Lineare Algebra 2

Kapitel IV: Multilineare Algebra

§18 Bilinearformen

GV: Sei K ein beliebiger Körper.

A) Bilinearformen

Definition 18.1

Sei V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform auf V ist eine Abbildung

$$b : V \times V \longrightarrow K,$$

so dass für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ gilt:

$$b(\lambda x + \mu y, z) = \lambda \cdot b(x,z) + \mu \cdot b(y,z)$$

und $$b(z, \lambda x + \mu y) = \lambda \cdot b(z,x) + \mu \cdot b(z,y).$$

Notation: $\mathrm{Bil}_K(V) := \{ b : V \times V \to K \mid b \text{ bilinear} \}$

Beispiel 18.2:

(a) $\det : K^2 \times K^2 \longrightarrow K : \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \longmapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$

ist eine Bilinearform.

(b) Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Dann:

$b_A : K^n \times K^n \longrightarrow K : (x,y) \longmapsto x^t \circ A \circ y$

ist eine Bilinearform auf K^n.

(c) z.B.: $A = \mathbb{1}_n \Rightarrow b_{\mathbb{1}_n}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$

(d) $\underline{n=2:}$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b_A\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$

$$= \det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

<u>Bemerkung 18.3:</u>

$K^{V \times V} := \{ f : V \times V \to K \mid f \text{ Abb.} \}$ ist ein K-VR

und $\mathrm{Bil}_K(V)$ ist ein Unterraum!

<u>Def. 18.4:</u>

Sei V ein K-VR mit Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$.

Dann heißt $M_B(b) := \left(b(x_i, x_j) \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \mathrm{Mat}_n(K)$

die Matrixdarstellung von b bezüglich B.

<u>Beispiel 18.5:</u>

$b = b_{\mathbb{1}_2}$, $B = \left(\underset{= x_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{= x_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \right)$ Basis $\mathbb{R}^2$

STOP

$$M_B(b) = \begin{pmatrix} b(x_1, x_1) & b(x_1, x_2) \\ b(x_2, x_1) & b(x_2, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Bem. 18.6:</u>

Wenn $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V und $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in V$,

dann bezeichnet $M_B(x) := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ die Matrixdarstellung

des Vektors x bez. B ! Wir verwenden M_B

also in zwei Kontexten !

Proposition 18.7:

Sei V ein k-VR, $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V.

Dann: $M_B : \mathrm{Bil}_k(V) \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(k) : b \mapsto M_B(b)$

ist ein Isomorphismus von k-Vektorräumen.

Insb. eine Bilinearform ist durch ihre Matrixdarstellung eindeutig festgelegt und zwar gilt:

$$b(x, y) = M_B(x)^t \circ M_B(b) \circ M_B(y) \quad \forall\, x, y \in V.$$

Beweis:

Seien $b, b' \in \mathrm{Bil}_k(V)$ und $\lambda, \lambda' \in k$.

$$\Rightarrow M_B(\lambda \cdot b + \lambda' \cdot b') = \left((\lambda \cdot b + \lambda' \cdot b')(x_i, x_j) \right)_{i,j} = \left(\lambda \cdot b(x_i, x_j) + \lambda' \cdot b'(x_i, x_j) \right)_{i,j}$$

$$= \lambda \cdot \left(b(x_i, x_j) \right)_{i,j} + \lambda' \cdot \left(b'(x_i, x_j) \right)_{i,j} = \lambda \cdot M_B(b) + \lambda' \cdot M_B(b')$$

$\Rightarrow M_B$ ist eine k-lineare Abbildung!

Seien $x, y \in V$ mit $M_B(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ und $M_B(y) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow b(x, y) = b\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \cdot \mu_j \cdot b(x_i, x_j)$$

$$= (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \circ \left(b(x_i, x_j) \right)_{i,j} \circ \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = M_B(x)^t \cdot \boxed{M_B(b)} \circ M_B(y)$$

$\Rightarrow M_B(b)$ legt b eindeutig fest $\Rightarrow M_B$ ist injektiv!

<u>Zeige noch:</u> M_B ist surjektiv.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$. Definiere nun eine Abb.

$$b : V \times V \to k \; : (x,y) \mapsto M_B(x)^t \circ A \circ M_B(y)$$

Seien nun $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in k$, dann:

$$b(\lambda x + \mu y, z) = M_B(\lambda x + \mu y)^t \circ A \circ M_B(z)$$

$$= [\lambda \cdot M_B(x) + \mu \cdot M_B(y)]^t \circ A \circ M_B(z)$$

$$= \lambda \cdot (M_B(x)^t \circ A \circ M_B(z)) + \mu \cdot (M_B(y)^t \circ A \circ M_B(z))$$

$$= \lambda \cdot b(x,z) + \mu \cdot b(y,z)$$

Analog sieht man $b(z, \lambda x + \mu y) = \lambda \cdot b(z,x) + \mu \cdot b(z,y)$!

$\Rightarrow$ $b \in \mathrm{Bil}_k(V)$ und $M_B(b) = A$,

weil $b(x_i, x_j) = M_B(x_i)^t \circ A \circ M_B(x_j)$

$$= e_i^t \circ \underset{\substack{\shortparallel \\ (a_{k,l})_{k,l}}}{A} \circ e_j = a_{ij}$$

$\Rightarrow$ M_B ist surjektiv. $\square$

<u>Bsp. 18.8:</u> $b = b_{\mathbb{1}_2}$, $B = \Big(\underset{\substack{\shortparallel \\ x_1}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{\shortparallel \\ x_2}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} \Big)$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -x_1 + x_2$

$y = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot x_1 + x_2$

STOP

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 4}}{b(x,y)} = M_B(x)^t \circ M_B(b) \circ M_B(y) = \underset{\substack{\shortparallel \\ (1 \;\; 2) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \overset{!}{=} 4}}{(-1 \;\; 1) \circ \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Kor. 18.9:

Die Abb. $\mathrm{Mat}_n(k) \longrightarrow \mathrm{Bil}_k(k^n) : A \mapsto b_A$ ist ein Isomorphismus.

Insbesondere: jede Bilinearform auf k^n ist von der Form b_A für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$!

Bew:

Die Abbildung ist die Inverse von $M_E : \mathrm{Bil}_k(k^n) \to \mathrm{Mat}_n(k)$ mit $E = (e_1, .., e_n)$ kanonische Basis,

denn: $A = (a_{ij})_{i,j} \Rightarrow b_A(e_i, e_j) = e_i^t \cdot A \cdot e_j = a_{ij}$

$\Rightarrow M_E(b_A) = A$ ☐

Bem. 18.10

$$b_{M_E(b)} = b \quad \text{und} \quad M_E(b_A) = A.$$

Satz 18.11

Sei V ein k-VR mit Basen $B = (x_1, .., x_n)$ und $D = (y_1, .., y_n)$ und $b \in \mathrm{Bil}_k(V)$.

Dann: $M_B(b) = (T_D^B)^t \circ M_D(b) \circ T_D^B$

Bew: Setze: $M_B(b) =: (a_{ij})_{i,j}$, $(T_D^B)^t \circ M_D(b) \circ T_D^B =: C =: (c_{ij})_{i,j}$

Beachte: $M_D(z) = M_D(\mathrm{id}_V(z)) \underset{6.4}{=} M_D^B(\mathrm{id}_V) \circ M_B(z) = T_D^B \circ M_B(z)$!

Damit: $a_{ij} = b(x_i, x_j) \overset{18.7}{=} M_D(x_i)^t \circ M_D(b) \circ M_D(x_j) = (T_D^B \circ M_B(x_i))^t \circ M_D(b) \circ (T_D^B \circ M_B(x_j))$

$= \underbrace{M_B(x_i)^t}_{=e_i} \circ (T_D^B)^t \circ M_D(b) \circ T_D^B \circ \underbrace{M_B(x_j)}_{=e_j} = e_i^t \circ C \circ e_j = c_{ij}$ ☐

Bsp. 18.12: $b = b_{\mathbb{1}_2}$, $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$, $E = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$

$$\Rightarrow T_E^B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M_B(b) = \left(T_E^B\right)^t \circ \underbrace{M_E(b)}_{= \mathbb{1}_2} \circ T_E^B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

Bemerkung 18.13:

Beachte:
- B & D zwei Basen von V
- $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ & $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$
- $T = T_D^B$

Dann:

$$M_B^B(f) = T^{-1} \circ M_D^D(f) \circ T$$

$$M_B(b) = T^t \circ M_D(b) \circ T$$

B) Normalformen symmetrischer Bilinearformen

Def. 18.14: Sei V ein K-VR.

(a) $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ heißt **symmetrisch**, falls $b(x,y) = b(y,x)$ $\forall x, y \in V$.

(b) $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ heißt **symmetrisch**, falls $A = A^t$.

Beispiel 18.15:

(a) 18.2 $\Rightarrow \det(e_1, e_2) = 1 \neq -1 = \det(e_2, e_1)$
$\Rightarrow$ det ist nicht symmetrisch als Bilinearform

(b) $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix} = A \Rightarrow A$ ist symmetrisch

Prop. 18.16:

Sei V ein k-VR, $b \in \mathrm{Bil}_k(V)$, $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V, $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$.

ⓐ b ist symmetrisch $\iff$ $M_B(b)$ ist symmetrisch

ⓑ b_A - - - - - - - $\iff$ A - - - - - - - -

Beweis: Sei $M_B(b) = A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(k)$.

"$\Leftarrow$" Sei A symmetrisch, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$. Seien $x, y \in V$.

$$\Rightarrow b(x,y) = M_B(x)^t \circ A \circ M_B(y) = (M_B(x)^t \circ A \circ M_B(y))^t$$

$$= M_B(y)^t \circ A^t \circ M_B(x) \underset{A = A^t}{\overset{\beta}{=}} M_B(y)^t \circ A \circ M_B(x) = b(y,x)$$

$\Rightarrow$ b ist symmetrisch

"$\Rightarrow$" Sei b symmetrisch.

$$a_{ij} = b(x_i, x_j) = b(x_j, x_i) = a_{ji} \quad \forall i,j$$

$\Rightarrow$ A ist symmetrisch ☐

Def. 18.17:

Sei $b \in \mathrm{Bil}_k(V)$ symmetrisch.

Dann heißt $q_b : V \longrightarrow k : x \longmapsto b(x,x)$ die zu b gehörende

quadratische Form.

Für $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$ symmetrisch schreibe: $q_A := q_{b_A}$.

Bsp. 18.18:

$A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_n(k)$ symm. und $x = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \in k^n$

$$\Rightarrow q_A(x) = x^t \circ A \circ x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot t_i \cdot t_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \cdot t_i^2 + 2 \cdot \sum_{i<j} a_{ij} \cdot t_i \cdot t_j$$

d.h. $q_A(x)$ ist ein homogenes Polynom vom Grad 2 in den Unbestimmten $t_1, \dots, t_n$?

z.B.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow q_A(t_1,t_2) = t_1^2 + 2 \cdot 2 \cdot t_1 \cdot t_2 + 5 \cdot t_2^2$
$= t_1^2 + 4 t_1 t_2 + 5 t_2^2$

Def. 18.19:

Ein Körper k hat Charakteristik 2, falls $1_k + 1_k = 0_k$ gilt.

Bsp. 18.20:

(a) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit $1 + 1 = 0 \Rightarrow \mathbb{F}_2$ hat Charakteristik 2

(b) $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ haben nicht Charakteristik 2 !

Lemma 18.21:

(a) Hat k Charakteristik 2, dann gilt $\underbrace{a + a}_{\overset{\mathbb{N} \ni}{2 \cdot a \in k}} = 0$ für alle $a \in k$.

(b) Hat k nicht Charakteristik 2, dann:

$\forall a \in k \ \exists_1 b \in k: \ 2 \cdot b = a$

Schreibe: $b := \frac{a}{2}$

Bew.: (a) $a + a = a \cdot (1+1) = a \cdot 0 = 0$

(b) $2 \cdot b = a$ ist ein LGS und es ist eindeutig lösbar, da $\det(2) = \det(1+1) = 1+1 \neq 0$.

Proposition 18.22 (Polarisierung der Bilinearform)

Sei k ein Körper, der nicht Charakteristik 2 hat, und $b \in \mathrm{Bil}_k(V)$.

Dann: $b(x,y) = \frac{1}{2} \cdot \left(q_b(x+y) - q_b(x) - q_b(y) \right) \quad \forall x, y \in V$

Bew: Einsetzen ☒

Satz 18.23: (Normalform von b)

Der Körper K habe nicht Charakteristik 2 und $\dim_K(V) = \overset{1}{\wedge}n < \infty$.

Wenn $b \in Bil_K(V)$ symmetrisch, dann hat V eine Orthogonalbasis bezüglich b, d.h. $\exists B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V s.d. $b(x_i, x_j) = 0$ für alle $i \neq j$.

Insbesondere: $M_B(b) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}$ ist eine Diagonalmatrix.

Beweis: durch Induktion nach n:

$n=1$: klar, da jede 1×1-Matrix eine Diagonalmatrix

$n>1$: 1. Fall: $q_b = 0 \underset{18.22}{\Rightarrow} b(x,y) = 0$ für alle $x, y \in V$

$\Rightarrow$ jede Basis von V ist eine Orthogonalbasis bzgl. b

2. Fall: $q_b \not\equiv 0 \Rightarrow \exists \overset{\neq 0}{x} \in V: q_b(x) \neq 0$

Setze: • $\mathcal{U} := Lin(x) \leq V$ mit $\dim_K(\mathcal{U}) = 1$.

• $\mathcal{U}^\perp := \{y \in V \mid b(x,y) = 0\}$

Zeige: $\mathcal{U}^\perp \leq V$

Seien $y, z \in \mathcal{U}^\perp$ und $\lambda, \mu \in K$

$\Rightarrow b(x, \lambda y + \mu z) = \lambda \cdot \underbrace{b(x,y)}_{=0} + \mu \cdot \underbrace{b(x,z)}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda y + \mu z \in \mathcal{U}^\perp$

Zeige: $\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp = V$

Sei $y \in V$. Setze: $x' := \frac{b(x,y)}{b(x,x)} \cdot x \in \mathcal{U}$ $\quad b(x,x) \neq 0$

$\Rightarrow b(x, y - x') = b(x,y) - b(x, x')$

$$= b(x,y) - b\left(x, \frac{b(x,y)}{b(x,x)} \cdot x\right)$$

$$= b(x,y) - \frac{b(x,y)}{\cancel{b(x,x)}} \cdot b(\cancel{x,x}) = 0$$

$$\Rightarrow y - x' \in \mathcal{U}^\perp \Rightarrow y = x' + (y - x') \in \mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp$$

Zeige: $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$

Sei $y \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp \Rightarrow \exists \lambda \in k : y = \lambda \cdot x$

$$\Rightarrow \lambda \cdot \underbrace{q_b(x)}_{\neq 0} = \lambda \cdot b(x,x) = b(x, \lambda \cdot x) = b(x,y) \underset{y \in \mathcal{U}^\perp}{=} 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow y = \lambda \cdot x = 0 \cdot x = 0$$

Also: $V = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp$

Schränke b auf $\mathcal{U}^\perp$ ein $\overset{\text{I.A.}}{\Longrightarrow} \exists \overset{\text{Basis}}{(x_2, \dots, x_n)}$ von $\mathcal{U}^\perp$

mit $b(x_i, x_j) = 0 \quad \forall\ 2 \leq i, j \leq n$ & $i \neq j$

Setze: $x_1 := x \Rightarrow B = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ Basis von V

und $b(x_i, x_j) = 0 \quad \forall\ i \neq j$ ◻

Korollar 18.24:

Der Körper k habe nicht Charakteristik 2 und $A \in Mat_n(k)$ symmetrisch.

Dann: $\exists\ T \in GL_n(k)$: $T^t \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ und $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_n = 0$ und $r = rang(A)$.

Beweis: Wähle OGB B bzgl. b_A mit 18.23 und setze $T := T_E^B$

o.E.: $b(x_i, x_i) \begin{cases} \neq 0, & \text{für } i = 1, \dots, r \\ = 0, & \text{für } i = r+1, \dots, n \end{cases}$

Denn: $\Pi_B(b_A) = (T_E^B)^t \circ \Pi_E(b_A) \circ T_E^B = T^t \circ A \circ T$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Zudem: $r = \operatorname{rang}(T^t \circ A \circ T) \overset{T \in Gl_n(k)}{=} \operatorname{rang}(A)$. ☐

Bem. 19.25:

(a) Die λ_i in 18.24 hängen nicht nur von A ab und sind i.a. nicht die Eigenwerte von A!

Nur die Anzahl der Nicht-Null-Einträge auf der Diagonalen ist von der Wahl von T unabhängig!

(b) Wenn $T \in Gl_n(k)$ und $D = T^t \circ A \circ T$,

dann: • $T = P_1 \circ \dots \circ P_k$ ist ein Produkt von Elementarmatrizen

• $D = P_k^t \circ \dots \circ P_1^t \circ A \circ P_1 \circ \dots \circ P_k$

• dabei $P_1^t \circ A \circ P_1$ entsteht aus A,

indem die zu P_1 gehörende elementare Operation als Zeilen- und Spaltenoperation ausgeführt wird!

D.h. D entsteht aus A durch sukzessives Ausführen von Zeilen- und zugehörigen Spaltenoperationen!

$\longrightarrow$ symmetrischer Gaußalgorithmus

Bsp. 18.27:

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$

①

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A} & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{1}_n} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cline{1-2} 3 & 2 & & \\ 2 & 1 & & \\ \hline 3 & 2 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \\ \cline{1-2} 3 & 0 & & \\ 0 & -\frac{1}{3} & & \\ \hline \end{array}$$

nur Spaltenop.

$I \mapsto I + II$

$II \mapsto II - \frac{2}{3} \cdot I$

$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = T$

$$\Rightarrow \quad T^t \circ A \circ T = D$$

②

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{A} & \multicolumn{2}{c}{\mathbb{1}_2} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \cline{1-2} 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \cline{1-2} 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \\ \end{array}$$

$I \longleftrightarrow II$

$II \mapsto II - I$

$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \tilde{T}$

$$\Rightarrow \quad \tilde{T}^t \circ A \circ \tilde{T} = \tilde{D}$$

c) Der Sylvestersche Trägheitssatz

Korollar 18.28: (Sylvesterscher Trägheitssatz)

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit $1 \leq \dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$ und $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$ symm.

Dann: V hat eine Orthogonalbasis B bez. b,

s.d. $$M_B(b) = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_k & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_l & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right).$$

Dabei hängen die Zahlen k, l und $k-l$ nur von b ab.

