Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Sommersemester 2024, Blatt 7
Paul Weiß

Mathematik für Informatik 2: Lineare Algebra

Abgabetermin: Freitag, 07.06.2024, 10:00

Aufgabe 16: Bearbeite **eine** der folgenden drei Teilaufgaben.

(a) Sei V ein K-Vektorraum, $f : V \longrightarrow V$ K-linear und $U \le V$ ein Unterraum von V mit $f(U) \subseteq U$. Zeige, daß durch

$$f_{V/U} : V/U \longrightarrow V/U : \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

eine K-lineare Abbildung definiert wird. Hier ist insbesondere die Wohldefiniertheit der Abbildung zu zeigen.

(b) Sei V ein K–Vektorraum und $U, U' \le V$. Zeige

$$U/(U \cap U') \cong (U + U')/U'.$$

(c) Bestimme ein direktes Komplement von $U = \mathrm{Lin}\left((0, 2, 3)^t\right)$ in $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 17: Sei V ein K-Vektorraum. $f \in \mathrm{End}_K(V)$ heißt *Projektion*, falls $f^2 = f$ gilt. Bearbeite **eine** der folgenden zwei Teilaufgaben.

(a) Zeige, die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(1) f ist eine Projektion,

(2) $\mathrm{id}_V - f$ ist eine Projektion,

(3) $\mathrm{Im}\left(\mathrm{id}_V - f\right) = \mathrm{Ker}(f)$,

(b) Zeige auch, sind obige Bedingungen erfüllt, so gilt zudem $V = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Aufgabe 18: Es sei $B := \left((2, 0, 3)^t, (1, 2, 1)^t, (4, 2, 1)^t\right)$.

(a) Zeige, B ist eine Basis von $\mathbb{F}_5^3$.

(b) Ersetze *mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz* zwei Vektoren in B durch die Vektoren $(3, 3, 2)^t$ und $(1, 1, 3)^t$.

Präsenzaufgabe 10:

(a) Bestimme eine Basis und die Dimension des Unterraums

$$U = \mathrm{Lin}(t, t^2 + t^3, t^3 + t, t^2 - t)$$

von $\mathbb{R}[t]$. Ist $6t^3 + 3t + 9$ ein Element von U?

(b) Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear abhängig, welche sind linear unabhängig, welche sind ein Erzeugendensystem, welche sind eine Basis des jeweils angegebenen K-Vektorraums V.

(1) $\big((1,2,1)^t, (1,1,1)^t\big)$ mit $V = \mathbb{R}^3$ und $K = \mathbb{R}$.

(2) $\big((1,2,3)^t, (0,2,5)^t, (1,2,4)^t, (1,1,0)^t\big)$ mit $V = \mathbb{R}^3$ und $K = \mathbb{R}$.

(3) $\big((1,2,3)^t, (0,2,5)^t, (0,0,0)^t, (1,1,0)^t\big)$ mit $V = \mathbb{R}^3$ und $K = \mathbb{R}$.

(4) $\big((1,0,1)^t, (1,0,-1)^t, (1,1,0)^t\big)$ mit $V = K^3$ und $K = \mathbb{R}$ sowie $K = \mathbb{F}_2$.

(5) $\big((1,1,1,1,1)^t, (1,0,1,0,1)^t, (0,1,0,1,1)^t, (1,1,1,1,1)^t\big)$ mit $V = \mathbb{Q}^5$ und $K = \mathbb{Q}$.

(6) $\big((1,0,1)^t, (1,1,0)^t\big)$ mit $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathrm{Ker}(f)$ für

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y,z)^t \mapsto x - y - z.$$