Thomas Markwig Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 14.06.2024, 10:00

Aufgabe 19: Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Zeige, für jeden Körper K sind die Mengen $U := \{(a_1,..,a_n)^t \in K^n \mid a_1 = \cdots = a_n\}$ und $U' := \{(a_1,..,a_n)^t \in K^n \mid a_1 + \cdots + a_n = 0\}$ Unterräume von K^n, und bestimme $\dim_K(U), \dim_K(U')$ und $\dim_K(U + U')$.

(b) Es sei V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = 5$, und U und U' Unterräume mit $\dim_K(U) = 3$ und $\dim_K(U') = 4$.

(1) Welche Werte kann $\dim_K(U \cap U')$ annehmen?

(2) Gib für jeden der Werte von $\dim_K(U \cap U')$ ein Beispiel (K, V, U, U') an.

Aufgabe 20: [Zyklische Unterräume]

Es sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, $0 \neq x \in V$ und $m > 0$ minimal mit $f^{m-1}(x) \neq 0$ und $f^m(x) = 0$.

(a) Zeige, $B = \big(f^{m-1}(x), f^{m-2}(x), \ldots, f(x), x\big)$ ist eine Basis von $U = \mathrm{Lin}(B)$.

(b) Zeige, U ist f-invariant, und bestimme $M_B^B(f_U)$.

Aufgabe 21: Betrachte den Vektorraum $P_n := \left\{\sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mid a_k \in \mathbb{R}\right\}$ der Polynome vom Grad höchstens n mit Basis $B = (t^0, t^1, \ldots, t^n)$ und die formale Ableitung

$$d : P_n \longrightarrow P_n : \sum_{k=0}^n a_k \cdot t^k \mapsto \sum_{k=1}^n k \cdot a_k \cdot t^{k-1}.$$

Bearbeite **eine** der beiden Teilaufgaben.

(a) Berechne die Matrixdarstellung $M_B^B(d)$ und den Rang von d.

(b) Zeige, dass im Fall $n = 3$ auch $D = (t^0, t^0 + t^1, t^1 + t^2, t^2 + t^3)$ eine Basis von P_3 ist und berechne die Basiswechsel T_B^D und T_D^B sowie die Matrixdarstellung $M_D^D(d)$.

Präsenzaufgabe 11:

(a) Beschreibe die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^3$ geometrisch und bestimme ihre Dimension:

(1) $\operatorname{Lin}\left((0,0,0)^t\right)$.

(2) $\operatorname{Lin}\left((1,0,0)^t\right)$.

(3) $\operatorname{Lin}\left((0,0,0)^t, (-2,0,0)^t\right)$.

(4) $\operatorname{Lin}\left((1,1,0)^t, (0,0,1)^t\right)$.

(5) $\operatorname{Lin}\left((1,1,0)^t, (0,0,1)^t, (1,1,1)^t\right)$.

(6) $\operatorname{Lin}\left((1,0,0)^t, (0,0,1)^t, (0,1,0)^t\right)$.

(b) Bestimme die Dimension der von den Familien in Präsenzaufgabe 10 auf Blatt 7 aufgespannten Vektorräume.

(c) Finde einen K-Vektorraum V sowie zwei K-lineare Abbildungen $f : V \longrightarrow V$, so dass f injektiv, aber nicht surjektiv ist.