Notation: k = Trägheitsindex von b

l = Morseindex von b

$k-l$ = Signatur von b

Bew: 18.23 $\Rightarrow$ $\exists$ OGB $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V bez. b

O.E.: $$b(x_i, x_i) \begin{cases} > 0 & \text{für } i = 1, \dots, k \\ < 0 & \text{für } i = k+1, \dots, k+l \\ = 0 & \text{für } i > k+l \end{cases}$$

Setze: $$y_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|b(x_i, x_i)|}} \cdot x_i, & \text{für } i = 1, \dots, k+l \\ x_i & \text{, für } i = k+l+1, \dots, n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b(y_i, y_i) = \begin{cases} 1, & i = 1, \dots, k \\ -1, & i = k+1, \dots, k+l \\ 0, & i = k+l+1, \dots, n \end{cases} \Bigg\} \Rightarrow \tilde{B} = (y_1, \dots, y_n) \text{ tut's}$$

Zeige: $k = \max\{\dim_{\mathbb{R}}(U) \mid U \leq V, \forall\, 0 \neq x \in U : q_b(x) > 0\}$

(dann ist k unabhängig von der Wahl von B)

"$\leq$" $0 \neq x \in \mathrm{Lin}(y_1, \ldots, y_k) \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i y_i$

$$\Rightarrow q_b(x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 \cdot \underbrace{b(y_i, y_i)}_{=1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 > 0$$

$$\Rightarrow k = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Lin}(y_1, \ldots, y_k) \leq \max\{ - - - - \}$$

"$\geq$" Sei $U \leq V$ mit $\forall x \in U, x \neq 0 : q_b(x) > 0$.

Setze: $W := \mathrm{Lin}(y_{k+1}, \ldots, y_n) \xRightarrow{\text{wie oben}} q_b(x) \leq 0 \ \forall x \in W$

$\Rightarrow U \cap W = \{0\}$, denn $x \in U \cap W, x \neq 0 : 0 < q_b(x) \leq 0$ ↯

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U+W)}_{\leq n} - \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(W)}_{=n-k} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)}_{=0}$$

$$\leq n - (n-k) + 0 = k$$

<u>Zeige noch</u>: l ist unabhängig von der Wahl von B

Sei C eine beliebige Basis von V. Dann:

$$k + l = \mathrm{rang}(M_B(b)) = \mathrm{rang}\left((T_C^B)^t \cdot M_C(b) \cdot T_C^B\right)$$

$$= \mathrm{rang}(M_C(b))$$

$\Rightarrow k + l$ ist unabhängig von der Wahl der Basis

<u>und</u> k ist - - - - - - - - - - - - -.

$\Rightarrow l = (k+l) - k$ ist unabhängig von der Wahl der Basis $\square$

Kor. 18.29 (Sylv. Trägheitssatz für symm. Matrizen)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ symmetrisch.

Dann: $\exists\, T \in GL_n(\mathbb{R})$: $T^t \circ A \cdot T = \left(\begin{array}{c|c|c} \mathbb{1}_k & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\mathbb{1}_\ell & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Dabei hängen k und ℓ nur von A ab.

Notation: k = Trägheitsindex von A

ℓ = Morseindex von A

$k-\ell$ = Signatur von A

Bew: 18.28 mit $b = s_A$ und $T = T^B_E$. ▢

Bsp. 18.30:

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow T^t \circ A \cdot T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$$T' := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow (T')^t \circ A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Beachte: $\tilde{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{T}^t \circ A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- D.h. die Transformationsmatrix in 18.29 ist nicht eindeutig! ▢

§ 19 Der Dualraum und die transponierte Abbildung

GV: K ein Körper und V und W K-Vektorräume.

A) Der Dualraum

Definition 19.1: (a) Der Dualraum zu V ist der K-VR

$$V^* := V^\vee := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{ g : V \to K \mid g \ K\text{-linear} \}.$$

Die Elemente von V^* heißen Linearformen oder lineare Funktionale.

(b) Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \longrightarrow K : (g, x) \mapsto \langle g, x \rangle := g(x)$ heißt die duale Paarung auf V.

Lemma 19.2:
Die duale Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \to K$ ist bilinear.

Bew:
- Weil $g \in V^*$ linear ist, ist $\langle g, \cdot \rangle$ linear in der 2. Komp.
- Seien $\lambda, \mu \in K$, $g, h \in V^*$ und $x \in V$, dann:

$$\langle \lambda g + \mu h, x \rangle = (\lambda g + \mu h)(x) = \lambda \cdot g(x) + \mu \cdot h(x)$$
$$= \lambda \cdot \langle g, x \rangle + \mu \cdot \langle h, x \rangle .$$

$\square$

Bsp. 19.3:
(a) Sei $b \in \mathrm{Bil}_K(V)$ und $x \in V$ fest gegeben.

$\Longrightarrow$ $b(x, \cdot) : V \longrightarrow K ; y \mapsto b(x, y)$ ist linear

$\Longrightarrow$ $b(x, \cdot) \in V^*$

$$\Rightarrow \quad \phi_b : V \longrightarrow V^* \; ; \; x \longmapsto b(x, \cdot)$$

ist eine lineare Abbildung!

ⓑ $\underline{V = K^n}$, $\quad b : K^n \times K^n \longrightarrow K \; ; (x, y) \longmapsto x^t \circ y = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i = f_{x^t}(y)$

$$\begin{array}{ccccccc} \phi_b : K^n & \xrightarrow{\cong} & \boxed{\mathrm{Mat}(1 \times n, K)} & \xrightarrow{\cong} & (K^n)^* & = & \mathrm{Hom}_K(K^n, K) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \quad\quad \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & x^t \quad\quad A & \longmapsto & f_A & & f_{x^t} \end{array}$$

Wir identifizieren deshalb den Dualraum $(K^n)^*$ auch mit dem VR der $1 \times n$-Matrizen und fassen ein lineares Funktional als einen Zeilenvektor auf.

Bsp. 19.4: Sei $V = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ und

$$b : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \; : \; (f, g) \longmapsto \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx$$

ist bilinear, sogar ein Skalarprodukt.

$$\Rightarrow \quad \phi_b : V \longrightarrow V^* : f \longmapsto b(f, \cdot)$$

$\int_0^1 \overset{!!}{=} \phi_b$

mit $b(f, \cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; g \longmapsto b(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx$

$b(f, \cdot) \overset{!!}{=} \int_0^1 f$

Bem: ϕ_b ist ein Monomorphismus, aber nicht surjektiv

- $0 = \phi_b(f) \Rightarrow \int_0^1 f(x) \cdot g(x) \, dx = 0 \quad \forall g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_0^1 f^2(x) \, dx = 0 \underset{f \text{ stetig}}{\Longrightarrow} f = 0 \Rightarrow \phi_b \text{ injektiv}$$

• Betrachte dazu einen Punkt $p \in [0,1]$

und $\delta_p : V \longrightarrow \mathbb{R} : g \longmapsto g(p)$

$\Longrightarrow \quad \delta_p \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}) = V^*$

Zeige: $\delta_p \notin \mathrm{Im}(\phi_p)$, d.h. $\nexists\, \delta \in V : \delta_p = \phi_b(\delta)$

Ann: $\exists\, \delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig, s.d. $\delta_p = \phi_b(\delta)$

d.h. $\forall g \in V : g(p) = \delta_p(g) = \int_0^1 \delta(x)\cdot g(x)\, dx$

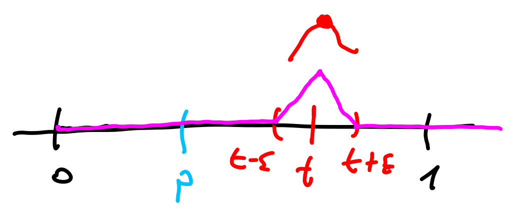
Sei $t \in [0,1]$ mit $t \neq p$.

Ann: $\delta(t) \neq 0$

o.E. $\delta(t) > 0$

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : \forall x \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$

gilt: $\delta(x) > 0$



Betrachte $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ wie im Bild

$$\Rightarrow \underline{\underline{0}} = g(p) = \delta_p(g) = \int_0^1 \delta(x)\cdot g(x)\, dx = \underbrace{\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \underbrace{\delta(x)}_{>0} \cdot \underbrace{g(x)}_{>0}\, dx}_{\underline{\underline{>0}}} \ ⚡$$

Also: $\delta(t) = 0 \quad \forall t \neq p$

$\Rightarrow \quad \delta(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, weil δ stetig

$\Rightarrow \quad \delta_p = \int_0^1 \delta$ ist die Nullfkt.

Aber: $f \equiv 1$ auf $[0,1]$

$\Rightarrow 1 = f(p) = \delta_p(f) = 0 \quad$ ⚡

B) Duale Basis

Satz 19.5:

Sei $B = (x_i \mid i \in I)$ eine Basis von V.

(a) $\forall\, i \in I \;\; \exists_1\, x_i^* \in V^* : \forall_j \in I : \langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{ij}$

$$\langle x_i^*, x_j \rangle = x_i^*(x_j)$$

(b) $B^* := (x_i^* \mid i \in I)$ ist linear unabhängig

(c) Wenn $B = (x_1, \dots, x_n)$ endlich ist, dann ist $B^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ eine Basis von V^*, die zu B duale Basis.

Insbesondere: $V \cong V^*$.

Beweis: (a) Aus dem Fortsetzungssatz für lin. Abb folgt, daß man eine lin. Abb auf einer Basis beliebig vorgeben kann und daß sie dadurch eindeutig festgelegt ist.

(b) Seien nun $\lambda_i \in K$ mit: $\sum\limits_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i x_i^* = 0$

$$\Rightarrow 0 = \Big(\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_i x_i^*\Big)(x_j) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_i \cdot \underbrace{(x_i^*(x_j))}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j \quad \forall_j \in I$$

$\Rightarrow$ B^* ist lin. unabhängig.

(c) Zeige $V^* = \mathrm{Lin}(x_1^*, \dots, x_n^*)$.

Sei $\boxed{g \in V^*}$. Setze: $\boxed{h := \sum_{i=1}^n \langle g, x_i \rangle \cdot x_i^*} \in \mathrm{Lin}(x_1^*, \dots, x_n^*)$

$$\Rightarrow h(x_j) = \sum_{i=1}^n \langle g, x_i \rangle \cdot \underbrace{x_i^*(x_j)}_{=\delta_{ij}} = \langle g, x_j \rangle = g(x_j) \Rightarrow \boxed{h = g}$$

$\square$

Korollar 19.6:

$$\dim_K(V) < \infty \implies \dim_K V^* = \dim_K V$$

Korollar 19.7:

Sei $\mathcal{B} = (x_i \mid i \in I)$ eine Basis von V.

Dann: $\exists_1\ \phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow V^*$ linear mit $\phi_{\mathcal{B}}(x_i) = x_i^*$

und $\phi_{\mathcal{B}}$ ist ein Monomorphismus.

Wenn $\mathcal{B}$ endlich, dann ist $\phi_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus.

Beispiel 19.8: (duale Basen im K^n)

Sei $V = K^n$ und $E = (e_1, \dots, e_n)$ die kanonische Basis.

$\implies e_i^* : K^n \longrightarrow K : y \longmapsto e_i^t \cdot y = y_i$

ist die Projektion auf die i-te Komponente

$$\implies \phi_E : K^n \xrightarrow{\cong} \underset{\substack{\| \\ Mat(1 \times n, K)}}{(K^n)^*} : \underset{\substack{\| \\ \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i}}{x} \longmapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i^* = x^t$$

Bem. 19.9:

Wir fassen $(K^n)^*$ als $Mat(1 \times n, K)$ auf!

Sei $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von K^n mit $x_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$

und $\mathcal{B}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ mit $x_i^* = (b_{i1}, \dots, b_{in})$

$$\implies x_i^* \circ x_j = \langle x_i^*, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

Wenn $C = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$ und $A = (x_1 \cdots x_n) = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(K)$

$$\Rightarrow \quad C \circ A = (x_i^* \circ x_j)_{i,j} = (\delta_{ij})_{i,j} = \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow \quad C = A^{-1}$$

<u>Also:</u> Wenn $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von K^n und A die Vektoren $x_1, \dots, x_n$ als Spalten enthält, dann enthält A^{-1} die duale Basis als Zeilen!

<u>Bsp. 19.11:</u>

Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

<u>Zeige:</u>
- B ist Basis des $\mathbb{Q}^3$
- Bestimme die duale Basis von B

Stop

$$\begin{array}{ccc|ccc|l}
 & A & & & \mathbb{1}_n & & \\
\hline
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{III} \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{I} \mapsto (-1)\cdot \mathrm{I} \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{II} \mapsto \mathrm{II} + \mathrm{I} \\
-1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 &
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad II \mapsto (-1)\cdot II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad III \mapsto III + II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \qquad III \mapsto \tfrac{1}{2}\cdot III$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad II \mapsto II - III$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad I \mapsto I + II$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$\mathcal{B}$ ist Basis von $\mathbb{Q}^3$ $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$

$$\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

Bem. 19.13:

(a) Zu $\mathcal{B}$ gibt es eine duale Basis $\mathcal{B}^*$, aber zu einem einzelnen Vektor x gibt es keinen dualen Vektor x^* !!!

(b) Man kann zeigen

$$V = \bigoplus_{i\in I} K\cdot x_i \implies V^* \cong \prod_{i\in I} K\cdot x_i^*$$

Insb.: $V \cong V^* \iff \dim_K V < \infty$

Lemma 19.13 (Parsevalsche Gleichung mittels dualer Basis)

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V und B^* die duale Basis von V^*.

Dann: (a) $x \in V \implies x = \sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x\rangle \cdot x_i$

(b) $g \in V^* \implies g = \sum_{i=1}^n \langle g, x_i\rangle \cdot x_i^*$

Beweis: (b) Beweis von 19.5.

(a) Sei $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot x_j \implies \langle x_i^*, x\rangle = \langle x_i^*, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j\rangle$

$$= \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot \underbrace{\langle x_i^*, x_j\rangle}_{=\delta_{ij}} = \lambda_i \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

$\square$

c) Die transponierte Abbildung

Definition 19.14: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Dann heißt die Abbildung $f^t : W^* \longrightarrow V^* : g \longmapsto g \circ f$

die duale oder transponierte Abbildung von f.

Schreibe auch: f^* oder $f^\vee$ statt f^t.

Diagramm:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "g\circ f = f^t(g)"'] & W \arrow[d, "g"] \\ & K \end{tikzcd}$$

Proposition 19.16 (Dualisieren als Funktor)

Seien U, V, W K-Vektorräume, $\lambda \in K$, $f, \tilde{f} \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$ und $f' \in \mathrm{Hom}_K(W,U)$.

(a) f^t ist K-linear

(b) $(\mathrm{id}_V)^t = \mathrm{id}_{V^*}$

(c) $(f' \circ f)^t = f^t \circ (f')^t$

(d) f Isomorphismus $\Longrightarrow$ f^t Isomorphismus

(e) $(f+\tilde{f})^t = f^t + \tilde{f}^t$ und $(\lambda \cdot f)^t = \lambda \cdot (f^t)$

d.h. $t : \mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ ist K-linear

Bew.: (a) $f^t(\lambda g + \mu h) = (\lambda g + \mu h) \circ f = \lambda \cdot g \circ f + \mu \cdot h \circ f$

$= \lambda \cdot f^t(g) + \mu \cdot f^t(h) \quad \Longrightarrow \quad f^t$ ist K-linear

(b) $(\mathrm{id}_V)^t(g) = g \circ \mathrm{id}_V = g = \mathrm{id}_{V^*}(g) \quad \Longrightarrow$ (b)

(c) $(f' \circ f)^t(g) = g \circ (f' \circ f) = (g \circ f') \circ f$

$$= [(f')^t(g)] \circ f = f^t((f')^t(g))$$

$$= (f^t \circ (f')^t)(g) \quad \Rightarrow \quad (c)$$

(d) Sei f ein Isomorphismus.

$$\Rightarrow \quad id_{V^*} = (id_V)^t = (f^{-1} \circ f)^t = f^t \circ (f^{-1})^t$$

$$id_{W^*} = (id_W)^t = (f \circ f^{-1})^t = (f^{-1})^t \circ f^t$$

$\Rightarrow$ f^t bijektiv mit $(f^t)^{-1} = (f^{-1})^t$

(e) $(f + \tilde{f})^t(g) = g \circ (f + \tilde{f}) = (g \circ f) + (g \circ \tilde{f}) = f^t(g) + \tilde{f}^t(g) = (f^t + \tilde{f}^t)(g)$

$$\Rightarrow \quad (f + \tilde{f})^t = f^t + \tilde{f}^t$$

Analog: $(\lambda \cdot f)^t = \lambda \cdot (f^t)$. $\square$

Proposition 19.17:

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V und $D = (y_1, \dots, y_m)$ Basis von W und $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Dann:
$$M_{B^*}^{D^*}(f^t) = \left(M_D^B(f)\right)^t$$

Insb.:
- $f \in \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m) \Longrightarrow A_{f^t} = (A_f)^t$
- $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K) \Longrightarrow (f_A)^t = f_{A^t}$

Beweis:

$$19.13 \implies f(x_j) = \sum_{i=1}^{m} \langle y_i^*, f(x_j)\rangle \cdot y_i$$

$$\implies M_D^B(f) = \left(\langle y_i^*, f(x_j)\rangle \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

$$19.13 \implies f^t(y_i^*) = \sum_{j=1}^{n} \langle f^t(y_i^*), x_j\rangle \cdot x_j^*$$

$$\implies M_{B^*}^{D^*}(f^t) = \left(\langle f^t(y_i^*), x_j\rangle \right)_{\substack{j=1,\dots,n \\ i=1,\dots,m}}$$

z.z.: $\langle y_i^*, f(x_j)\rangle = \langle f^t(y_i^*), x_j\rangle$ für alle i,j

$$\langle f^t(y_i^*), x_j\rangle = \langle y_i^* \circ f, x_j\rangle = (y_i^* \circ f)(x_j)$$

$$= y_i^*(f(x_j)) = \langle y_i^*, f(x_j)\rangle \qquad \square$$

Bem. 19.18:

$$\begin{tikzcd}
 & f \arrow[rr, mapsto] & & f^t & \\
f \arrow[d, mapsto] & \mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[rr, "t"] \arrow[d, "M_D^B"'] \arrow[rrd, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*) \arrow[d, "M_{B^*}^{D^*}"] & f^t \arrow[d, mapsto] \\
M_D^B(f) & \mathrm{Mat}(m \times n, K) \arrow[rr, "t"] & & \mathrm{Mat}(n \times m, K) & M_{B^*}^{D^*}(f^t) \\
 & A \arrow[rr, mapsto] & & A^t &
\end{tikzcd}$$

$f \in \mathrm{Hom}_K(V,W)$, $\mathrm{Hom}_K(W^*,V^*) \ni f^t$, $M_D^B(f) \in \mathrm{Mat}(m\times n,K)$, $\mathrm{Mat}(n\times m,K) \ni M_{B^*}^{D^*}(f^t)$, $A \in \mathrm{Mat}(m\times n,K)$, $A^t \in \mathrm{Mat}(n\times m,K)$

D) Der Annulator

Def. 19.19: Sei $\mathcal{U} \leq V$.

