Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 19.07.2024, 10:00

Aufgabe 34: Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$U := \{(v, w, x, y, z)^t \in \mathbb{R}^5 \mid v + w + x + y + z = 0\}$$

bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^5$.

(b) Ist V ein euklidischer Raum, U ein Unterraum mit Orthonormalbasis $(x_1, \ldots, x_r)$ und $\pi_U : V \longrightarrow V$ die orthogonale Projektion auf U (siehe Bem. 36.29).

Zeige, dann gilt für alle $x \in V$

$$\pi_U(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x_i, x\rangle \cdot x_i.$$

(c) Berechne die orthogonale Projektion des Vektors $x = (1, 2, 3, 4, 5)^t$ auf den Unterraum U aus Teil (a).

Aufgabe 35: Bearbeite **eine** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Berechne eine orthogonale Matrix $A \in O(4)$, die den Vektor $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^t$ als erste Spalte enthält.

(b) Bestimme für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$$

eine orthogonale Matrix T, so dass $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Beweise für einen beliebigen euklidischen Raum die Parallelogrammgleichung:

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2 \cdot \left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Was sagt die Gleichung geometrisch für ein Parallelogramm aus?

Hinweis: Teil (b) verwendet Themen, die erst in der nächsten Vorlesungswoche behandelt werden (siehe Beispiel 37.11); die Bearbeitung ist freiwillig.

Präsenzaufgabe 16:

(a) Überprüfe, ob die folgenden symmetrischen bzw. hermiteschen Matrizen positiv definit, negativ definit oder indefinit sind:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1+i \\ 0 & 1-i & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Für welche der reellen Matrizen $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ im Teil (a) wird durch

$$\langle x, y \rangle = x^t \circ M \circ y$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ definiert?

(c) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als euklidischen Raum bezüglich des Standardskalarproduktes. Gegeben seien die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y)^t \mapsto (x + 2y, 3x - y)^t$$

sowie die Basis

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, -1)^t \right).$$

Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(f^*)$ der adjungierten Abbildung f^* bezüglich der Basis B.

Präsenzaufgabe 17:

(a) Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer Raum. Zeige, ist $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ mit $f^* \circ f = f \circ f^*$, so gelten

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^*)$$

und

$$V = \mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f).$$

(b) Berechne eine Singulärwertzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ -11 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R}).$$