. Man sieht deutlich, daß sich bei wachsendem Strafparameter die Kondition des Problems verschlechtert, andererseits aber die absolute Abweichung vom geforderten Volumen abnimmt.

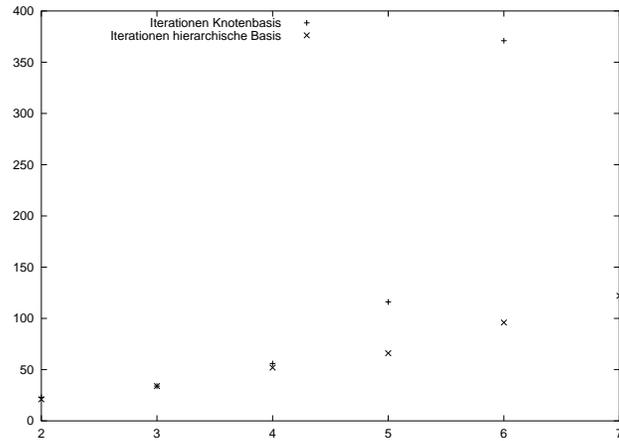


Abbildung 32: Anzahl der Iterationen für hierarchische Basis und Knotenbasis in Abhängigkeit der Verfeinerungsstufe bei Minimierung mit Nebenbedingungen.

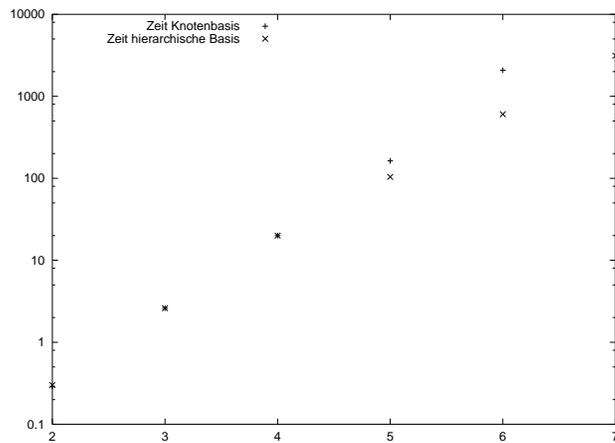


Abbildung 33: Zeit in Sekunden für hierarchische Basis und Knotenbasis in Abhängigkeit der Verfeinerungsstufe bei Minimierung mit Nebenbedingungen.

ρ	0.0001	0.001	0.01	0.1	1	10
Anzahl Iterationen	15	20	28	37	51	86
Abweichung des Volumens	20.16	2.472	0.2529	0.0253	0.0025	0.00025

Tabelle 3: Benötigte Iterationen und Abweichung des Volumens in Abhängigkeit vom Strafparameter.

Literatur

- [ABB⁺00] M. Alcubierre, S. Brandt, B. Brügmann, C. Gundlach, J. Massó, E. Seidel, and P. Walker. Test-beds and applications for apparent horizon finders in numerical relativity. *Classical Quantum Gravity*, 17:2159–2190, 2000.
- [ADM61] R. Arnowitt, S. Desner, and C. Misner. Coordinate invariance and energy expressions in general relativity. *Phys. Rev.*, 122:997–1006, 1961.
- [BdC84] J. L. Barbosa and M. do Carmo. Stability of hypersurfaces with constant mean curvature. *Math. Z.*, 185:339–353, 1984.
- [BDY88] R. E. Bank, T. Dupont, and H. Yserentant. The hierarchical bases multigrid method. *Numer. Math.*, 52:427–458, 1988.
- [DH99a] G. Dziuk and J. E. Hutchinson. The discrete plateau problem: algorithm and numerics. *Math. Comp.*, 68:1–23, 1999.
- [DH99b] G. Dziuk and J. E. Hutchinson. The discrete plateau problem: convergence results. *Math. Comp.*, 68:519–546, 1999.
- [Dzi91] G. Dziuk. An algorithm for evolutionary surfaces. *Numer. Math.*, 58:603–611, 1991.
- [Fab09] G. Faber. Über stetige Funktionen. *Mathematische Annalen*, 66:81–91, 1909.
- [Fle80] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization, Vol. 1*. John Wiley & Sons, Chicester, New York, Brisbane, Toronto, 1980.
- [Fle81] R. Fletcher. *Practical Methods of Optimization, Vol. 2*. John Wiley & Sons, Chicester, New York, Brisbane, Toronto, 1981.
- [Fli90] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.
- [FR64] T. Fletcher and C.M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *Computer Journal*, 7:149–154, 1964.
- [Fra97] T. Frankel. *The Geometry of Physics*. Cambridge University Press, 1997.
- [Ham97] R. S. Hamilton. Four-manifolds with positive isotropic curvature. *Communications in Analysis and Geometry*, 5(1):1–92, 1997.

- [Hes69] M. R. Hestens. Multiplier and gradient methods. *J. Opt. Th. Applics.*, 4:303–320, 1969.
- [HY96] G. Huisken and S.-T. Yau. Definition of center of mass for isolated physical systems and unique foilations by stable spheres with constant mean curvature. *Invent. Math.*, 124:281–311, 1996.
- [Jos98] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Barcelona, Budapest, Hong Kong, London, Milan, Paris, Santa Clara, Singapore, Tokyo., second edition, 1998.
- [Lei90] P. Leinen. *Ein schneller adaptiver Löser für elliptische Randwertaufgaben auf Seriell- und Parallelrechnern*. Dissertation, Universität Dortmund, 1990.
- [Lei95] P. Leinen. Data structures and concepts for adaptive finite element methods. *Computing*, 55:325–354, 1995.
- [P⁺00] M. Phillips et al. *Geomview Manual*. The Geometry Center, 2000.
- [Pas94] E. Pasch. *Numerische Verfahren zur Berechnung von Krümmungsflüssen*. Dissertation, Universität Tübingen, 1994.
- [Pow69] M. J. D. Powell. A method for nonlinear constraints in minimization problems. In R. Fletcher, editor, *Optimization*, pages 283–298. Academic Press, London and New York, 1969.
- [Pow77] M. J. D. Powell. Restart procedures for the conjugate gradient method. *Mathematical Programming*, pages 241–254, 1977.
- [PR69] E. Polak and G. Ribière. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. *Rev. Fr. Inf. Rech. Oper.*, 16:35–43, 1969.
- [PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, second edition, 1992.
- [Sch99] F. Schulze. Regularitätsergebnisse für minimale und fast minimale Flächen. Diplomarbeit, Universität Tübingen, 1999.
- [Str98] B. Stroustrup. *Die C++-Programmiersprache*. Addison Wesley Longman Verlag GmbH, 3 edition, 1998.
- [SY79] R. Schoen and S.-T. Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65:45–76, 1979.
- [Wer92] J. Werner. *Numerische Mathematik 2*. Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.

- [Yse86] H. Yserentant. On the multilevel splitting of finite element spaces. *Numer. Math.*, 49:379–412, 1986.
- [Yse92] H. Yserentant. Hierarchical bases. In R. E. O’Malley, editor, *ICIAM 91*. SIAM, 1992.