Dann heißt $\mathcal{U}^\circ := \{ g \in V^* \mid \langle g, x \rangle = 0 \ \forall x \in \mathcal{U} \}$

der Orthogonalraum oder der Annulator von $\mathcal{U}$.

Weil die duale Paarung linear in der 1. Komponente ist, ist $\mathcal{U}^\circ$ ein Unterraum von V^*.

Prop. 19.20:
Sei $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V und $(x_1, \dots, x_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$,
dann ist $(x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ eine Basis von $\mathcal{U}^\circ$.
Insbesondere: $\dim_K \mathcal{U}^\circ = \dim_K V - \dim_K \mathcal{U}$.

Beweis:
Weil $\mathcal{B}^*$ lin. unabhängig ist, ist $(x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ lin. unabh.

z.z.: $\mathcal{U}^\circ = \mathrm{Lin}(x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$

"$\supseteq$" Sei $x \in \mathcal{U} \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i$. Sei $j \in \{k+1, \dots, n\}$.

$$\Rightarrow \langle x_j^*, x \rangle = x_j^*(x) = x_j^* \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x_i \Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \underbrace{x_j^*(x_i)}_{=\delta_{ij} = 0} = 0$$

$$\Rightarrow x_j^* \in \mathcal{U}^\circ \Rightarrow \mathrm{Lin}(x_{k+1}^*, \dots, x_n^*) \subseteq \mathcal{U}^\circ$$

"$\subseteq$" Sei $g \in \mathcal{U}^\circ$. $\Rightarrow g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^*$ für $\lambda_i \in K$ geeignet

$$\Rightarrow \underset{j \leq k}{0 =} \langle g, x_j \rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i^*, x_j \Big\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{\langle x_i^*, x_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j$$

$$\Rightarrow \quad y = \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j x_j^* \in \mathrm{Lin}(x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$$ $\square$

Bem. 19.21: Wie berechnet man den Annulator?

① Ergänze Basis $(x_1, \dots, x_k)$ von $\mathcal{U}$ zur Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V, berechne die duale Basis B^*, dann ist $x_{k+1}^*, \dots, x_n^*$ eine Basis von $\mathcal{U}^\circ$.

② $V = K^n$: $\quad \mathcal{U} = \mathrm{Lös}(A, 0)$ mit $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$

Dann sind die Zeilen von A ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$!

denn: • $x \in \mathcal{U} \Rightarrow A \circ x = 0 \Rightarrow$ Zeilen von A annulieren x und damit $\mathcal{U}$

• $\underbrace{\mathrm{rang}(A)}_{\dim_K \mathrm{Lin}(\text{Zeilen von } A)} = n - \dim_K \mathrm{Lös}(A, 0) = \dim_K V - \dim_K \mathcal{U} = \dim_K \mathcal{U}^\circ$ $\square$

Beispiel 19.22:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\} = \mathrm{Lös}((1,1,1), 0) \Rightarrow \mathcal{U}^\circ = \mathrm{Lin}((1,1,1))$$

Prop. 19.23: Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

Dann: ⓐ $\mathrm{Ker}(f^t) = \mathrm{Im}(f)^\circ$

ⓑ $\mathrm{Im}(f^t) = \mathrm{Ker}(f)^\circ$

Beweis: (a) $g \in \ker(f^t) \iff 0 = f^t(g) = g \circ f$

$\iff \forall x \in V : 0 = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\iff \forall y \in \operatorname{Im}(f) : \quad 0 = g(y) = \langle g, y \rangle$

$\iff \quad g \in \operatorname{Im}(f)^\circ$

(b) "$\subseteq$" Sei $g \in \operatorname{Im}(f^t)$. Dann: $\exists\, h \in W^* : \quad g = f^t(h) = h \circ f$

Sei $x \in \ker(f) \implies \langle g, x\rangle = g(x) = h(\underbrace{f(x)}_{=0}) = h(0) = 0$

$\implies g \in \ker(f)^\circ$.

"$\supseteq$" Sei $\boxed{g \in \ker(f)^\circ.}$

z.z.: $\exists\, h \in W^* : \quad g = f^t(h) = h \circ f$.

Sei $B' = (y_i \mid i \in I)$ eine Basis von $\operatorname{Im}(f)$ und ergänze B' zu einer Basis $B = (y_i, z_j \mid i \in I, j \in J)$ von W. Wähle zudem für jedes $i \in I$ ein $x_i \in V$ mit $f(x_i) = y_i$.

Definiere eine $h : W \to k$ durch

$h(y_i) := g(x_i)$ für $i \in I$ und $h(z_j) = 0$ für $j \in J$

und durch lineare Fortsetzung!

Zeige noch: $\quad f^t(h) = g$!

Sei $x \in V \implies \exists\, \lambda_i \in k : \quad f(x) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot y_i$

Setze: $x' := \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endlich}}} \lambda_i \cdot x_i \in V$

$\implies f(x') = f(\sum \lambda_i x_i) = \sum \lambda_i \cdot \overbrace{f(x_i)}^{= y_i} = \sum \lambda_i \cdot y_i = f(x)$

$\implies 0 = f(x) - f(x') = f(x - x') \implies x - x' \in \ker(f)$

$$\Rightarrow \quad 0 = g(x - x') = g(x) - g(x')$$

$g \in \ker(f)^\circ$

$$\Rightarrow \quad g(x) = g(x') = g\left(\sum \lambda_i x_i\right) = \sum \lambda_i \cdot g(x_i)$$

$$= \sum \lambda_i \cdot h(y_i) = \sum \lambda_i \cdot h(f(x_i))$$

Def. von h

$$= h\left(f\left(\sum \lambda_i x_i\right)\right) = h(f(x'))$$

$$= h(f(x)) = (h \circ f)(x) = f^t(h)(x)$$

$$\Rightarrow \quad g = f^t(h) \in \operatorname{Im}(f^t).$$

$\square$

Bem. 19.24:

Sei $V = K^n$ und $W = K^m$ und $f = f_A$ mit $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K)$.

① $\ker(f_A^t) = \ker(f_{A^t}) = \operatorname{Im}(f_A)^\circ$

Beachte: $\operatorname{Im}(f_A)$ wird von den Spalten von A erzeugt!

19.21 $\Rightarrow$ $\operatorname{Im}(f_A)^\circ$ wird von Gleichungen des Spaltenraumes erzeugt wird

$\underset{8.22}{\Rightarrow}$ transponiere A und berechne den Kern!

② $\operatorname{Im}(f_A^t) = \operatorname{Im}(f_{A^t}) = \ker(f_A)^\circ$

19.21 $\Rightarrow$ der Annulator von $\ker(f_A)$ wird erzeugt durch die Spalten von A^t!

Korollar 19.25:

ⓐ $\left.\begin{array}{l} f \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \\ \dim_K V,\ \dim_K W < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(f^t)$

ⓑ $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, K) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A^t)$

Beweis:

ⓐ $\operatorname{rang}(f^t) = \dim_K \operatorname{Im}(f^t) \underset{19.23}{=} \dim_K(\ker(f))^\circ$

$\underset{19.20}{=} \dim_K V - \dim_K \ker(f) = \dim_K \operatorname{Im}(f)$

ⓑ $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(f_A) \underset{ⓐ}{=} \operatorname{rang}(f_A^t) = \operatorname{rang}(f_{A^t}) = \operatorname{rang}(A^t)$ ☒

E) Bidualraum

Definition 19.26:

① $V^{**} := (V^*)^*$ heißt der Bidualraum von V.

② $** : V \longrightarrow V^{**} : x \mapsto x^{**} := \langle \cdot, x \rangle$ ist offenbar linear!

d.h. $x^{**}(g) = \langle g, x\rangle = g(x)$.

$**$ hängt von keiner Wahl ab, man nennt sie deshalb kanonisch!

Proposition 19.27:

ⓐ $**$ ist Monomorphismus.

ⓑ $\dim_K V < \infty \implies **$ ist Isomorphismus.

Beweis:

ⓐ Ang.: $\exists\, 0 \neq x \in \ker(**)$

Ergänze x zu einer Basis B von V und

$g := \phi_B(x) \in V^*$

$\implies 0 = x^{**}(g) = \langle g, x\rangle = \langle \phi_B(x), x\rangle = 1$ ↯

Also: $\ker(**) = 0 \implies **$ ist injektiv

ⓑ $\dim_K V = \dim_K V^* = \dim_K (V^*)^* = \dim_K V^{**} \underset{ⓐ}{\implies} **$ auch surjektiv ☒

Bemerkung 19.28: $\dim_K V < \infty$

Wenn wir V und V^{**} mittels $**$ miteinander identifizieren,

dann: • $(\mathcal{U}^\circ)^\circ = **(\mathcal{U})$ wird mit $\mathcal{U}$ identifiziert

• $(f^t)^t$ wird mit f identifiziert!

F) Der Dualraum eines euklidischen Raumes

Satz 19.29:

Sei V ein endlich-dim. euklidischer Raum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$.

ⓐ $\phi : V \longrightarrow V^* : x \mapsto \langle x, \cdot\rangle$ ist ein Isomorphismus.

ⓑ Seien $f^* \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ die zu f adjungierte Abb. und sei $f^t \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V^*)$ die zu f transponierte Abb., dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f^*} & V \\ \phi \downarrow \cong & \circlearrowleft & \cong \downarrow \phi \\ V^* & \xrightarrow{f^t} & V^* \end{array}$$

d.h. $\boxed{f^* = \phi^{-1} \circ f^t \circ \phi}$

ⓒ Sei $\mathcal{U} \leq V$, dann: $\phi_| : \mathcal{U}^\perp \xrightarrow{\cong} \mathcal{U}^\circ$ ist ein Isomorphismus!

Beweis:

ⓐ Wenn $b = \langle\cdot,\cdot\rangle$, dann ist $\phi = \phi_b$ aus 19.3 und ist damit K-linear!

Seien $x, x' \in V$ mit $\phi(x) = \phi(x')$.

$\Rightarrow \quad 0 = (\phi(x) - \phi(x'))(x-x') = \phi(x)(x-x') - \phi(x')(x-x')$

$= \langle x, x-x'\rangle - \langle x', x-x'\rangle = \langle x-x', x-x'\rangle$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \langle\cdot,\cdot\rangle \text{ definit}}}{\Longrightarrow} \quad x - x' = 0 \quad \Rightarrow x = x' \quad \Rightarrow \phi$ ist injektiv.

Weil $\dim_K V = \dim_K V^* < \infty \quad \Rightarrow \phi$ ist auch surjektiv!

(b) Seien $x, y \in V$.

$$\Rightarrow \quad (f^t \circ \phi)(x)(y) = \left(f^t(\phi(x))\right)(y) = (\phi(x) \circ f)(y)$$

$$= \phi(x)\left(f(y)\right) = \langle x, f(y)\rangle = \langle f^*(x), y\rangle$$

$$= \phi(f^*(x))(y) = (\phi \circ f^*)(x)(y)$$

$$\Rightarrow \quad (f^t \circ \phi)(x) = (\phi \circ f^*)(x) \quad \forall x \in V$$

$$\Rightarrow \quad f^t \circ \phi = \phi \circ f^* \quad \Rightarrow \quad \phi^{-1} \circ f^t \circ \phi = f^*$$

(c) Sei $x \in \mathcal{U}^\perp$. Dann gilt für $u \in \mathcal{U}$:

$$0 = \langle x, u\rangle = \phi(x)(u) \quad \Rightarrow \phi(x) \in \mathcal{U}^0$$

Also: $\quad \phi|: \mathcal{U}^\perp \to \mathcal{U}^0$ und $\phi|$ ist injektiv, wegen (a).

Wegen $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U} = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{U}^0$,

ist $\phi|$ auch surjektiv $\square$

§ 20 Multilineare Abbildungen und das Tensorprodukt

A) Definition und Eindeutigkeit des Tensorproduktes

Def. 20.1:
Seien $V, V_1, \dots, V_n$ K-Vektorräume. Dann heißt eine Abbildung $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V$ multilinear, wenn φ linear in jeder Komponente ist,

d.h. $\forall\, x_i, y_i \in V_i$, $i = 1, \dots, n$, $\forall\, \lambda, \mu \in K$:

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x_i + \mu \cdot y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$
$$\lambda \cdot \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots x_n) + \mu \cdot \varphi(x_1, \dots, y_i, \dots x_n).$$

Wenn $n = 2$, dann heißt φ auch bilinear.

Setze: $\mathrm{Mult}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V) := \{\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to V \mid \varphi \text{ multilinear}\}$.

Beispiel 20.2:

ⓐ $V_1 = \dots = V_n = K^n$, $V = K$:

$\det : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n} \longrightarrow K : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det(x_1 \cdots x_n)$

ist multilinear!

ⓑ Jede Bilinearform ist multilinear.

ⓒ · $K[t] = \{ \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in K\}$ ist ein K-VR mit Basis $(t^0, t^1, t^2, \dots)$

· $K[x_1, x_2] = \{ \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} \cdot x_1^i \cdot x_2^j \mid m, n \in \mathbb{N}, a_{ij} \in K\}$ ist ein K-VR mit Basis $(x_1^i \cdot x_2^j \mid i, j \in \mathbb{N})$

· $K[t] \times K[t] \longrightarrow K[x_1, x_2] : (f, g) \longmapsto f(x_1) \cdot g(x_2)$ ist bilinear, da auf $K[x_1, x_2]$ das Distributivgesetz sowie das Assoziativ- & Kommutativgesetz gelten."

ⓓ $k[t]_{\le d} = \{ f \in k[t] \mid \deg(f) \le d \}$

$$\Rightarrow \quad k[t]_{\le d} \times k[t]_{\le d} \longrightarrow k[t]_{\le 2d} : (f,g) \mapsto f \cdot g$$

ist bilinear

<u>Def. 20.4:</u>

Seien $V_1, \dots, V_n$ k-Vektorräume. Ein Tupel (V, φ) mit $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V$ multilinear heißt Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_n$, wenn (V, φ) folgender universeller Eigenschaft genügt: $\forall\, \psi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow W$ multilinear

$$\exists_1\, f_\psi : V \longrightarrow W \text{ s.d. } f \circ \varphi = \psi .$$

<u>d.h.:</u>

$$\begin{tikzcd} V_1 \times \dots \times V_n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & V \arrow[d, dotted, "\exists_1 f_\psi"] \\ & W \end{tikzcd}$$

(das Diagramm kommutiert)

Wir nennen die Elemente in V dann auch Tensoren und die Elemente in $\mathrm{Im}(\varphi)$ reine Tensoren.

<u>Bsp. 20.5:</u>

$\varphi : k^m \times k^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, k) : (x,y) \longmapsto x \circ y^t$

ist bilinear und erfüllt die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes nach ÜA 5,

d.h. $(\mathrm{Mat}(m \times n, k), \varphi)$ ist ein Tensorprodukt von k^m und k^n.

Satz 20.6 (Eindeutigkeit des Tensorproduktes)

Seien $V_1, \dots, V_n$ K-Vektorräume und (V, φ) und (W, ψ) zwei Tensorprodukte von $V_1, \dots, V_n$, dann

$$\exists_1 \; f_\psi : V \xrightarrow{\cong} W \quad \text{s.d.} \quad f_\psi \circ \varphi = \psi .$$

Beweisskizze

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d, "\exists_1 f_\psi"] \arrow[dd, bend left=60, "\exists_1 g"] \\
V_1 \times \dots \times V_n \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, "\exists_1 f_\varphi"] \\
 & V
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_\varphi \circ f_\psi} \circ \varphi = f_\varphi \circ \underbrace{f_\psi \circ \varphi}_{= \psi} = f_\varphi \circ \psi = \varphi$$

d.h. $g \circ \varphi = \varphi$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{dabei} & g = f_\varphi \circ f_\psi & \text{tut's} \\ \text{aber} & g = id_V & \text{tut's auch} \end{array}\right\} \Rightarrow f_\varphi \circ f_\psi = id_V$$

Analog: $f_\psi \circ f_\varphi = id_W \Rightarrow f_\psi$ ist ein Isom.

& eindeutig mit $f_\psi \circ \varphi = \psi$ $\square$

Notation 20.7

Bezeichne das Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_n$ (wenn es existiert) mit $V_1 \otimes_K \dots \otimes_K V_n$ oder kurz mit $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$.

Zudem schreiben wir für die reinen Tensoren

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n := \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

und wir sparen uns dann φ!

Bsp. 20.8:

$$K^m \otimes K^n = \mathrm{Mat}(m \times n, K) \quad \underline{\text{und}} \quad x \otimes y = x \circ y^t$$

Bem. 20.3:

$\mathrm{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_n, V)$ ist ein Unterraum von

$$V^{V_1 \times \cdots \times V_n} = \{ f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V \mid f \text{ Abb.} \},$$

weil die Summe zweier multilinearer Abb. und das Skalarvielfache einer multilin. Abb. wieder multilin. Abb. sind.

B) Existenz des Tensorproduktes

Lemma 20.9: (Fortsetzungssatz für bilineare Abbildungen)

Seien V, W und $\mathcal{U}$ K-Vektorräume und $B = (x_i \mid i \in I)$ sei eine Basis von V und $D = (y_j \mid j \in J)$ eine Basis von W. Ferner sei $(z_{ij} \mid i \in I, j \in J)$ eine Familie von Vektoren in $\mathcal{U}$.

Dann: $\exists_1\, \varphi : V \times W \to \mathcal{U}$ bilinear, s.d. $\varphi((x_i, y_j)) = z_{ij}$ $\forall i \in I, j \in J$.

Sind $x = \sum\limits_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_i x_i$ und $y = \sum\limits_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \mu_j \cdot y_j$, dann gilt:

$$\boxed{\varphi((x, y)) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \lambda_i \cdot \mu_j \cdot z_{ij}}.$$

Beweis: ÜA 5, Blatt 2. $\square$

Satz 22.10:

Seien V und W K-VRe, dann gibt es einen K-VR $V \otimes W$ und eine bilineare Abb. $\varphi: V \times W \to V \otimes W$, so dass $(V \otimes W, \varphi)$ ein Tensorprodukt von V & W ist.

Beweis:

Seien $B = (x_i \mid i \in I)$ und $D = (y_j \mid j \in J)$ zwei Basen von V bzw. W.

Betrachte den K-VR

$$K^{I \times J} = \{ g: I \times J \longrightarrow K \mid g \text{ ist eine Abb.} \}$$

aller Abbildungen von $I \times J$ nach K,

sowie den Unterraum

$$V \otimes W := \{ g \in K^{I \times J} \mid \# \{ (i,j) \in I \times J \mid g(i,j) \neq 0 \} < \infty \}.$$

Denke: $g, h \in V \otimes W \Rightarrow$
- $g + h : I \times J \to K$ nimmt nur an endlich vielen Stellen Werte ungleich null an
- $\lambda \cdot g : I \times J \to K$ nimmt nur dort Werte ungleich null an, wo g ungleich null ist $(\lambda \in K)$

Für $(i,j) \in I \times J$ betrachten wir die Abbildung

$$x_i \otimes y_j : I \times J \longrightarrow K : (k,l) \longmapsto \delta_{ik} \cdot \delta_{jl} \cdot 1_K = \begin{cases} 1_K, & (k,l) = (i,j) \\ 0_K, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_i \otimes y_j \in V \otimes W.$$

Dann ist $\mathcal{C} := (x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J)$ ist eine Basis von $V \otimes W$, dabei sei $\alpha \in V \otimes W$, dann: $\alpha = \sum_{\substack{(i,j) \in I \times J \\ \text{endlich}}} \alpha(i,j) \cdot x_i \otimes y_j$

und die Darstellung ist offenbar eindeutig!

