Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2024, Blatt 9
Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 21.06.2024, 10:00

Aufgabe 22: Bearbeite **eine** der folgenden zwei Teilaufgaben:

(a) Überführe die folgende Matrix in reduzierte Zeilen-Stufen-Form und berechne ihren Rang:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(5 \times 6, \mathbb{Q}).$$

(b) Bestimme eine Basis des Vektorraums

$$\mathrm{Lin}\left((1,1,2,0,1)^t, (2,-1,3,1,0)^t, (0,-3,-3,1,-2)^t, (1,2,-1,3,0)^t, (1,-1,-4,4,-2)^t\right) \leq \mathbb{R}^5.$$

Aufgabe 23: Bearbeite **zwei** der folgenden drei Teilaufgaben:

(a) Berechne die Inverse der folgenden Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(b) Transformiere die folgende Matrix B in Normalform bezüglich Äquivalenz und gib auch die Transformationsmatrizen S und T an:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{F}_3).$$

Bestimme insbesondere den Rang der Matrix. Beachte: Grundkörper ist $\mathbb{F}_3$!

(c) Berechne den Rang der folgenden Matrix C in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R})$$

Aufgabe 24: Bearbeite **eine** der folgenden drei Teilaufgaben:

(a) Sei $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$, $E = (E_1^1, E_1^2, E_2^1, E_2^2)$ die kanonische Basis von V und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$f : V \longrightarrow V \quad \text{mit} \quad f(X) = A \circ X$$

$\mathbb{R}$-linear ist und berechne die Matrixdarstellung $M_E^E(f)$.

(b) Zeige, sind $A \in \mathrm{Mat}(n \times p, K)$ und $B \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$, dann gilt

$$\mathrm{rang}(B \circ A) \leq \min\{\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B)\}.$$

(c) Es sei $f : V \longrightarrow V$ eine K-lineare Abbildung und $U \leq V$ ein f-invarianter Unterraum. Ferner sei $B' = (x_1, \ldots, x_k)$ eine Basis von U und $B = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Ergänzung von B' zu einer Basis von V.

Dann ist $B'' = \left(\overline{x_{k+1}}, \ldots, \overline{x_n}\right)$ eine Basis von V/U und es gilt

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} M_{B'}^{B'}(f_U) & * \\ \hline 0 & M_{B''}^{B''}(f_{V/U}) \end{array}\right),$$

wobei $0 \in \mathrm{Mat}((n-k) \times k, K)$ die Nullmatrix ist und $* \in \mathrm{Mat}(k \times (n-k), K)$ eine geeignete Matrix ist.

Präsenzaufgabe 12:

(a) Bestimme eine reduzierte Zeilen-Stufen-Form der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$ (das geht auch ohne zu rechnen):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimme mit dem aus der Vorlesung bekannten Verfahren die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_5 &= 1 \end{aligned}$$