Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 05.07.2024, 10:00

Aufgabe 28: Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{F}_5) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(a) Berechne die Determinante von A mit Hilfe des Gauß-Algorithmus.

(b) Berechne die Determinante von B mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes.

Aufgabe 29: Betrachte das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

Bearbeite **drei** der sechs Teilaufgaben.

(a) Berechne die Determinante der Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems.

(b) Zeige, dass das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

(c) Bestimme die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe des Gauß-Algorithmus'.

(d) Bestimme die Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel.

(e) Berechne A^{-1} mit Hilfe des Gauß-Algorithmus' und leite daraus die Lösung des Gleichungssystems her.

(f) Berechne A^{-1} mit Hilfe der Adjunkten und leite daraus die Lösung her.

Aufgabe 30: Es sei K ein Körper und $\lambda \in K$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definieren wir

$$A_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \lambda & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$$

und $d_{\lambda,n} = \det(A_{\lambda,n})$. Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Beweise die folgende Rekursionsformel für $d_{\lambda,n}$ für $n \geq 3$:

$$d_{\lambda,n} = \lambda \cdot d_{\lambda,n-1} - d_{\lambda,n-2}.$$

(b) Zeige mittels Induktion nach n, daß $d_{1,3\cdot n+2} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Präsenzaufgabe 14: Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und überprüfe A auf Diagonalisierbarkeit.