Lemma 20.9 $\Rightarrow \exists_1 \ \varphi : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ bilinear mit

$\varphi(x_i, y_j) = x_i \otimes y_j$ für $(i,j) \in I \times J$.

und dabei gilt für $x = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_i x_i$ und $y = \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \mu_j y_j$

$$x \otimes y := \varphi(x,y) = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \lambda_i \cdot \mu_j \cdot x_i \otimes y_j .$$

Zeige nun: Sei $\psi : V \times W \to U$ bilinear, dann $\exists_1 \ f_\psi : V \otimes W \to U$ mit $\boxed{f_\psi \circ \varphi = \psi}$,

Sei $\psi : V \times W \to U$ bilinear gegeben.

Für $(i,j) \in I \times J$ setze: $\boxed{z_{ij} := \psi(x_i, y_j)} \in U$.

$\Rightarrow \exists_1 \ f_\psi : V \otimes W \to U$ mit $\boxed{f_\psi(x_i \otimes y_j) = z_{ij}}$, weil $\mathcal{C} = (x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J)$ Basis von $V \otimes W$.

Sei nun $x = \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_i x_i \in V$ und $y = \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \mu_j y_j \in W$.

$$\Rightarrow \boxed{(f_\psi \circ \varphi)(x,y)} = f_\psi(\varphi(x,y)) = f_\psi(\varphi(\textstyle\sum \lambda_i x_i, \sum \mu_j y_j))$$

$$= f_\psi\Big(\sum_i \lambda_i \sum_j \mu_j \cdot \underbrace{\varphi(x_i, y_j)}_{= x_i \otimes y_j}\Big) = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \cdot \underbrace{f_\psi(x_i \otimes y_j)}_{= z_{ij}}$$

$$= \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j z_{ij} = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j \psi(x_i, y_j)$$

$$= \psi\left(\sum_i \lambda_i x_i, \sum_j \mu_j y_j\right) = \boxed{\psi(x, y)}$$

$\Rightarrow$ $f_\psi \circ \varphi = \psi$ und die Eindeutigkeit von f_ψ folgt aus der eindeutigen Fortsetzbarkeit lin. Abb. (s.o.) ∎

Korollar 20.11:

Sind $\mathcal{B} = (x_i \mid i \in I)$ eine Basis von V und $\mathcal{D} = (y_j \mid j \in J)$ eine Basis von W, dann besitzt das Tensorprodukt $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ die Basis $(x_i \otimes y_j \mid (i,j) \in I \times J)$.

$x_i \otimes y_j = \varphi(x_i, y_j)$

Insbesondere: $\dim_K V = m$ und $\dim_K W = n$, dann

$$\dim_K V \otimes W = m \cdot n.$$

Korollar 20.12:

Jeder Tensor in $V \otimes W$ ist Summe endlich vieler reiner Tensoren, i.a. nicht eindeutig!

Bew.:

Seien $\mathcal{B} = (x_i \mid i \in I)$ & $\mathcal{D} = (y_j \mid j \in J)$ Basen von V bzw. W.

Denn: für $x = \sum \lambda_i x_i$ und $y = \sum \mu_j y_j$ gilt

$$x \otimes y = \sum_i \sum_j \lambda_i \mu_j (x_i \otimes y_j) = \sum_i \sum_j (\lambda_i \mu_j \cdot x_i) \otimes y_j = \sum_i \sum_j x_i \otimes (\lambda_i \mu_j y_j)$$

∎

Bsp. 20.13:

20.2 $\Rightarrow$ $b: k[t] \times k[t] \longrightarrow k[x,y] : (f,g) \mapsto f(x) \cdot g(y)$

ist bilinear

$\Rightarrow \exists_1 \; f_b : k[t] \otimes_k k[t] \longrightarrow k[x,y]$ linear

mit $f_b(f \otimes g) = f(x) \cdot g(y)$

Dabei:
- $(t^i \otimes t^j \mid i,j \in \mathbb{N})$ ist Basis von $k[t] \otimes k[t]$
- $(x^i y^j \mid i,j \in \mathbb{N})$ " " " $k[x,y]$
- $f_b(t^i \otimes t^j) = x^i y^j$ für $i,j \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow f_b$ bildet eine Basis auf eine Basis ab

  $\Rightarrow f_b$ ist ein Isomorphismus

D.h.: $k[t] \otimes_k k[t] \cong k[x,y]$

Satz 20.14 (Existenz des Tensorprodukts)

Seien $V_1, \dots, V_n$ k-VRe.

Dann $\exists \; \varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ multilinear,

die ein Tensorprodukt von $V_1, \dots, V_n$ ist.

Wenn $(x_{ij} \mid j \in J_i)$ eine Basis von V_i $(i = 1, \dots, n)$,

dann ist $(x_{1j_1} \otimes \dots \otimes x_{nj_n} \mid (j_1, \dots, j_n) \in J_1 \times \dots \times J_n)$

eine Basis von $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$.

Insbesondere: $\dim_k V_1 \otimes \dots \otimes V_n = \prod_{i=1}^n \dim_k V_i$.

Zudem: jeder Tensor ist eine endl. Summe reiner Tensoren.

Korollar 20.15:

Seien $V_1, \dots, V_n, V$ K-Vektorräume.

Dann: $f : \mathrm{Mult}_K(V_1 \times \dots \times V_n, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, V)$

$$\psi \longmapsto f_\psi$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Sei $\varphi : V_1 \times \dots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ das Tensorprodukt.

Zeige: $f(\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi) = \lambda \cdot f(\psi) + \mu \cdot f(\pi)$ für $\psi, \pi \in \mathrm{Mult}(\dots)$, $\lambda, \mu \in K$

Dazu: $f(\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi) \circ \varphi = f_{\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi} \circ \varphi = \lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi$

$$\|$$

$$(\lambda \cdot f(\psi) + \mu \cdot f(\pi)) \circ \varphi = \lambda \cdot [f(\psi) \circ \varphi] + \mu \cdot [f(\pi) \circ \varphi] = \lambda \cdot \underbrace{(f_\psi \circ \varphi)}_{=\psi} + \mu \cdot \underbrace{(f_\pi \circ \varphi)}_{=\pi}$$

$\overset{\text{Univ. Eig. des TP}}{\Longrightarrow}$ $f(\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi) = \lambda \cdot f(\psi) + \mu \cdot f(\pi)$

$$\left[\; \overset{\|}{f_{\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi}} \; \right]$$

Zeige: f bijektiv

- $g \in \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes \dots \otimes V_n, V) \implies g \circ \varphi : V_1 \times \dots \times V_n \to V$ multilinear

$\overset{\text{univ.}}{\underset{\text{Eig.}}{\Longrightarrow}}$ $g = f_{g \circ \varphi} = f(g \circ \varphi) \implies f$ surjektiv

- Eindeutigkeit von f_ψ in universeller Eigenschaft $\implies f$ injektiv.

$\square$

c) Tensoren als Matrizen und der Rang eines Tensors

Definition 20.16

Seien V und W zwei k-Vektorräume und $0 \neq z \in V \otimes W$.

Dann heißt $\operatorname{rang}(z) := \min \{ r \geq 1 \mid \exists x_1, \ldots, x_r \in V, y_1, \ldots, y_r \in W : z = \sum_{i=1}^{r} x_i \otimes y_i \}$

= minimale Anzahl reiner Tensoren, so daß z die Summe von diesen ist

der Rang des Tensors z.

Lemma 20.17:

$A \in \operatorname{Mat}(m \times n, k)$ hat Rang 1 $\Leftrightarrow \exists \underset{\neq 0}{x} \in k^m, \underset{\neq 0}{y} \in k^n : A = x \circ y^t$

Beweis:

"$\Leftarrow$" Sei $A = x \circ y^t$ mit $\overset{\neq 0}{x} \in k^m$ und $\overset{\neq 0}{y} \in k^n$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} y_1 \cdot x & y_2 \cdot x & \cdots & y_n \cdot x \end{pmatrix} \Rightarrow SR(A) = \operatorname{Im}(f_A) = \operatorname{Lin}(y_1 x, \ldots, y_n x)$

$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \dim_k \operatorname{Im}(f_A) = \dim_k \underbrace{\operatorname{Lin}(y_1 \cdot x, \ldots, y_n \cdot x)}_{= \operatorname{Lin}(x)} = 1$

weil mind. ein $y_i \cdot x \neq 0$

"$\Rightarrow$" Sei $A \in \operatorname{Mat}(m \times n, k)$ mit $\operatorname{rang}(A) = 1$

$\Rightarrow \exists i : \forall j : \exists \lambda_j : a^j = \lambda_j \cdot a^i$

$\Rightarrow A = \underset{\underset{x \neq 0}{\parallel}}{a^i} \circ \underbrace{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}_{=: y^t \neq 0} = x \circ y^t$ $\square$

Lemma 20.18:

Seien $A_1, \ldots, A_k \in \operatorname{Mat}(m \times n, k)$. Dann: $\operatorname{rang}(A_1 + \cdots + A_k) \leq \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rang}(A_i)$

Beweis: Seien zunächst 2 Matrizen $A, B \in Mat(m \times n, K)$ mit $A = (a^1 \cdots a^n)$ und $B = (b^1 \cdots b^n)$.

$$\Rightarrow \quad a^i + b^i \in Lin(a^1, \dots, a^n, b^1, \dots, b^n) = SR(A) + SR(B)$$

$$\Rightarrow \quad SR(A+B) = Lin(a^1+b^1, \dots, a^n+b^n) \subseteq SR(A) + SR(B)$$

$$\Rightarrow \quad rang(A+B) = \dim_K SR(A+B) \leq \dim_K (SR(A) + SR(B))$$

$$= \dim_K SR(A) + \dim_K SR(B) - \dim_K (SR(A) \cap SR(B))$$

$$\leq \dim_K SR(A) + \dim_K SR(B) = rang(A) + rang(B).$$

Die allgemeine Aussage folgt dann mit Induktion nach k! $\square$

Satz 20.19 (Tensorrang gleich Matrixrang)

① $\exists_1 \; \alpha : K^m \otimes_K K^n \xrightarrow[\text{linear}]{} Mat(m \times n, K)$ mit $\alpha(x \otimes y) = x \cdot y^t$ für alle $x \in K^m$, $y \in K^n$

② α ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

③ $\forall A \in Mat(m \times n, K)$: $\underset{\text{Matrixrang}}{rang}(A) = \underset{\text{Tensorrang}}{rang}(\alpha^{-1}(A))$

④ Die Bilder der reinen Tensoren (≠0) sind genau die Matrizen vom Rang 1.

Beweis

① $\varphi : K^m \times K^n \longrightarrow Mat(m \times n, K) : (x, y) \mapsto x \circ y^t$ ist bilinear

$$\Rightarrow \quad \exists_1 \; \alpha := f_\varphi : K^m \otimes K^n \xrightarrow[\text{lin.}]{} Mat(m \times n, K) \text{ mit } \alpha \circ \varphi = \varphi$$

d.h. $\quad \alpha(x \otimes y) = \boxed{x \circ y^t} \quad \Rightarrow$ ①

② Beachte: $E = (e_1, \dots, e_m)$ kanonische Basis von K^m und

$F = (f_1, \dots, f_n)$ " " " K^n

$\Rightarrow$ $(e_i \otimes f_j \mid i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ ist Basis von $K^m \otimes K^n$

und $(E_{ij} \mid i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n)$ ist Basis von $\mathrm{Mat}(m\times n, K)$

"Matrix mit 1 an der Stelle (i,j) und 0 sonst"

$$\Rightarrow \quad \alpha(e_i \otimes f_j) = e_i \circ f_j^t = E_{ij}$$

$\Rightarrow$ α bildet eine Basis auf eine Basis ab

$\Rightarrow$ α ist ein Isomorphismus.

(4) 20.17 $\Rightarrow$ die Bilder der reinen Tensoren $(\neq 0)$ sind genau die Rang 1 Matrizen

(3) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m\times n, K)$ mit $r := \mathrm{rang}(A)$ und $k := \mathrm{rang}(\alpha^{-1}(A))$.

z.z.: $k = r$.

"$r \leq k$": $k = \mathrm{rang}(\alpha^{-1}(A)) \Rightarrow \exists\, T_1, \dots, T_k$ reine Tensoren

mit $\alpha^{-1}(A) = T_1 + \dots + T_k$

$$\Rightarrow A = \alpha(\alpha^{-1}(A)) = \alpha(T_1 + \dots + T_k) = \alpha(T_1) + \dots + \alpha(T_k)$$

$$\Rightarrow r = \mathrm{rang}(A) \underset{20.19}{\leq} \underbrace{\mathrm{rang}(\alpha(T_1))}_{1} + \dots + \underbrace{\mathrm{rang}(\alpha(T_k))}_{1} = k$$

"$r \geq k$": 6.32 $\Rightarrow \exists\, S \in GL_m(K),\ T \in GL_n(K)$ s.d.

$$S \circ A \circ T = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{rr}$$

$$\Rightarrow A = S^{-1} \circ E_{11} \circ T^{-1} + \dots + S^{-1} \circ E_{rr} \circ T^{-1}$$

$$= (S^{-1} \circ e_1) \circ (f_1^t \circ T^{-1}) + \dots + (S^{-1} \circ e_r) \circ (f_r^t \circ T^{-1})$$

d.h. A ist Summe von r Rang 1 Matrizen

$$\Rightarrow \alpha^{-1}(A) = \underbrace{\alpha^{-1}(S^{-1} \circ E_{11} \circ T^{-1})}_{\text{reiner Tensor}} + \dots + \underbrace{\alpha^{-1}(S^{-1} \circ E_{rr} \circ T^{-1})}_{\text{reiner Tensor}} \Rightarrow k \leq r$$

$\square$

Korollar 20.20:

Jede Matrix vom Rang r läßt sich als Summe von r Rang-1-Matrizen schreiben, aber nicht als Summe von weniger.

Beispiel 20.22:

$$T = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^3 \otimes \mathbb{Q}^3$$

Aufgabe: berechne $\operatorname{rang}(T)$!

STOP

$$\alpha(T) = A = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\1 & 1 & 1\\2 & 2 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6 & 9 & 12\\4 & 6 & 8\\6 & 9 & 12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 13 & 17\\6 & 9 & 12\\9 & 13 & 17\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(T) = \operatorname{rang}(\alpha(T)) = \operatorname{rang}(A) = 2 \qquad \square$$

Beispiel 20.24:

Schreibe $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\3 & 7 & 1 & 5\\4 & 7 & -1 & 9\end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}(3\times 4, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ als Summe reiner Tensoren!

STOP

1. Schritt: Berechne die Normalform von A

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 1\!\!1_3 \\ \hline 1\!\!1_4 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -1 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \xmapsto[\text{Z: III} \mapsto \text{III} - 4\cdot \text{I}]{\text{Z: II} \mapsto \text{II} - 3\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

$$\xmapsto{\text{Z: III} \mapsto \text{III} + \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right) \xmapsto{\text{S: II} \mapsto \text{II} - 2\cdot \text{I}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

$$\xmapsto[\text{S: IV} \mapsto \text{IV} - 2\cdot \text{I} + \text{II}]{\text{S: III} \mapsto \text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{cccc|ccc} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{=NF(A)} & & & & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 1 \end{matrix}}_{=S} & & \\ \hline \underbrace{\begin{matrix} 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{=T} & & & & & 0 & \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S \circ A \circ T = NF(A) = E_{11} + E_{22}$$

2. Schritt: Berechne S^{-1} und T^{-1}!

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Schritt:

A = 1. Spalte von S^{-1} $\circ$ 1. Zeile von T^{-1} + 2. Spalte von S^{-1} $\circ$ 2. Zeile von T^{-1}

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ (1\ 2\ 0\ 2) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ (0\ 1\ 1\ -1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D) Rechenregeln für Tensoren und Tensorprodukte

Lemma 20.25:

Seien V und W k-Vektorräume und $x, x' \in V$, $y, y' \in W$ und $\lambda \in k$.

Dann: ⓐ $x \otimes (y + y') = (x \otimes y) + (x \otimes y')$

$(x + x') \otimes y = (x \otimes y) + (x' \otimes y)$

ⓑ $\lambda \cdot (x \otimes y) = (\lambda \cdot x) \otimes y = x \otimes (\lambda \cdot y)$

ⓒ $0 \otimes y = x \otimes 0 = 0$

Die Aussagen verallgemeinern sich für das Tensorprodukt von beliebig vielen Vektorräumen.

Bew.: Sei $\varphi : V \times W \to V \otimes W$ das Tensorprodukt,

dann: ⓐ & ⓑ sind genau die Bilinearität von φ,

denn: $\lambda \cdot (x \otimes y) = \lambda \cdot \varphi(x, y) = \varphi(\lambda x, y) = (\lambda x) \otimes y$

Rest analog

ⓒ Folgt aus ⓑ mit $\lambda = 0$ $\square$

Beispiel 20.27:

ⓐ Sei V ein k-VR.

Dann $\exists_1$ $f : V \otimes_k k \xrightarrow{\cong} V$ mit $f(x \otimes \lambda) = \lambda \cdot x$ $\forall \lambda \in k, x \in V$.

Zudem gilt:
- $f^{-1} : V \to V \otimes_k k : x \mapsto x \otimes 1$
- Jeder Tensor in $V \otimes_k k$ ist ein reiner Tensor!

Dazu: $\varphi : V \times k \to V : (x, \lambda) \mapsto \lambda \cdot x$ ist bilinear

$\Rightarrow \exists_1$ $f : V \otimes_k k \xrightarrow{\text{lin.}} V$ mit $f(x \otimes \lambda) = \lambda \cdot x$ $\forall \lambda \in k, x \in V$

Zeige: f ist surjektiv. Klar: $x \in V \Rightarrow x = f(x \otimes 1) \in \mathrm{Im}(f)$

Zeige: jeder Tensor ist von der Form $x \otimes 1$.

Sei $z = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes \lambda_i \in V \otimes_K K$ mit $\lambda_i \in K$, $x_i \in V$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i \otimes \lambda_i \cdot 1) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i \cdot x_i \otimes 1)$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i}_{=:x}\Big) \otimes 1 = x \otimes 1$$

Zeige: f injektiv

Denn: $z \in \ker(f) \Rightarrow \exists x \in V: z = x \otimes 1$

$\Rightarrow 0 = f(z) = f(x \otimes 1) = 1 \cdot x = x$

$\Rightarrow z = x \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0 \Rightarrow f$ injektiv $\square$

(b) Bem: i.a. ist nicht jeder Tensor ein reiner Tensor!

