Universität Tübingen, FB Mathematik Wintersemester 2021/22
Thomas Markwig

# Abschlußtest zur Linearen Algebra 2

| *Name* | *Matrikelnummer* | *Summe der Punkte* |
|---|---|---|

---

Klausurtermin: Samstag, 10. März 2021, 09:00-12:00 Uhr

Hinweise: Die Klausuraufgaben sind jeweils auf getrennten Blättern zu bearbeiten. *Nie zwei Aufgaben auf demselben Blatt lösen!!!*
Alle nicht offensichtlichen Beweis-/Rechenschritte sind zu begründen.
Die Zahlen in Klammern am rechten Seitenrand geben die Punktzahlen an, die durch Lösen der jeweiligen Aufgabe erreichbar sind. Insgesamt sind es 40 Punkte.
Jedes Blatt ist am oberen Rand der Vorderseite wie folgt zu beschriften:

| *eigener Name* | *Matrikelnummer* | *Aufgabennummer* |
|---|---|---|

---

**Aufgabe 1:** Betrachte die Permutationen

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 8 & 2 & 6 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_6$$ (4)

Berechne die Permuation $\pi \circ \sigma$ und für diese dann eine Zyklenzerlegung, eine Zerlegung in ein Produkt von Transpositionen sowie das Signum.

**Aufgabe 2:** Bestimme alle Lösungen des Kongruenzgleichungssystems: (4)

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod 3 \\ x &\equiv 6 \pmod 7 \\ x &\equiv 4 \pmod{10} \end{aligned}$$

**Aufgabe 3:** Es sei $G$ eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe von $G$ und $g \in G$. Zeige, die Menge (4)

$$V = \{g^{-1} \cdot u \cdot g \mid u \in U\}$$

ist eine Untergruppe von $G$.

**Aufgabe 4:**

a. Bestimme alle Elemente in $\mathbb{Z}_{12}^*$ und begründe Deine Antwort. (2)

b. Bestimme alle Gruppenhomomorphismen von $\mathbb{Z}_{12}^*$ nach $\mathbb{Z}_5$ und begründe Deine Antwort. (4)

**Aufgabe 5:** Es sei $G$ eine Gruppe.

a. Zeige, wenn jedes Element $e \neq g \in G$ die Ordnung 2 hat, dann ist $G$ abelsch. (2)

b. Zeige, ist $G$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $|G| = 2^m$ für $m \geq 2$, dann gibt es ein Element $g \in G$ der Ordnung $o(g) = 4$. (4)

**Aufgabe 6:** Berechne mit Hilfe des symmetrischen Gaußalgorithmus' den Trägheitsindex, den Morseindex und die Signatur der folgenden symmetrischen Matrix (4)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R}).$$

**Aufgabe 7:** Es seien $V$ und $W$ zwei endlich-dimensionale $K$-Vektorräume und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ sowie $g \in \mathrm{End}_K(W)$ zwei Endomorphismen. Zeige, (4)

$$\mathrm{Spur}(f \otimes g) = \mathrm{Spur}(f) \cdot \mathrm{Spur}(g).$$

**Aufgabe 8:** Es sei $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Unterraum von $V$ mit Basis $(x_1, \ldots, x_r)$. Zeige, es gilt (4)

$$U = \{x \in V \mid x \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_r = 0\}.$$

**Aufgabe 9:** Zeige, für einen $R$-Modul $M$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

a. Jede nicht-leere Teilmenge von Untermoduln von $M$ hat ein minimales Element (bezüglich der Inklusion). (4)

b. Jede absteigende Kette

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq N_3 \supseteq \ldots$$

von Untermoduln wird nach endlich vielen Schritten stationär, d.h. es gibt ein $n \geq 1$, so daß $N_k = N_n$ für alle $k \geq n$.