Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 12.07.2024, 10:00

Aufgabe 28: Bearbeite **eine** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Berechne für die folgenden Matrizen das charakteristische Polynom, bestimme die Eigenwerte und entscheide, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

(b) Berechne für die folgenden Matrizen das charakteristische Polynom, bestimme die Eigenwerte und entscheide, ob die Matrizen diagonalisierbar sind:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(c) Zeige, $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$, wenn λ ein Eigenwert von A^t ist.

Aufgabe 29: Gegeben sei die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 9 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A.

(b) Bestimme Basen der Eigenräume von A.

(c) Zeige, dass A diagonalisierbar ist und bestimme eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{Gl}_4(\mathbb{R})$, so dass $T^{-1} \circ A \circ T$ in Diagonalgestalt ist.

Aufgabe 30: Es sei $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$. Ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$$

gegeben und wir betrachten den Endomorphismus

$$T_A : V \longrightarrow V \; : \; X \mapsto A \circ X.$$

Bearbeite **drei** der sechs Teilaufgaben.

(a) Berechne $\det(T_A)$ und vergleiche den Wert mit $\det(A)$.

(b) Berechne $\mathrm{Spur}(T_A)$ und vergleiche den Wert mit $\mathrm{Spur}(A)$.

(c) Berechne χ_{T_A} und vergleiche das Polynom mit χ_A.

(d) Bestimme die Eigenwerte von T_A.

(e) Bestimme für jeden Eigenwert mindestens einen Eigenvektor.

(f) Bestimme die Eigenräume von T_A. Ist T_A diagonalisierbar?

Hinweis, man berechne zunächst die Matrixdarstellung $M_B^B(T_A)$ für die Basis $B = (E_1^1, E_2^1, E_1^2, E_2^2)$ von V. Beachte dabei die Reihenfolge der Basisvektoren.

Präsenzaufgabe 14:

(a) Zeige, dass durch

$$\langle (x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t \rangle = 2x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$$

für $(x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t \in \mathbb{R}^2$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert wird.

(b) Bestimme eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}$-Vektorraums

$$U = \{(x, y, z)^t \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + 2z = 0\}$$

bezüglich des Standardskalarproduktes auf $\mathbb{R}^3$.