Bsp: $E = (e_1, e_2)$ sei die kanonische Basis von K^2

Zeige: $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ ist kein reiner Tensor

Ang. doch, d.h. $\exists x, y \in K^2: x \otimes y = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$

$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $y = \lambda_1' e_1 + \lambda_2' e_2$

$$x \otimes y = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2) \otimes (\lambda_1' e_1 + \lambda_2' e_2)$$

$$= \lambda_1 \cdot \lambda_1' \cdot e_1 \otimes e_1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2' \cdot e_1 \otimes e_2 + \lambda_2 \cdot \lambda_1' \cdot e_2 \otimes e_1 + \lambda_2 \cdot \lambda_2' e_2 \otimes e_2$$

Koeffizientenvergleich

$B = (e_i \otimes e_j \mid i,j = 1,2)$ ist Basis von $K^2 \otimes K^2$

$$\lambda_1 \lambda_1' = \lambda_2 \cdot \lambda_2' = 0 \ \wedge\ \lambda_1 \cdot \lambda_2' = \lambda_2 \cdot \lambda_1' = 1$$

↯

Also: $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ ist kein reiner Tensor

$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{hat nicht Rang } 1 \right]$

Lemma 20.28:

Seien V, W, U k-Vektorräume. Dann:

ⓐ $\exists_1\ f: V\otimes W \xrightarrow{\cong} W\otimes V$ mit $\boxed{f(x\otimes y) = y\otimes x}$ $\forall x\in V,\ y\in W$

ⓑ $\exists_1\ (V\otimes W)\otimes U \xrightarrow{\cong} V\otimes(W\otimes U) \xrightarrow{\cong} V\otimes W\otimes U$

s.d. $(x\otimes y)\otimes z \mapsto x\otimes(y\otimes z) \longmapsto x\otimes y\otimes z$ $\quad\forall x\in V, y\in W, z\in U$

ⓒ $\exists_1\ (V\oplus W)\otimes U \xrightarrow{\cong} (V\otimes U)\oplus(W\otimes U)$

s.d. $(x,y)\otimes z \longmapsto (x\otimes z,\ y\otimes z)$ $\quad\forall x\in V, y\in W, z\in U$

ⓓ $\exists_1\ k\otimes V \xrightarrow{\cong} V$ mit $\lambda\otimes x \longmapsto \lambda\cdot x$ $\quad\forall \lambda\in k, x\in V$

Beweis:

ⓐ Betrachte: $\varphi: V\times W \longrightarrow W\otimes V : (x,y)\mapsto y\otimes x$

ist bilinear

$\Rightarrow \exists_1\ \boxed{f_\varphi: V\otimes W \longrightarrow W\otimes V \text{ lin. mit } f_\varphi(x\otimes y) = y\otimes x \quad \forall x\in V, y\in W}$

Betrachte: $\psi: W\times V \longrightarrow V\otimes W : (y,x)\mapsto x\otimes y$

$\Rightarrow \exists_1\ f_\psi: W\otimes V \longrightarrow V\otimes W$ lin. mit $f_\psi(y\otimes x) = x\otimes y$

Dann: $(f_\varphi\circ f_\psi)(y\otimes x) = y\otimes x = \mathrm{id}_{W\otimes V}(y\otimes x)$

$(f_\psi\circ f_\varphi)(x\otimes y) = x\otimes y = \mathrm{id}_{V\otimes W}(x\otimes y)$

für alle $x\in V,\ y\in W$

$\Rightarrow f_\varphi\circ f_\psi = \mathrm{id}_{W\otimes V},\quad f_\psi\circ f_\varphi = \mathrm{id}_{V\otimes W}$,

weil sie auf dem Erzeugensystem "reine Tensoren" übereinstimmen $\Rightarrow f_\varphi$ ist Isom.

Rest: analog! $\quad\square$

E) Das Tensorprodukt von linearen Abbildungen & Matrizen

Proposition 20.30

Seien $f \in \mathrm{Hom}_K(V,V')$, $g \in \mathrm{Hom}_K(W,W')$, $f' \in \mathrm{Hom}_K(V',V'')$

und $g' \in \mathrm{Hom}_K(W',W'')$.

ⓐ $\exists_1\ f\otimes g : V\otimes W \to V'\otimes W'$ linear mit

$$\forall\, x\otimes y \in V\otimes W :\ (f\otimes g)(x\otimes y) = f(x)\otimes g(y).$$

ⓑ Es gilt: $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g) = (f'\circ f)\otimes(g'\circ g) \in \mathrm{Hom}_K(V\otimes W, V''\otimes W'')$

Beweis: ⓐ Beachte: $\psi : V\times W \to V'\otimes W' : (x,y)\mapsto f(x)\otimes g(y)$ ist bilinear

$\Rightarrow \exists_1\ f_\psi : V\otimes W \xrightarrow[\text{lin.}]{} V'\otimes W'$ mit $f_\psi(x\otimes y) = \psi(x,y) = f(x)\otimes g(y)$

$f_\psi =: f\otimes g$

ⓑ $(f'\otimes g')\circ(f\otimes g)$ und $(f'\circ f)\otimes(g'\circ g)$ sind lineare Abb. von $V\otimes W$ nach $V''\otimes W''$ und es gilt:

$$\big((f'\otimes g')\circ(f\otimes g)\big)(x\otimes y) = f'\otimes g'\,(f(x)\otimes g(y)) = f'(f(x))\otimes g'(g(y))$$

$$\big((f'\circ f)\otimes(g'\circ g)\big)(x\otimes y) = (f'\circ f)(x)\otimes(g'\circ g)(y)$$

$\Rightarrow$ die beiden Abb. stimmen auf den reinen Tensoren überein, und da diese ein Erzeugendensystem von $V\otimes W$ bilden, sind sie identisch! $\square$

Beispiel 20.31 (Komplexifizierung)

Sei V ein $\mathbb{R}$-VR mit Basis $B = (x_j \mid j\in I)$.

Dann heißt $V_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ die Komplexifizierung von V

$\Rightarrow$ $V_{\mathbb{C}}$ ist ein $\mathbb{R}$-VR mit Basis

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} := (1 \otimes x_j, \; i \otimes x_j \mid j \in I) \text{ als } \mathbb{R}\text{-VR}$$

$$\Rightarrow \forall x \in V_{\mathbb{C}} \quad \exists_1 \, a_j, b_j \in \mathbb{R} : \quad x = \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} a_j \cdot (1 \otimes x_j) + \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} b_j \cdot (i \otimes x_j)$$

$$= \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \underbrace{\overbrace{(a_j + b_j \cdot i)}^{\in \mathbb{C}}}_{=: \lambda_j} \otimes x_j = \sum_{\substack{j \in J \\ \text{endl.}}} \underset{\in \mathbb{C}}{\lambda_j} \otimes x_j \qquad (*)$$

Mache $V_{\mathbb{C}}$ zu einem $\mathbb{C}$-VR durch:

für $\lambda \in \mathbb{C}$, $x = \sum_{j=1}^{q} \underset{\in \mathbb{C}}{a_j} \otimes \underset{\in V}{z_j}$: $\quad \lambda \cdot x := \sum_{j=1}^{k} (\lambda \cdot a_j) \otimes z_j$

(rechne nach: $V_{\mathbb{C}}$ wird so ein $\mathbb{C}$-VR!)

Dann gilt in $(*)$: $\quad x = \sum_{\substack{j \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_j \otimes x_j = \sum_{\substack{j \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_j \cdot (1 \otimes x_j)$

mit eindeutigen $\lambda_j \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} := (1 \otimes x_j \mid j \in I)$ ist eine Basis von $V_{\mathbb{C}}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum !

Sei nun $I = \{1, \dots, n\}$, dann erhalten wir die Karte

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n ; \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \mapsto \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot e_j$$

$$\Rightarrow \quad id_{\mathbb{C}} \otimes \phi_B : V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{C}^n$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \otimes x_j \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \otimes e_j \triangleq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot e_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

ist ein Isomorphismus von $\mathbb{R}$-Vektorräumen

und sie ist $\mathbb{C}$-linear, also ein Isom. von $\mathbb{C}$-VRen.

Beispiel 20.32:

Seien $A \in Mat(n' \times n, K)$ und $B = Mat(m' \times m, K)$

$$\Rightarrow \quad f_A : K^n \to K^{n'}, \; x \mapsto A \circ x \quad \text{und} \quad f_B : K^m \to K^{m'}, \; y \mapsto B \circ y$$

$$\Rightarrow \quad f_A \otimes f_B : \begin{tikzcd} K^n \otimes K^m \arrow[r] \arrow[d, "\phi_D"] & K^{n'} \otimes K^{m'} \arrow[d, "\phi_{D'}"] \\ K^{n \cdot m} \arrow[r, "f_M"] & K^{n' \cdot m'} \end{tikzcd}$$

$f_k \mapsto$ k-ter kanon. Basisvektor in $K^{m \cdot n}$ $= e_k \in K^{n \cdot m}$

kanon. Basisvektoren in K^n

kanon. Basisvektoren in K^m

wobei $\cdot \; D = (e_i \otimes e_j \mid i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m)$

$\quad = (f_{(i-1) \cdot m + j} \mid i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m)$

$\cdot \; D'$ und $\phi_{D'}$ analog!

$\cdot \; M = M^{D}_{D'}(f_A \otimes f_B)$

Dann gilt:

$$Mat(n'm' \times n \cdot m, K) \ni$$

$$M = M^{D}_{D'}(f_A \otimes f_B) = A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{11} \cdot B & \cdots & a_{1n} \cdot B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n'1} \cdot B & \cdots & a_{n'n} \cdot B \end{pmatrix}$$

denn $f_A \otimes f_B (e_i \otimes e_j) = A \cdot e_i \otimes B \cdot e_j$

$$= \sum_{k=1}^{n'} a_{ki} \cdot e_k \otimes \sum_{l=1}^{m'} b_{lj} \cdot e_l$$

$$= \sum_{k=1}^{n'} \sum_{l=1}^{m'} a_{ki} \cdot b_{lj} \cdot e_k \otimes e_l \quad \rightsquigarrow \text{richtig sortieren!}$$

Konkretes Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A \in \mathrm{Mat}(2\times 2, \mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}(2\times 3, \mathbb{R})$

$$\rightsquigarrow \quad A \otimes B = \begin{pmatrix} 1 \cdot B & 2 \cdot B \\ 0 \cdot B & 1 \cdot B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lemma 20.33

Seien $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(W, W')$.

Dann: $\mathrm{Im}(f \otimes g) = \mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(g)$

Beweis:

Sei $(x_i \mid i \in I)$ Basis von V und $(y_j \mid j \in J)$ Basis von W.

$\Rightarrow$ $(f(x_i) \mid i \in I)$ ist ein EZS von $\mathrm{Im}(f)$ und

$(g(y_j) \mid j \in J)$ - - - - - - - - - $\mathrm{Im}(g)$ und

$(x_i \otimes y_j \mid i \in I, j \in J)$ ist Basis von $V \otimes W$

$\Rightarrow$ $(f(x_i) \otimes g(y_j) \mid i \in I, j \in J)$ ist ein EZS von $\mathrm{Im}(f \otimes g)$

und ein EZS von $\mathrm{Im}(f) \otimes \mathrm{Im}(g)$ $\square$

Bsp. 20.34 (Tensorprodukt von Unterräumen)

Seien $\underset{\text{Lin}(x_1,\dots,x_n)}{\overset{\|}{V}} \leq k^{n'}$ und $\underset{\text{Lin}(y_1,\dots,y_m)}{\overset{\|}{W}} \leq k^{m'}$.

Finde ein EZS für $V \otimes W$ in $k^{n'} \otimes k^{m'} \cong k^{n'\cdot m'}$:

Definiere: $A = (x_1 \dots x_n) \in \text{Mat}(n' \times n, k)$

$B = (y_1 \dots y_m) \in \text{Mat}(m' \times m, k)$

$\Rightarrow V = \text{Lin}(\text{Spalten von } A) = \text{Im}(f_A)$

$W = \text{Lin}(\text{Spalten von } B) = \text{Im}(f_B)$

$\Rightarrow V \otimes W = \text{Im}(f_A) \otimes \text{Im}(f_B) = \text{Im}(f_A \otimes f_B) \leq k^{m'n'}$

ist erzeugt von den Spalten von $A \otimes B$

F) Tensorprodukt und Dualraum

Proposition 20.35:

Seien V und W zwei endlich-dimensionale k-Vektorräume.

(a) $\exists_1\ \alpha : V^* \otimes W^* \xrightarrow[\text{linear}]{\cong} (V \otimes W)^*$ mit der Eigenschaft

$\alpha(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \cdot g(y) = \langle f, x\rangle \cdot \langle g, y\rangle$

für alle $f \in V^*$, $g \in W^*$, $x \in V$, $y \in W$.

(b) $\exists_1\ \beta : V^* \otimes W \xrightarrow[\text{linear}]{\cong} \text{Hom}_k(V, W)$ mit der Eigenschaft

$\beta(f \otimes y)(x) = f(x) \cdot y = \langle f, x\rangle \cdot y$

für alle $f \in V^*$, $y \in W$, $x \in V$.

Beweis:

ⓐ Sei $(f,g) \in V^* \times W^*$.

$$\langle f,x\rangle \cdot \langle g,y\rangle$$

Setze: $\varphi_{f,g} : V \times W \longrightarrow K : (x,y) \mapsto f(x)\cdot g(y)$ ist bilinear

$\Rightarrow \exists_1$ "$f_{\varphi_{f,g}}$": $V \otimes W \xrightarrow[\text{linear}]{} K$ mit $x \otimes y \mapsto f(x)\cdot g(y)$ $\forall x \in V,\ y \in W$

Def: $\psi : V^* \times W^* \longrightarrow (V\otimes W)^* : (f,g) \mapsto$ "$f_{\varphi_{f,g}}$"

ist bilinear (folgt aus univ. Eigenschaft des TPs)

$\Rightarrow \exists_1$ $\alpha : V^* \otimes W^* \xrightarrow[\text{linear}]{} (V\otimes W)^*$

mit $\alpha(f\otimes g)(x\otimes y) = \psi(f,g)(x\otimes y)$

$= f_{\varphi_{f,g}}(x\otimes y) = f(x)\cdot g(y)$

Zeige noch: α ist bijektiv.

Sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ Basis von V und $D = (y_1, \dots, y_m)$ Basis von W.

$\Rightarrow B^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ & $D = (y_1^*, \dots, y_m^*)$ die dualen Basen

$\Rightarrow \mathcal{E} = (x_i^* \otimes y_j^* \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$ Basis von $V^* \otimes W^*$

Zudem: $\mathcal{D} := (x_i \otimes y_j \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$ Basis von $V\otimes W$

$\Rightarrow \mathcal{D}^* = ((x_i \otimes y_j)^* \mid i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m)$ die duale Basis

Beh: $\alpha(x_i^* \otimes y_j^*) = (x_i \otimes y_j)^*$ $\forall i,j$ (dann α bijektiv) (weil Basis auf Basis geht)

Dazu: $\alpha(x_i^* \otimes y_j^*)(x_k \otimes y_l) = x_i^*(x_k)\cdot y_j^*(y_l) = \delta_{ik}\cdot\delta_{jl} = (x_i \otimes y_j)^*(x_k \otimes y_l)$

(b) Seien $f \in V^*$ und $y \in W$.

Betrachte: $V \longrightarrow W : x \longmapsto f(x) \cdot y$ ist linear,

d.h. in $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

Also: $V^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W) : (f, y) \longmapsto f(\cdot) \cdot y$

ist bilinear

$\Rightarrow \exists_1 \; \beta : V^* \otimes W \xrightarrow{\text{linear}} \mathrm{Hom}_K(V, W)$ mit

$$f \otimes y \longmapsto f(\cdot) \cdot y$$

d.h. $\beta(f \otimes y)(x) = f(x) \cdot y \quad \forall f \in V^*, y \in W, x \in V$

Zeige noch: β ist bijektiv

Mit der Notation aus (c) gilt:

$(x_i^* \otimes y_j \mid i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m)$ Basis von $V^* \otimes W$

Beachte: $\exists_1 \; \varepsilon_{ij} : V \longrightarrow W$ linear mit $\varepsilon_{ij}(x_k) = \delta_{ik} \cdot y_j$

für alle $k = 1, \dots, n$

$\Rightarrow (\varepsilon_{ij} \mid i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m)$ Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$

$\updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow \cong M_D^B$

$(E_{ij} \mid i = 1, \dots, n, \; j = 1, \dots, m)$ Basis von $\mathrm{Mat}(m \times n, K)$

Behauptung: $\beta(x_i^* \otimes y_j) = \varepsilon_{ij}$

Denn: $\beta(x_i^* \otimes y_j)(x_k) = x_i^*(x_k) \cdot y_j = \delta_{ik} \cdot y_j = \varepsilon_{ij}(x_k)$

für alle $k = 1, \dots, n$.

Also: β bildet Basis auf Basis ab und ist deshalb bijektiv. $\square$

§21 Die Dehninvariante als Anwendung des Tensorproduktes

Bemerkung 21.1: (3. Hilbertsches Problem)

Gegeben seien zwei Polytope P und Q gleichen Volumens. Kann man P in kleine Polytope zerschneiden und so wieder zusammensetzen, dass man Q erhält?

Definition 21.2:

(a) Seien $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^3$.

Dann: $\mathrm{conv}(p_1, \dots, p_r) := \left\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \;\middle|\; \lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1,\ \lambda_i \geq 0 \right\}$

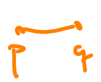
heißt die konvexe Hülle von $p_1, \dots, p_r$.

(b) $P \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt ein Polytop, wenn $P = \mathrm{conv}(p_1, \dots, p_r)$ für $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^3$ geeignet.

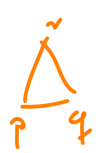
(c) Ein Polytop P heißt volldimensional, wenn P in keiner Ebene enthalten ist.

Beispiel 21.3:

(a) $p \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathrm{conv}(p) = \{p\}$

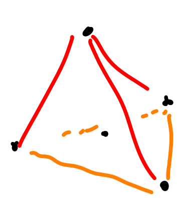


(b) $p, q \in \mathbb{R}^3,\ p \neq q \Rightarrow \mathrm{conv}(p,q) = \{ \lambda \cdot p + (1-\lambda) \cdot q \mid \lambda \in [0,1] \}$
$= \text{Strecke } \overline{pq}$



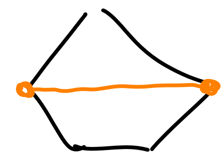
(c) $p, q, r \in \mathbb{R}^3$ Punkte, nicht auf einer gemeinsamen Geraden
$\Rightarrow \mathrm{conv}(p,q,r) = $ Dreieck mit Eckpunkten p, q, r

(d) $\mathrm{conv}(4$ Punkte, nicht in einer Ebene$)$ = volldimensionales Polytop
= Tetraeder



Bem. 21.4:

- Ein volldim. Polytop $P = \operatorname{conv}(p_1, \dots, p_r)$ hat Ecken, Kanten und Seiten, die den Rand des Polytops bilden.
- Die Ecken von P sind eine Teilmenge von $\{p_1, \dots, p_r\}$.
- Jede Kante ist Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte, aber nicht umgekehrt.



