Universität Tübingen, FB Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2024
Paul Weiß

Probeklausur zur Vorlesung Mathematik für Informatik 2

Name *Matrikelnummer* *Summe der Punkte*

Klausurtermin: xxx

Hinweise: Die Klausuraufgaben sind jeweils auf getrennten Blättern zu bearbeiten. *Nie zwei Aufgaben auf dem gleichen Blatt lösen!!!*
Alle nicht offensichtlichen Beweis-/Rechenschritte sind zu begründen.
Die Zahlen in Klammern am rechten Seitenrand geben die Punktzahlen an, die durch Lösen der jeweiligen Aufgabe erreichbar sind. Insgesamt sind es 60 Punkte.
Jedes Blatt ist am oberen Rand der Vorderseite wie folgt zu beschriften:

eigener Name *Matrikelnummer* *Aufgabennummer*

Aufgabe 1: Betrachte die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_6$$ (4)

Berechne die Permutationen $\pi \circ \sigma$ und σ^{-1} und berechne für π eine Zerlegung in disjunkte Zykel und das Signum.

Aufgabe 2:

a. Berechne die Determinante der folgenden Matrix im Körper $\mathbb{F}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$: (4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_4(\mathbb{F}_5).$$

b. Überprüfe, ob die folgende symmetrische Matrix $A \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R})$ positiv definit ist: (4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 3: Zeige, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \qquad (4)$$

invertierbar ist und berechne die Inverse.

Aufgabe 4: Bestimme den Lösungsraum des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ durch die Berechnung einer speziellen Lösung und einer Basis des Lösungsraums des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems mit Hilfe des Algorithmus' aus der Vorlesung: (6)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} w & + & x & - & y & + & z & = & 4, \\ & & 2x & - & 6y & + & 2z & = & -2, \\ -w & & & - & 2y & + & z & = & -6. \end{array}$$

Aufgabe 5:

a. Berechne eine Basis des folgenden Unterraums von $\mathbb{R}^4$: (4)

$$U = \mathrm{Lin}\big((1,2,1,0)^t, (2,1,3,1)^t, (1,-1,2,1)^t, (3,0,5,2)^t\big).$$

b. Es sei V ein K-Vektorraum der Dimension $\dim_K(V) = 7$ und U und U' seien Unterräume von V der Dimension $\dim_K(U) = 4$ und $\dim_K(U') = 5$. Bestimme alle Werte, welche $\dim_K(U \cap U')$ annehmen kann. (4)

Aufgabe 6: Berechne die Matrixdarstellung $M^B_D(f)$ der linearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y,z)^t \mapsto (2x+2y-2z, 2x-4y) \qquad (6)$$

bezüglich der Basen $B = \big((1,-1,0)^t, (2,0,1)^t, (1,0,1)^t\big)$ von $\mathbb{R}^3$ und $D = \big((1,1)^t, (1,-1)^t\big)$ von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 7: Zeige, daß die folgende Matrix diagonalisierbar ist und bestimme eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_3(\mathbb{R})$, so daß $T^{-1} \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix ist und gib die zugehörige Diagonalmatrix an: (8)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 8: Es seien V und W zwei K-Vektorräume und $x \in V$ ein Vektor. Überprüfe, ob die Menge (4)

$$U = \{f \in \mathrm{Hom}_K(V, W) \mid f(x) = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist.

Aufgabe 9:

a. Zeige, die Menge (4)

$$U = \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Z}, b \text{ ist ungerade} \right\}$$

ist eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$.

b. Zeige, es gibt nur einen Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}_4, +)$ nach $(\mathbb{Z}_9, +)$. (4)

Aufgabe 10: Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung mit $f^2 = -f$. Zeige, $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$. (4)