Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2024, Blatt 10
Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 28.06.2024, 10:00

Aufgabe 25: Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x, y, z)^t \mapsto (x - y + z, 2x + y)^t$$

sowie die Basen $B = ((1,1,1)^t, (1,1,0)^t, (1,0,-1)^t)$ von $\mathbb{R}^3$ und $D = ((2,1)^t, (1,1)^t)$ von $\mathbb{R}^2$. Ferner bezeichnen E und F die kanonischen Basen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.
Bearbeite **drei** der folgenden fünf Teilaufgaben.

(a) Zeige, dass B und D jeweils Basen sind.

(b) Bestimmte $M_F^E(f)$.

(c) Bestimme $M_D^B(f)$ sowie die Transformationsmatrizen T_E^B und T_D^F mit

$$T_D^F \cdot M_F^E(f) \cdot T_E^B = M_D^B(f).$$

(d) Überprüfe, ob die Abbildung surjektiv ist.

(e) Bestimme den Kern von f.

Aufgabe 26: Es seien $U = \text{Lin}\big((1,1,0)^t, (1,0,2)^t\big)$ und $U' = \text{Lin}\big((2,1,2)^t, (1,1,1)^t\big)$ zwei Unterräume des $\mathbb{R}^3$ und ferner sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & -3 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Bestimme Gleichungen für die Unterräume U und U'.

(b) Berechne eine Basis von $U \cap U'$.

(c) Zeige, daß $\text{Ker}(f_A) = U \cap U'$ gilt.

Aufgabe 27: Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Bestimme die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = 0 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = 1 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 5x_5 & = 2 \end{array}$$

(b) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

(c) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ mit ungeradem $n \in \mathbb{N}$ und $A^t = -A$. Zeige, A ist nicht invertierbar. Bleibt die Aussage wahr, wenn wir $\mathbb{R}$ durch einen beliebigen anderen Körper ersetzen?

Präsenzaufgabe 13: Berechne die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus für $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{F}_5$ und $K = \mathbb{F}_3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist A invertierbar? Falls ja, berechne die Inverse von A.