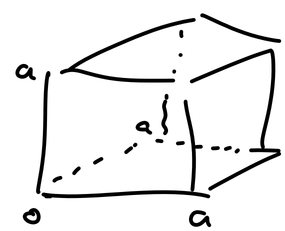
- Zwei Seiten von P treffen immer an einer Kante K zusammen und die Seiten schließen im Innern des Polytops einen Winkel φ_K ein, der zwischen 0 & π liegt (im Bogenmaß).

- P volldimensional $\Leftrightarrow$ 3-dim. Volumen von $P > 0$

Bsp. 21.5:

$$W = \operatorname{conv}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\a\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix} \right)$$

= Würfel mit Kantenlänge $a > 0$ ist ein volldim. Polytop.



Wenn wir den Punkt $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}a\\a\\a\end{pmatrix}$ dazunehmen, ändert sich die konvexe Hülle nicht.

Bemerkung 21.6:

Erlaubte Operation:

Zerschneide das Polytop P mittels einer Ebene, die nicht durch zwei Eckpunkte gehen darf in zwei kleinere Polytope P_1 & P_2.

Dehns Strategie:

① Ordne jedem Polytop P einen Tensor $D(P) \in \mathbb{R}/_{\pi\cdot\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ zu.

② Zeige: P sich in P_1 & P_2 zerlegen lässt, dann
$$D(P) = D(P_1) + D(P_2)$$

③ $\exists$ Polytope P & Q mit $V(P) = V(Q)$, aber $D(P) \neq D(Q)$

Definition 21.7:

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ ein volldim. Polytop und $\mathcal{K}(P) = \{K \mid K \text{ Kante von } P\}$.

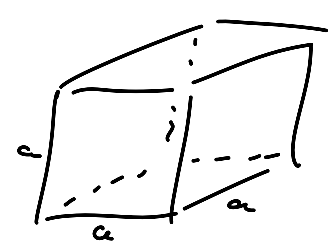
Dann heißt
$$D(P) := \sum_{K \in \mathcal{K}(P)} \overline{\varphi_K} \otimes \ell_K \in \mathbb{R}/_{\pi\cdot\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$$

die Dehninvariante von P,

wobei φ_K = Winkel, den die benachbarten Seiten an K einschließen

ℓ_K = Länge der Kante K.

Bsp. 21.8:



Würfel W hat 12 Kanten der Länge a und an jeder Kante ist der Winkel $\varphi_K = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow D(W) = 12 \cdot \overline{\tfrac{\pi}{2}} \otimes a = 12 \cdot \left(\overline{\pi} \otimes \tfrac{a}{2}\right) = 0$$
$$\overline{\pi} = \overline{0}$$

Satz 21.9:

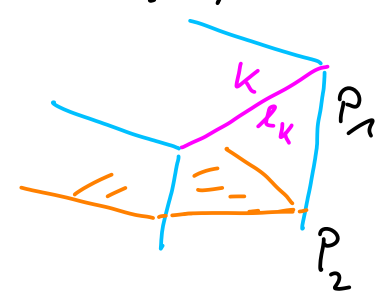
Die Dehninvariante ist zerschneidungsinvariant,
d.h. wenn zwei Polytope P_1 und P_2 aus P durch Zerschneiden wie in Bem. 21.6 hervorgehen,
dann $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$.

Beweis:

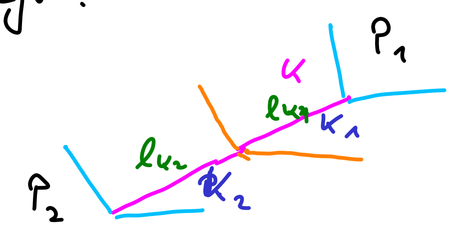
Ziel: verstehen, wie die Kanten in den Polytopen P_1 & P_2 entstehen und welchen Beitrag sie zur Dehninvariante liefern!

1. Fall: Wenn eine Kante K von P beim Zerschneiden gar nicht getroffen wird, dann ist K eine Kante in genau einem der Polytope P_1 oder P_2

$\Rightarrow$ K liefert in $D(P_1) + D(P_2)$ denselben Beitrag wie in $D(P)$



2. Fall: Kanten in P_1 & P_2 können entstehen indem die Ebene eine Kante K von P in zwei K_1 in P_1 und K_2 in P_2 zerlegt!



$\Rightarrow$ $\ell_{K_1} + \ell_{K_2} = \ell_K$ und

$\varphi_{K_1} = \varphi_K = \varphi_{K_2}$

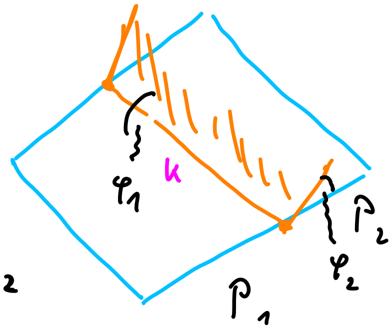
$$\Rightarrow \quad \overline{\varphi}_{K_1} \otimes \ell_{K_1} + \overline{\varphi}_{K_2} \otimes \ell_{K_2} = \overline{\varphi}_K \otimes \ell_{K_1} + \overline{\varphi}_K \otimes \ell_{K_2}$$

$$= \overline{\varphi}_K \otimes (\ell_{K_1} + \ell_{K_2}) = \overline{\varphi}_K \otimes \ell_K$$

$\Rightarrow$ die Kanten K_1 und K_2 liefern in $D(P_1) + D(P_2)$ denselben Beitrag wie K in $D(P)$

3. Fall: Wenn die Ebene eine Seite von P zerschneidet, so entsteht eine neue Kante k, die sowohl Kante in P_1 als auch in P_2 ist!

$\Rightarrow$ die neue Seite schließt an k in P_1 mit der geteilten Seite den Winkel φ_1 ein und in P_2 den Winkel φ_2



$\Rightarrow \quad \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$

$\Rightarrow$ k liefert in $D(P_1) + D(P_2)$ den Beitrag

$$\overline{\varphi_1} \otimes \ell_k + \overline{\varphi_2} \otimes \ell_k = \overline{\varphi_1 + \varphi_2} \otimes \ell_k = \overline{\pi} \otimes \ell_k = 0$$

Insgesamt erhalten wir: $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$. $\square$

Lemma 21.10

Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $n \geq 3$.

Dann: $\frac{1}{\pi} \cdot \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \notin \mathbb{Q}$.

Insbesondere: $\overline{0} \neq \overline{\varphi} \in \mathbb{R}/\pi \cdot \mathbb{Q}$, wobei $\varphi = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Beweis:

Additionstheorem: $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ $(*)$

Setze: $\alpha := (k+1) \cdot \varphi_n$, $\beta := (k-1) \cdot \varphi_n$, $\varphi_n := \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \cos\left((k+1) \cdot \varphi_n\right) = 2 \cdot \cos\left(k \cdot \varphi_n\right) \cdot \cos\left(\varphi_n\right) - \cos\left((k-1) \cdot \varphi_n\right) \quad (**)$$

für alle $k \geq 1$.

Zeige mit Induktion nach k:

$$\forall k \geq 0 \ \exists A_k \in \mathbb{Z} \setminus n\cdot\mathbb{Z} : \quad \cos(k\cdot\varphi_n) = \frac{A_k}{\sqrt{n}^k} \qquad (***)$$

$k=0$, $k=1$: $\quad A_k = 1$ tut's, denn $\cos(0) = 1 = \frac{1}{\sqrt{n}^0}$

$$\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$k-1, k \mapsto k+1$: $\quad$ Setze: $A_{k+1} := 2\cdot A_k - n\cdot A_{k-1} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \cos((k+1)\cdot\varphi_n) \overset{(*)}{=} 2\cdot\cos(k\cdot\varphi_n)\cdot\cos(\varphi_n) - \cos((k-1)\cdot\varphi_n)$$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} 2\cdot\frac{A_k}{\sqrt{n}^k}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k-1}} = \frac{2\cdot A_k - n\cdot A_{k-1}}{\sqrt{n}^{k+1}}$$

$$= \frac{A_{k+1}}{\sqrt{n}^{k+1}}$$

noch z.z.: $\quad n \nmid A_{k+1}$!

$$\text{I.V.} \Rightarrow n \nmid A_k \underset{n \text{ ungerade}}{\Longrightarrow} n \nmid 2\cdot A_k$$

$$\Longrightarrow n \nmid 2\cdot A_k - n\cdot A_{k-1} = A_{k+1}$$

Also: $(***)$ ist damit gezeigt!

Ang.: $\quad \frac{\varphi_n}{\pi} \in \mathbb{Q}$

$$\Longrightarrow \exists \underset{\geq 1}{k}, l \in \mathbb{Z} : \quad \frac{\varphi_n}{\pi} = \frac{l}{k} \qquad (****)$$

Beachte, arccos nimmt nur in $[0, \pi]$

$$\Rightarrow 0 < \varphi_n < \pi$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{l}{k} = \frac{\varphi_n}{\pi} < 1$$

$$\Rightarrow k \geq 2 \qquad \underset{(****)}{\Longrightarrow} \qquad k\cdot\varphi_n = l\cdot\pi$$

$$\Rightarrow \frac{A_k}{\sqrt{n}^{\,k}} \underset{(***)}{=} \cos(k\cdot\varphi_n) = \cos(\underset{\in\mathbb{Z}}{l}\cdot\pi) = \pm 1$$

wobei $A_k \in \mathbb{Z}\setminus n\cdot\mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \underset{\in\mathbb{Z}\setminus n\cdot\mathbb{Z}}{A_k} = \pm\sqrt{n}^{\,k} = \pm\, n\cdot\sqrt{n}^{\,k-2}$$

1. Fall: k gerade oder n Quadratzahl

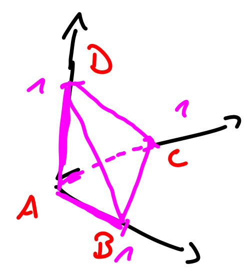
$$\Rightarrow \sqrt{n}^{\,k-2}\in\mathbb{Z} \Rightarrow n \mid A_k \quad ↯$$

2. Fall: k ungerade und n keine Quadratzahl

$$\Rightarrow \sqrt{n}^{\,k-2}\notin\mathbb{Z} \Rightarrow A_k\notin\mathbb{Z} \quad ↯$$

Also: $\frac{\varphi_n}{\pi}\notin\mathbb{Q}$.

Proposition 21.11:



Sei $\Delta = \mathrm{conv}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

$=$ Standardsimplex im $\mathbb{R}^3$.

Dann: $D(\Delta)\neq 0$.

Beweis: Setze $A := \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $C := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

1. Fall: die Kanten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ haben die Länge 1 und schließen mit den benachbarten Seiten den Winkel $\frac{\pi}{2}$ ein!

$\rightarrow$ jede Kante liefert den Beitrag $\frac{\pi}{2}\otimes 1 = \underset{\hat{=}\,0}{\pi}\otimes\frac{1}{2} = 0$

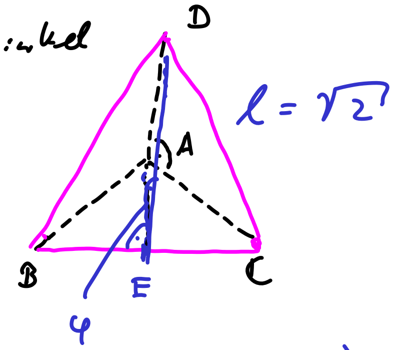
2. Fall: die Kanten $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$

Bestimme die Länge l der drei Kanten und den Winkel φ, den sie mit den Seiten einschließen!

• $\Delta(ADC)$ hat bei A einen rechten Winkel

$$\overset{\text{Pyth.}}{\Longrightarrow} |\overline{DC}|^2 = |\overline{AD}|^2 + |\overline{AC}|^2 = 2$$

$$\Longrightarrow \underbrace{|\overline{DC}|}_{= \ell} = \sqrt{2}$$



• Sei E Mittelpunkt von $\overline{BC}$

$$\varphi = \measuredangle AED = \arccos\left(\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{DE}|}\right)$$

$\Delta(ADE)$ ist rechtwinklig

• $\Delta(BDE)$ ist rechtwinklig

$$\Longrightarrow |\overline{DE}|^2 = |\overline{BD}|^2 - |\overline{BE}|^2 = \sqrt{2}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow |\overline{DE}| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

• $\Delta(ABE)$ ist rechtwinklig

$$\Longrightarrow |\overline{AE}|^2 = |\overline{AB}|^2 - |\overline{BE}|^2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow |\overline{AE}| = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

• Damit $\varphi = \arccos\left(\frac{|\overline{AE}|}{|\overline{DE}|}\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\right) = \underbrace{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{= \varphi_3}$

$\Longrightarrow$ jede der 3 Kanten liefert den Beitrag

$$\bar{\varphi} \otimes \ell = \bar{\varphi}_3 \otimes \sqrt{2}$$

Damit: $D(\Delta) = 3 \cdot 0 + 3 \cdot \bar{\varphi}_3 \otimes \sqrt{2} = \underbrace{\bar{\varphi}_3}_{\neq 0} \otimes \underbrace{(3 \cdot \sqrt{2})}_{\neq 0} \neq 0$

21.10

$\square$

Korollar 21.12

Es gibt 2 Polytope P & Q gleichen Volumens mit unterschiedlichen Dehninvariante, d.h. P und Q können nicht durch Zerschneiden und Zusammensetzen ineinander überführt werden!

Beweis:

Sei P = Standardsimplex aus 21.11 und sei V = Volumen von P

und $a := \sqrt[3]{V}$ und W = Würfel mit Seitenlänge a

$\Rightarrow$ Volumen von $W = a^3 = V$ und $D(W) = 0 \neq D(P)$

$\Rightarrow$ fertig mit 21.9. $\square$

Satz 21.14 (Sydler, 1965)

Wenn zwei Polytope P & Q dasselbe Volumen und dieselbe Dehninvariante haben, dann können sie durch zerschneiden und zusammensetzen ineinander überführt werden!

§ 22 Das äußere Produkt

A) Definition und Eindeutigkeit des r-fachen äußeren Produktes

Def. 22.1:

Seien V und W zwei k-Vektorräume und $r \geq 1$.

Dann heißt eine multilineare Abbildung $f : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{r;\ V^r} \to W$

alternierend, wenn $f(x_1, \ldots, x_r) = 0$ falls $x_i = x_j$ für ein $i \neq j$.

Satze: $\mathrm{Alt}_k(V^r, W) := \{ f : V^r \to W \mid f \text{ multilin. \& alternierend} \}$

Offenbar: $\mathrm{Alt}_k(V^r, W)$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Mult}_k(V^r, W)$.

Bsp. 22.2:

Sei $V = k^n$ und $W = k$ und für $x_1, \ldots, x_n \in k^n$ sei $A(x_1, \ldots, x_n)$ die Matrix mit den Spalten $x_1, \ldots, x_n$.

Dann: $\det : V^n = \underbrace{k^n \times \cdots \times k^n}_{n} \to k;\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(A(x_1, \ldots, x_n))$

ist multilinear und alternierend, nach Satz 10.11.

Definition 22.4:

Sei V ein k-Vektorraum und $r \geq 1$.

Ein Paar $(\mathcal{U}, \varphi)$ mit $\mathcal{U}$ ein k-VR und $\varphi : V^r \to \mathcal{U}$ multilinear und alternierend heißt r-faches äußeres Produkt von V

$:\Longleftrightarrow$ $\forall\ \psi : V^r \to W$ multilinear und alternierend

$\exists_1\ f_\psi : \mathcal{U} \to W$ linear, s.d. $f_\psi \circ \varphi = \psi$

d.h.

$$\begin{tikzcd} V^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{U} \arrow[d, dotted, "\exists_1 f_\psi \text{ linear}"] \\ & W \end{tikzcd}$$

Die Elemente von $\mathcal{U}$ heißen Produkte und die in $\mathrm{Im}(\varphi)$ reine Produkte oder zerlegbar.

Satz 22.5:

Sei V ein k-VR und $r \geq 1$. Wenn $(\mathcal{U}, \varphi)$ und (W, ψ) zwei r-fache äußere Produkte von V, dann:

$$\exists_1 \; f_\psi : \mathcal{U} \xrightarrow{\cong} W \quad \text{mit} \quad f_\psi \circ \varphi = \psi.$$

Beweisskizze:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \arrow[d, dashed, "\exists_1 f_\psi \text{ linear}"] \\
V^r \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & W \arrow[d, dashed, "\exists_1 f_\varphi \text{ linear}"] \\
 & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_\psi \circ \varphi = \psi} \;\wedge\; f_\varphi \circ \psi = \varphi$$

$$\Downarrow$$

$$(f_\varphi \circ f_\psi) \circ \varphi = \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{U}} \circ \varphi$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U} \arrow[dd, dashed, "\exists_1 \tilde{f}_\varphi \text{ linear}"] \\
V^r \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

, d.h. $\tilde{f}_\varphi \circ \varphi = \varphi$

Beachte: $\tilde{f}_\varphi \circ \varphi = (f_\varphi \circ f_\psi) \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{U}} \circ \varphi$

Eindeutigkeit von $\tilde{f}_\varphi$ $\Rightarrow$ $\mathrm{id}_{\mathcal{U}} = \tilde{f}_\varphi = f_\varphi \circ f_\psi$

Analog: $f_\psi \circ f_\varphi = \mathrm{id}_W$. $\Rightarrow$ f_ψ ist ein Isomorphismus! $\square$

Notation 22.6:

- $\Lambda^r V :=$ "das" r-fache äußere Produkt von $V := \mathcal{U}$
- $x_1 \wedge \dots \wedge x_r := \varphi(x_1, \dots, x_r)$

B) Existenz des r-fachen äußeren Produktes

Def. 22.7:

Sei V ein K-Vektorraum und $r \geq 1$.

Dann:
- $T^r(V) := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r}$, der r-fache Tensorprodukt von V.
- $V_r := \mathrm{Lin}\left(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \in T^r(V) \mid \exists\, i \neq j : x_i = x_j \right) \leq T^r(V)$

zudem: $T^0(V) := K$ und $V_0 := \{0\}$

Lemma 22.8:

Sei V ein K-VR und $\mathcal{U} \leq V$ und $\nu : V \longrightarrow V/\mathcal{U} : x \mapsto \bar{x}$.

Dann gilt: $\forall\, f : V \longrightarrow W$ linear mit $\mathrm{Ker}(f) \supseteq \mathcal{U}$

$\exists_1\, g : V/\mathcal{U} \longrightarrow W$, s.d. $\boxed{f = g \circ \nu}$

d.h.

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\nu"] \arrow[dr, "f"'] & V/\mathcal{U} \arrow[d, dashed, "\exists_1 g \text{ lin.}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
 & W
\end{tikzcd}$$

Beweis: Setze: $g : V/\mathcal{U} \longrightarrow W : \bar{x} \longmapsto f(x)$

Zeige: g ist wohldefiniert.

Seien $\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \exists\, u \in \mathcal{U} : x = y + u$

$$\Rightarrow \underset{g(\bar{x})}{\overset{\|}{f(x)}} = f(y+u) = f(y) + \underbrace{f(u)}_{\substack{=0 \\ \uparrow \\ \mathcal{U} \subseteq \mathrm{Ker}(f)}} = \underset{g(\bar{y})}{\overset{\|}{f(y)}}$$

Beachte: $(g \circ \nu)(x) = g(\bar{x}) \overset{!}{=} f(x) \Rightarrow g \circ \nu = f$

Zeige: g ist eindeutig mit $g \circ \nu = f$.

Sei dazu $h : V/\mathcal{U} \to W$ mit $h \circ \nu = f \Rightarrow h(\bar{x}) = (h \circ \nu)(x) = \underset{g(\bar{x})}{\overset{\|}{f(x)}}$

$\Rightarrow g = h$. $\square$

Satz 22.9:

Sei V ein K-VR und $r \geq 1$.

Dann: $\varphi : V^r \longrightarrow T^r(V)/V_r : (x_1, \dots, x_r) \longmapsto \overline{x_1 \otimes \dots \otimes x_r}$

ist ein r-faches äußeres Produkt von V.

Beweis:

Sei zunächst $\phi : V^r \longrightarrow T^r(V) : (x_1, \dots, x_r) \longmapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_r$

die multilin. Abb. des r-fachen Tensorproduktes.

$\Rightarrow \quad \varphi : V^r \xrightarrow[\text{multilin.}]{\phi} T^r(V) \xrightarrow[\text{linear}]{\nu} T^r(V)/V_r$ ist multilinear

$\varphi = \nu \circ \phi$

Zudem: $x_1, \dots, x_r \in V$ mit $x_i = x_j$ für ein $i \neq j$.

$\Rightarrow \quad x_1 \otimes \dots \otimes x_r \in V_r \quad \Rightarrow \quad 0 = \overline{x_1 \otimes \dots \otimes x_r} = \varphi(x_1, \dots, x_r)$

$\Rightarrow \quad \varphi$ ist alternierend!

Sei nun $\psi : V^r \longrightarrow W$ multilin. & alternierend.

univ. Eig. $\Rightarrow$ des Tensorprod.

$$\begin{tikzcd}
V^r \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "\psi"', "\substack{\text{multilin.}\\ \text{alternierend}}"'] \arrow[r, phantom, shift right=6, "Q"] & T^r(V) \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, dashed, "\exists_1 \tilde{f}_\psi"] & T^r(V)/V_r \arrow[dl, dashed, "\exists_1 f_\psi \text{ linear}"] \\
& W &
\end{tikzcd}$$

d.h. $f_\psi \circ \varphi = (f_\psi \circ \nu) \circ \phi = \tilde{f}_\psi \circ \phi = \psi$

Beachte: $V_r \subseteq \operatorname{Ker}(\tilde{f}_\psi)$

denn: $x_1 \otimes \dots \otimes x_r \in V_r$ mit $x_i = x_j$ für $i \neq j$

$\Rightarrow \quad 0 = \psi(x_1, \dots, x_r) = \tilde{f}_\psi(x_1 \otimes \dots \otimes x_r)$

Zeige: f_ψ ist eindeutig mit $f_\psi \circ \varphi = \psi$.

Sei also $g : T^r(V)/V_r \longrightarrow W$ lin. mit $g \circ \varphi = \psi$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} T^r(V) \arrow[r, "\nu"] & T^r(V)/V_r \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & W \quad \text{linear} \\ & V^r \arrow[ul, "\phi"] \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \quad ((g \circ \nu) \circ \phi)(x_1, \dots, x_r) = g(\overline{x_1 \otimes \dots \otimes x_r})$$

$$\psi(x_1, \dots, x_r) = (g \circ \varphi)(x_1, \dots, x_r)$$

$$\Rightarrow \quad g \circ \nu = \tilde{f}_\psi$$

$$\Rightarrow \quad g = f_\psi$$

$\boxed{\Sigma}$

Korollar 22.10:

Seien V und W zwei k-VR und $r \geq 1$.

Dann: $f: Alt_k(V^r, W) \longrightarrow Hom_k(\Lambda^r V, W) : \psi \longmapsto f_\psi$

ist ein Isomorphismus.

Beweis:

Sei $\varphi : V^r \longrightarrow \Lambda^r V$ die zugehör. altern. Abbild. des äuß. Produkts

Seien ferner $\psi, \pi \in Alt_k(V^r, W)$ und $\lambda, \mu \in k$.

$$\Rightarrow (\lambda \cdot f_\psi + \mu \cdot f_\pi) \circ \varphi(x_1, \dots, x_r) = \lambda \cdot \underbrace{f_\psi \circ \varphi}_{=\psi}(x_1, \dots, x_r) + \mu \cdot \underbrace{f_\pi \circ \varphi}_{=\pi}(x_1, \dots, x_r)$$

$$= \lambda \cdot \psi(x_1, \dots, x_r) + \mu \cdot \pi(x_1, \dots, x_r) = (\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi)(x_1, \dots, x_r)$$

$$\Rightarrow \boxed{(\lambda \cdot f_\psi + \mu \cdot f_\pi)} \circ \varphi = \lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi \underset{\text{univ. Eigensch.}}{\overset{!}{=}} \boxed{f_{\lambda \cdot \psi + \mu \cdot \pi}} \circ \varphi$$

$$\underset{\text{univ. Eigensch.}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\lambda \cdot f_\varphi + \mu \cdot f_\pi}_{\lambda \cdot f(\varphi) + \mu \cdot f(\pi)} = f_{\lambda\cdot\varphi + \mu\cdot\pi} = f(\lambda \cdot \varphi + \mu \cdot \pi)$$

$\Rightarrow$ f ist linear!

<u>Zeige:</u> f ist surjektiv

Sei $g : \Lambda^r V \to W$ linear $\Rightarrow$ $\overset{\psi}{\overbrace{g \circ \varphi}} : V^r \to W$ alt. & multil.

$\Rightarrow$ $g = f_\psi = f(\psi)$ $\Rightarrow$ f ist surjektiv.

<u>Zeige:</u> f injektiv

folgt aus der Eindeutigkeit von f_ψ $\square$

C) Rechenregeln für äußere Produkte

<u>Lemma 22.11:</u>

Sei V ein K-VR, $r \geq 1$, $x, x', y, y', x_1, \dots, x_r \in V$ und $\lambda \in K$.

(a) $x \wedge (y + y') = (x \wedge y) + (x \wedge y')$
$(x + x') \wedge y = (x \wedge y) + (x' \wedge y)$

(b) $\lambda \cdot (x \wedge y) = (\lambda \cdot x) \wedge y = x \wedge (\lambda \cdot y)$

(c) $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0$

(d) $x \wedge y = -(y \wedge x)$

(e) $x_1 \wedge \dots \wedge x_i \wedge \dots \wedge x_j \wedge \dots \wedge x_r = - x_1 \wedge \dots \wedge \underset{\text{Stelle } i}{x_j} \wedge \dots \wedge \underset{\text{Stelle } j}{x_i} \wedge \dots \wedge x_r$

Analog für r-fache Produkte!

<u>Beweis:</u> (a) & (b) Multilinearität von $\varphi : V^r \to \Lambda^r V$

(c) $0 \wedge x = 0 \cdot (x \wedge x) = 0$ (d) $0 = (x+y) \wedge (x+y) = \underbrace{x \wedge x}_{=0} + x \wedge y + y \wedge x + \underbrace{y \wedge y}_{=0}$ $\square$

D) Basen auf r-fachen äußeren Produkten

Proposition 22.131 Sei $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V.

(a) $\forall r > n$: $\Lambda^r V = \{0\}$

(b) $\forall\ 1 \le r \le n$: $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$ ist eine Basis von $\Lambda^r V$.

(c) $\forall\ 0 \le r \le n$: $\dim_K \Lambda^r V = \binom{n}{r}$, wobei $\Lambda^0 V := K$.

Beweis:
Beachte: $\Lambda^r V = T^r(V) / V_r$ und $B' = (x_{i_1} \otimes \dots \otimes x_{i_r} \mid 1 \le i_j \le n,\ j = 1, \dots, r)$ ist eine Basis von $T^r(V)$.

$\Rightarrow$ $(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_j \le n,\ j = 1, \dots, r)$ ist ein EZS von $\Lambda^r V$.

Beachte:
- $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} = 0$, wenn zwei der x_{i_j} gleich sind
- wenn man die Reihenfolge der x_{i_j} ändert, ändert sich nur ggf. das Vorzeichen

$\Rightarrow B := (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \mid 1 \le i_1 < \dots < i_r \le n)$ ist EZS von $\Lambda^r V$

$\Rightarrow$
- $\dim_K (\Lambda^r V) \le \binom{n}{r}$ für $1 \le r \le n$
- $\dim_K (\Lambda^r V) = 0$ für $r > n$, weil $B = \emptyset$

Betrachte eine Basis $D = (e_{i_1 i_2 \dots i_r} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_r \le n)$ von $K^{\binom{n}{r}}$.

Ziel: konstruiere Epimorphismus $f_\varphi : \Lambda^r V \longrightarrow K^{\binom{n}{r}}$.

| Konstruiere dazu eine alternierende, multilin. Abb. $\varphi : V^r \longrightarrow K^{\binom{n}{r}}$ und wende die universelle Eigenschaft an

Sei dazu $y = (a_1, \dots, a_r) \in \underbrace{V \times \dots \times V}_{r\text{-mal}} = V^r$ gegeben.

$\Rightarrow \exists_1\, a_{ij} \in K$: $a_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i$ Setze $A := (a_{ij})_{\substack{i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, r}} \in \mathrm{Mat}(n \times r, K)$

Für $(i_1, \dots, i_r)$ mit $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ sei:

$$A(i_1, \dots, i_r) := \det\left((a_{i_\ell j})_{\substack{\ell = 1,\dots,r \\ j = 1,\dots,r}} \right) = \det\left(\begin{matrix} \text{Matrix } A \text{ mit nur} \\ \text{den Zeilen } i_1, \dots, i_r \end{matrix} \right) \in K$$

ist der $r \times r$-Minor von A zu den Zeilen $i_1, \dots, i_r$

Def: $\psi : V \times \dots \times V \longrightarrow K^{\binom{n}{r}} ; (a_1, \dots, a_r) \longmapsto \sum\limits_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} A(i_1, \dots, i_r) \cdot e_{i_1 \dots i_r}$

ist alternierend und multilinear, da die Determinante alternierend & multilin. ist und die Matrixdarstellung bilinear ist.

$\underset{\text{univ. Eigenschaft}}{\Longrightarrow}$ $\exists_1 \; f_\psi : \Lambda^r V \longrightarrow K^{\binom{n}{r}}$

mit $f_\psi(a_1 \wedge \dots \wedge a_r) = \psi(a_1, \dots, a_r)$

$\Rightarrow$ $f_\psi(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r}) = \underbrace{A(i_1, \dots, i_r)}_{= 1 = \det(\mathbb{1}_r)} \cdot e_{i_1 \dots i_r} = e_{i_1 \dots i_r}$

$\Rightarrow$ f_ψ ist surjektiv, weil $\exists$ eine Basis von $K^{\binom{n}{r}}$

$\Rightarrow$ $\dim_K \Lambda^r V \geq \dim_K K^{\binom{n}{r}} = \binom{n}{r}$

$\Rightarrow$ $\dim_K \Lambda^r V = \binom{n}{r}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Basis von $K^{\binom{n}{r}}$

$\boxed{}$

Korollar 22.14:

Wenn V ein endlich-dimensionaler K-VR ist, dann gilt

$$\dim_K V = \max\{ r \geq 0 \mid \Lambda^r V \neq \{0\} \}$$

Korollar 22.15:

Sei V ein endlich-dim. K-VR und $x_1, \dots, x_r \in V$.

Dann: $(x_1, \dots, x_r)$ ist lin. abhängig $\Leftrightarrow$ $x_1 \wedge \dots \wedge x_r = 0$

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Sei $(x_1, \dots, x_r)$ linear abhängig.

$\Rightarrow$ o.E.: $\exists\, \lambda_2, \dots, \lambda_r \in K: \quad x_1 = \sum_{i=2}^{r} \lambda_i x_i$

$$\Rightarrow \quad x_1 \wedge \dots \wedge x_r = \left(\sum_{i=2}^{r} \lambda_i x_i\right) \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r = \overbrace{\sum_{i=2}^{r} \lambda_i \cdot \underbrace{(x_i \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_r)}_{=0}}^{=0}$$

„$\Leftarrow$“ Sei $(x_1, \dots, x_r)$ lin. unabh.

Ergänze die Familie zu einer Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V

$\underset{22.13}{\Rightarrow}$ $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$ ist ein Vektor in einer Basis von $\Lambda^r V$

$\Rightarrow$ $x_1 \wedge \dots \wedge x_r \neq 0$ $\square$

Bsp. 22.16:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; w + x + y + z = 0 \right\} = \text{Lös}\big((1\,1\,1\,1), 0\big)$$

$\Rightarrow$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von V,

da $\dim_{\mathbb{R}} V = 4 - \text{rang}\big((1\,1\,1\,1)\big) = 3$ und die Vektoren offenbar lin. unab. in V.

$\Rightarrow$ $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $\Lambda^2 V$

und

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine Basis von $\Lambda^3 V$.

E) Äußere Produkte linearer Abbildungen

Prop. 22.17: Seien $f \in Hom_K(V,W)$, $g \in Hom_K(W,\mathcal{U})$, $r \geq 1$.

ⓐ $\exists_1 \; \Lambda^r f : \Lambda^r V \xrightarrow[\text{linear}]{} \Lambda^r W$ mit $\Lambda^r f(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r)$.

ⓑ Es gilt: • $\Lambda^r(g \circ f) = \Lambda^r g \circ \Lambda^r f$

• $\Lambda^r(id_V) = id_{\Lambda^r V}$

Beweis:

ⓐ Betrachte: $\psi : V^r \longrightarrow \Lambda^r W : (x_1, \dots, x_r) \longmapsto f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r)$ ist multilinear & alternierend

$\overset{\text{univ.}}{\underset{\text{Eigensch.}}{\Longrightarrow}} \; \exists_1 \; f_\psi : \Lambda^r V \xrightarrow[\text{lin.}]{} \Lambda^r W$ mit $f_\psi(x_1, \dots, x_r) = \psi(x_1, \dots, x_r)$

$f_\psi \overset{!!}{=} \Lambda^r f$

ⓑ Sei $(x_1, \dots, x_r) \in V^r$. Dann gilt:

• $(\Lambda^r g \circ \Lambda^r f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \Lambda^r g\big(\Lambda^r f(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)\big)$

$= \Lambda^r g\big(f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r)\big) = g(f(x_1)) \wedge \dots \wedge g(f(x_r))$

$= (g \circ f)(x_1) \wedge \dots \wedge (g \circ f)(x_r)$

$\Rightarrow \; \Lambda^r g \circ \Lambda^r f$ ist eine lin. Abb., die die Eigenschaft von $\Lambda^r(g \circ f)$ erfüllt $\overset{\text{Eind.}}{\underset{ⓐ}{\Longrightarrow}} \; \Lambda^r g \circ \Lambda^r f = \Lambda^r(g \circ f)$

• Analog: $id_{\Lambda^r V}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = x_1 \wedge \dots \wedge x_r = id_V(x_1) \wedge \dots \wedge id_V(x_r)$

$\Rightarrow \; id_{\Lambda^r V}$ ist eine lin. Abb., die die Eigenschaft von $\Lambda^r(id_V)$ erfüllt $\overset{\text{Eind.}}{\underset{ⓐ}{\Longrightarrow}} \; id_{\Lambda^r V} = \Lambda^r(id_V)$

$\square$

Bsp. 22.18:

Sei $E = (e_1, e_2)$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und

$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 ;\ x \mapsto A \circ x$ mit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$

$\Rightarrow E' = (e_1 \wedge e_2)$ ist eine Basis von $\Lambda^2 \mathbb{R}^2$.

Es gilt: $\Lambda^2 f_A (e_1 \wedge e_2) = f_A(e_1) \wedge f_A(e_2) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

$= (a_{11} \cdot e_1 + a_{21} \cdot e_2) \wedge (a_{12} \cdot e_1 + a_{22} \cdot e_2)$

$= a_{11} e_1 \wedge a_{12} e_1 + a_{11} e_1 \wedge a_{22} e_2 + a_{21} e_2 \wedge a_{12} e_1 + a_{21} e_2 \wedge a_{22} e_2$

$= a_{11} \cdot a_{12} \cdot \underbrace{(e_1 \wedge e_1)}_{=0} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot (e_1 \wedge e_2) + a_{21} \cdot a_{12} \cdot (e_2 \wedge e_1) + a_{21} \cdot a_{22} \cdot \underbrace{(e_2 \wedge e_2)}_{=0}$

$\overset{(*)}{=} a_{11} \cdot a_{22} \cdot (e_1 \wedge e_2) + a_{21} \cdot a_{12} \cdot \underbrace{(e_2 \wedge e_1)}_{= -(e_1 \wedge e_2)}$

$\overset{(**)}{=} (a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) \cdot e_1 \wedge e_2 = \det(A) \cdot e_1 \wedge e_2$

Deshalb: $M^{E'}_{E'}(\Lambda^2 f_A) = (\det(A))$

Proposition 22.19:

Seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von V und $D = (y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von W.
Ferner sei $f \in Hom_K(V, W)$ mit $M^B_D(f) = (a_{ij}) \in Mat(m \times n, K)$, $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$.
Zudem seien $B' = (x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_r} \mid 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n)$ Basis von $\Lambda^r V$
und $D' = (y_{i_1} \wedge \dots \wedge y_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m)$ Basis von $\Lambda^r W$.
Schließlich bezeichne $A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r) := \det$ (Matrix, die die Zeilen aus A mit Indizes $i_1, \dots, i_r$ enthält und die Spalten mit den Indizes $j_1, \dots, j_r$)
den $r \times r$-Minor zu A mit den Zeilen $i_1, \dots, i_r$ und den Spalten
$j_1, \dots, j_r$, wobei $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m$, $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$.

Dann ist $M^{B'}_{D'}(\Lambda^r f) = \left(A(i_1, \dots, i_r \mid j_1, \dots, j_r) \right)_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq m \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n}}$

D.h. die Matrixdarstellung von $\Lambda^r f$ bzgl. B' & D' enthält genau alle $r \times r$-Minoren von $M^B_D(f)$ in schöner Anordnung!

Beweis:

$$\Lambda^r f(x_{j_1}\wedge\dots\wedge x_{j_r}) = f(x_{j_1})\wedge\dots\wedge f(x_{j_r})$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m} a_{i_1 j_1}\cdot y_{i_1}\wedge\dots\wedge\sum_{i_r=1}^{m} a_{i_r j_r}\cdot y_{i_r}$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m}\dots\sum_{i_r=1}^{m} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_r j_r}\cdot\underbrace{(y_{i_1}\wedge\dots\wedge y_{i_r})}_{=0,\text{ wenn die } i_l \text{ nicht paarweise verschieden sind}}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_r=1\\ i_1,\dots,i_r \text{ p.v. verschieden}}}^{m} a_{i_1 j_1}\cdots a_{i_r j_r}\cdot(y_{i_1}\wedge\dots\wedge y_{i_r})$$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{1\le i_1<\dots<i_r\le m}\underbrace{\left[\sum_{\sigma\in S_r} a_{i_{\sigma(1)} j_1}\cdots a_{i_{\sigma(r)} j_r}\cdot\operatorname{sgn}(\sigma)\right]}_{=A(i_1,\dots,i_r\mid j_1,\dots,j_r)} y_{i_1}\wedge\dots\wedge y_{i_r}$$

☐

Beispiel 22.23:

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x-y\\y+2z\end{pmatrix},\quad \tilde{E}=\left(\underset{\tilde e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}},\underset{\tilde e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{\tilde e_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}\right),\quad E=\left(\underset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}},\underset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}\right)$$

$\Rightarrow$ • $\tilde{E}' = (\tilde e_1\wedge\tilde e_2,\ \tilde e_1\wedge\tilde e_3,\ \tilde e_2\wedge\tilde e_3)$ Basis von $\Lambda^2\mathbb{R}^3$

• $E' = (e_1\wedge e_2)$ " " $\Lambda^2\mathbb{R}^2$

• $M_E^{\tilde E}(f) = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\quad M_{E'}^{\tilde E'}(\Lambda^2 f) = \left(\begin{vmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-1 & 0\\1 & 2\end{vmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

F) Äußeres Produkt und die Determinante

Korollar 22.21:

Sei $E=(e_1,\dots,e_n)$ die kanonische Basis des K^n, $a_1,\dots,a_r\in K^n$ und $A=(a_{ij})\in \mathrm{Mat}(n\times r,K)$ die Vektoren $a_1,\dots,a_r$ als Spalten.

Ferner bezeichne: $A(i_1,\dots,i_r):=A(i_1,\dots,i_r\,|\,1,\dots,r)=\det\begin{pmatrix}\text{Matrix, die aus}\\ \text{den Zeilen } i_1,\dots,i_r\\ \text{von } A \text{ besteht}\end{pmatrix}$

den $r\times r$-Minor von A zu den Zeilen $i_1,\dots,i_r$, wobei $1\le i_1<\dots<i_r\le n$

Dann gilt: $a_1\wedge\dots\wedge a_r=\sum\limits_{1\le i_1<\dots<i_r\le n}A(i_1,\dots,i_r)\cdot e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_r}$

Insbesondere $r=n \Rightarrow a_1\wedge\dots\wedge a_n=\det(A)\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$

Beweis: Sei $\tilde E=(\tilde e_1,\dots,\tilde e_r)$ die kanon. Basis des K^r

und $f_A: K^r\longrightarrow K^n: x\longmapsto A\circ x$

$$\Rightarrow a_1\wedge\dots\wedge a_r=f_A(\tilde e_1)\wedge\dots\wedge f_A(\tilde e_r)=\Lambda^r f_A\,(\underbrace{\tilde e_1\wedge\dots\wedge\tilde e_r}_{\in\Lambda^r K^r})$$

$$\overset{22.19}{=}\sum_{1\le i_1<\dots<i_r\le n}A(i_1,\dots,i_r)\cdot e_{i_1}\wedge\dots\wedge e_{i_r}$$

$\square$

Bsp. 22.22:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&3\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3=5\cdot e_1\wedge e_2\wedge e_3.$$

Kor 22.23:

Sei $f\in \mathrm{End}_K(V)$ und $n=\dim_K(V)$.

Dann: $\Lambda^n f:\Lambda^n V\longrightarrow\Lambda^n V: x\longmapsto \det(f)\cdot x$ Insb.: $\det(\Lambda^n f)=\det(f)$.

Beweis: Sei $B=(x_1,\dots,x_n)$ Basis von V und $B'=(x_1\wedge\dots\wedge x_n)$ Basis von $\Lambda^n V$ und $M_B^B(f)=:A\in\mathrm{Mat}_n(K)$

$\Rightarrow \det(f)=\det\left(M_B^B(f)\right)=A(1,\dots,n\,|\,1,\dots,n)$

und $M_{B'}^{B'}(\Lambda^n f)\overset{22.19}{=}\left(A(1,\dots,n\,|\,1,\dots,n)\right)=(\det(f))$

$\square$

Beispiel 22.24: (das Kreuzprodukt)

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \left(\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{= x}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{= y} \right) \longmapsto x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - y_2 x_3 \\ x_3 y_1 - y_3 x_1 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ ψ ist alternierend multilinear

Beachte: $M_B : \Lambda^3 \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R} : v \longmapsto M_B(v)$

$\Lambda^3\mathbb{R}^3 = \{ \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \}$, $\quad v = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \mapsto \lambda = M_B(v)$

wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$
und $B = (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)$ Basis von $\Lambda^3 \mathbb{R}^3$

Damit:
$$\psi(x,y) = x \times y = \begin{pmatrix} M_B(x \wedge y \wedge e_1) \\ M_B(x \wedge y \wedge e_2) \\ M_B(x \wedge y \wedge e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det(x\ y\ e_1) \\ \det(x\ y\ e_2) \\ \det(x\ y\ e_3) \end{pmatrix}$$

Denn:
$$x \wedge y \wedge e_1 = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot e_i \wedge \sum_{j=1}^3 y_j \cdot e_j \wedge e_1$$
$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i \cdot y_j \cdot \underbrace{(e_i \wedge e_j \wedge e_1)}_{= 0, \text{ wenn } i=1 \text{ oder } j=1}$$
$$= x_2 y_3 \cdot e_2 \wedge e_3 \wedge e_1 + x_3 y_2 \cdot e_3 \wedge e_2 \wedge e_1$$
$$= x_2 y_3 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 - x_3 y_2 \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$
$$= (x_2 y_3 - x_3 y_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$$

Rest analog.

G) Der allgemeine Laplacesche Entwicklungssatz

Def. 22.25:

Sei $\{1, \dots, n\} = \{i_1, \dots, i_r\} \cup \{j_1, \dots, j_s\}$ mit $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < \dots < j_s$.

Dann: $\varepsilon(i_1, \dots, i_r) := \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_s \end{pmatrix} \in \{1, -1\}$

Bemerk: das ist genau das Vorzeichen, das wir erhalten, wenn wir $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$ die Vektoren $x_{i_1}, \dots, x_{i_r}$ nach vorne tauschen, d.h.

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_n = \varepsilon(i_1, \dots, i_r) \cdot x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_r} \wedge x_{j_1} \wedge \dots \wedge x_{j_s}.$$

Lemma 22.26:

Für $1 \le i_1 < \dots < i_r \le n$ gilt: $\varepsilon(i_1, \dots, i_r) = (-1)^{\sum_{k=1}^{r} i_k - \binom{r+1}{2}}$

Beweis:

Sei $\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_r & j_1 & \cdots & j_s \end{array}\right)$ mit $j_1 < \dots < j_s$

und sei $1 \le k < l < n$.

Wann ist (k, l) ein Fehlstand von σ?

1. Fall: $k < l \le r \implies \sigma(k) = i_k < i_l = \sigma(l) \implies (k,l)$ kein Fehlstand

2. Fall: $r < k < l \implies \sigma(k) = j_k < j_l = \sigma(l) \implies (k,l)$ kein Fehlstand

3. Fall: $k \le r < l \implies (\sigma(k), \sigma(l)) = (i_k, j_l)$

$\implies (k, l)$ ist genau dann ein Fehlstand, wenn $j_l < i_k$

Halte k fest: $\implies j_l$ muss zwischen 1 und $i_k - 1$ liegen, damit (k, l) ein Fehlstand ist, aber j_l kann nicht $i_1, \dots, i_{k-1}$ sein, d.h. es gibt genau $(i_k - 1) - (k-1) = i_k - k$ Möglichkeiten für j_l

Also: $\#\{(k,l) \mid (k,l) \text{ ist Fehlstand}\} = \sum_{k=1}^{r} (i_k - k)$

$$= \sum_{k=1}^{r} i_k - \sum_{k=1}^{r} k = \sum_{k=1}^{r} i_k - \binom{r+1}{2} .$$

□

Satz 22.27 (Allgemeiner Laplacescher Entwicklungssatz)

Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$ und sei $\{1,\ldots,n\} = \{i_1,\ldots,i_r\} \cup \{j_1,\ldots,j_s\}$ mit $i_1 < \cdots < i_r$ und $j_1 < \cdots < j_s$.

Dann: $\det(A) = \varepsilon(i_1,\ldots,i_r) \cdot \sum_{\substack{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n \\ \{1,\ldots,n\} = \{k_1,\ldots,k_r\} \cup \{l_1,\ldots,l_s\} \\ 1 \le l_1 < \cdots < l_s \le n}} \varepsilon(k_1,\ldots,k_r) \cdot A(k_1,\ldots,k_r \mid i_1,\ldots,i_r) \cdot A(l_1,\ldots,l_s \mid j_1,\ldots,j_s)$

Beweis: Seien $a_1,\ldots,a_n$ die Spalten von A.

$\Rightarrow \quad a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \det(A) \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$

Ziel: zerlege das Produkt auf der linken Seite so, daß die Formel für $\det(A)$ abfällt.

Bemerk: ① $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = \varepsilon(i_1,\ldots,i_r) \cdot (a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_r}) \wedge (a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_s})$

② $a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_r} \overset{22.21}{=} \sum_{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n} A(k_1,\ldots,k_r \mid i_1,\ldots,i_r) \cdot e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r}$

③ $a_{j_1} \wedge \cdots \wedge a_{j_s} \overset{22.21}{=} \sum_{1 \le l_1 < \cdots < l_s \le n} A(l_1,\ldots,l_s \mid j_1,\ldots,j_s) \cdot e_{l_1} \wedge \cdots \wedge e_{l_s}$

$$\underset{①-③}{\Longrightarrow} \quad a_1 \wedge \cdots \wedge a_n \overset{\varepsilon(i_1,\ldots,i_r)}{=} \sum_{\substack{1 \le k_1 < \cdots < k_r \le n \\ 1 \le l_1 < \cdots < l_s \le n}} A(k_1,\ldots,k_r \mid i_1,\ldots,i_r) \cdot A(l_1,\ldots,l_s \mid j_1,\ldots,j_s) \cdot e_{k_1} \wedge \cdots \wedge e_{k_r} \wedge e_{l_1} \wedge \cdots \wedge e_{l_s}$$

$$= \varepsilon(i_1,\dots,i_r)\cdot \sum_{\substack{1\le k_1<\dots<k_r\le n\\ 1\le l_1<\dots<l_s\le n\\ \{1,\dots,n\}=\{k_1,\dots,k_r\}\,\dot\cup\,\{l_1,\dots,l_s\}}} A(k_1,\dots,k_r|i_1,\dots,i_r)\cdot A(l_1,\dots,l_s|j_1,\dots,j_s)\cdot \underbrace{e_{k_1}\wedge\dots\wedge e_{k_r}\wedge e_{l_1}\wedge\dots\wedge e_{l_s}}_{=\varepsilon(k_1,\dots,l_s)\cdot e_1\wedge\dots\wedge e}$$

$$= \left(\varepsilon(i_1,\dots,i_r)\cdot \sum_{\substack{1\le k_1<\dots<k_r\le n\\ 1\le l_1<\dots<l_s\le n\\ \{1,\dots,n\}=\{k_1,\dots,k_r\}\,\dot\cup\,\{l_1,\dots,l_s\}}} A(k_1,\dots,k_r|i_1,\dots,i_r)\cdot A(l_1,\dots,l_s|j_1,\dots,j_s)\cdot \varepsilon(k_1,\dots,l_s)\right)\cdot e_1\wedge\dots\wedge e_n$$

$\Rightarrow$ Beh. mittels Koeffizientenvergleich! $\square$

Bsp. 22.28: $r=1$, $i_1=1$ $\Rightarrow$ 22.27 Laplaceentwicklung nach der 1. Spalte

d.h. $$\det(A) = \underbrace{\varepsilon(1)}_{=1}\cdot \sum_{\substack{1\le k_1\le n\\ 1\le l_1<\dots<l_{n-1}\le n\\ \{1,\dots,n\}=\{k_1\}\,\dot\cup\,\{l_1,\dots,l_{n-1}\}}} \underbrace{\varepsilon(k_1)}_{=(-1)^{k_1+1}}\cdot \underbrace{A(k_1|1)}_{a_{k_1 1}}\cdot \underbrace{A(l_1,\dots,l_{n-1}|2,\dots,n)}_{=\det(A_{k_1 1})}$$

$(n-1)\times(n-1)$-Minor von A durch Streichen der 1. Spalte und der k_1-ten Zeile

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\cdot a_{k1}\cdot \det(A_{k1})$$

Bsp. 22.29: $r=2$, $(i_1,i_2)=(1,2)$ $\rightsquigarrow$ Entwickle nach der Spalten 1 & 2

d.h. $(k_1,k_2)\in\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&2\\5&6\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}11&12\\15&16\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}1&2\\9&10\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}7&8\\15&16\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}1&2\\13&14\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}7&8\\11&12\end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix}5&6\\9&10\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\15&16\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}5&6\\13&14\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\11&12\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}9&10\\13&14\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3&4\\7&8\end{vmatrix}$$

Ausrechnen ist ÜA $\square$

H) Äußere Produkte und der Dualraum

Prop. 22.30:

Sei V ein endlich-dim. K-Vektorraum.

Dann: $\exists_1 \; \alpha : V^* \wedge V^* \longrightarrow Alt_K(V^2, K)$ linear

mit $\alpha(f \wedge g)(x,y) = \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$

für alle $f, g \in V^*$ und $x, y \in V$.

Zudem ist α ein Isomorphismus.

Bew: ÜA. $\square$

Bem. 22.31:

Die Aussage in 22.30 verallgemeinert sich in naheliegender Weise auf r Kopien von V^*.

Kor. 22.32:

$\dim_K V < \infty \implies V^* \wedge V^* \cong (V \wedge V)^*$.

Beweis:

$$V^* \wedge V^* \underset{22.30}{\cong} Alt_K(V^2, K) \underset{22.10}{\cong} Hom_K(V \wedge V, K) \underset{\text{Def.}}{=} (V \wedge V)^*$$

$\square$

§ 23 Die äußere Algebra

A) Die äußere Algebra

Definition 23.1: Sei V ein K-Vektorraum.

Dann setze: $\Lambda V := \bigoplus_{r=0}^{\infty} \Lambda^r V = \{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid x_k \in \Lambda^r V, \text{ nur endlich viele } \neq 0 \}$ $= \sum_{k=0}^{\infty} x_k$

die äußere Algebra von V, wobei: $\Lambda^0 V := K$.

Satz 23.2:

Sei V ein K-VR und $r, s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Dann: $\exists_1 \; \mu_{r,s} : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$ bilinear

mit $\mu_{r,s}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_s) = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$

Beweis:

Wähle zunächst einen Vektor $(x_1, \dots, x_r) \in V^r$ fest.

$\Rightarrow \quad V^s \longrightarrow \Lambda^{r+s} V : (y_1, \dots, y_s) \mapsto x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$

ist multilinear und alternierend

$\overset{\text{univ. Eigensch.}}{\Longrightarrow} \quad \exists_1 \; \varphi_{x_1, \dots, x_r} : \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V$ linear mit $\varphi_{x_1, \dots, x_r}(y_1 \wedge \dots \wedge y_s)$ $= x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s$

$\Rightarrow \varphi : V^r \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(\Lambda^s V, \Lambda^{r+s} V) : (x_1, \dots, x_r) \longmapsto \varphi_{x_1, \dots, x_r}$

ist multilinear und alternierend

$\overset{\text{univ. Eigensch.}}{\Longrightarrow} \exists_1 \; m : \Lambda^r V \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(\Lambda^s V, \Lambda^{r+s} V)$ linear

mit $m(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = \varphi_{x_1, \dots, x_r}$

Definiere: $\mu_{r,s} : \Lambda^r V \times \Lambda^s V \longrightarrow \Lambda^{r+s} V : (x, y) \longmapsto m(x)(y)$

$\Rightarrow \mu_{r,s}$ ist bilinear mit $\mu_{r,s}(x_1 \wedge \dots \wedge x_r, y_1 \wedge \dots \wedge y_s)$

$= m(x_1 \wedge \dots \wedge x_r)(y_1 \wedge \dots \wedge y_s) = \varphi_{x_1, \dots, x_r}(y_1 \wedge \dots \wedge y_s) = x_1 \wedge \dots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_s.$

Beweis: $\mu_{r,s}$ ist durch die Werte auf Tupeln reiner Produkte festgelegt, weil jedes Produkt eine Summe reiner Produkte ist. Also ist $\mu_{r,s}$ auch eindeutig. $\square$

Definition 23.3: Sei V ein K-Vektorraum.

ⓐ Sei $r \geq 0$.

Definiere: $\mu_{0,r}: \Lambda^0 V \times \Lambda^r V \to \Lambda^r V : (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$

und $\mu_{r,0}: \Lambda^r V \times \Lambda^0 V \to \Lambda^r V : (x, \lambda) \mapsto \lambda \cdot x$

Beachte: $\mu_{0,r}$ und $\mu_{r,0}$ sind bilinear.

ⓑ Seien $x = \underset{\text{endlich}}{\sum_{k=0}^{\infty}} x_k \in V$ und $y = \underset{\text{endlich}}{\sum_{k=0}^{\infty}} y_k \in V$

$\hat{=} (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ $\qquad \hat{=} (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Dann: $x \wedge y := \underset{\text{endl.}}{\sum_{k=0}^{\infty}} \underset{\text{endl.}}{\sum_{l=0}^{\infty}} \mu_{k,l}(x_k, y_l) \in \Lambda V$

$\Rightarrow \wedge : \Lambda V \times \Lambda V \longrightarrow \Lambda V : (x,y) \mapsto x \wedge y$

ist bilinear und heißt das **Dachprodukt**.

Proposition 23.4:
Ist V ein K-VR, dann ist $(V, +, \cdot, \wedge)$ eine K-Algebra.

Insbesondere gilt: $\forall x, y, z \in \Lambda V$ und $\lambda \in K$:

ⓐ $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$

ⓑ $(x + y) \wedge z = x \wedge z + y \wedge z$

$z \wedge (x + y) = z \wedge x + z \wedge y$

ⓒ $\lambda \cdot (x \wedge y) = (\lambda \cdot x) \wedge y = x \wedge (\lambda \cdot y)$

ⓓ $1_K \wedge x = x \wedge 1_K = x$

Beweis: ⓑ & ⓒ folgen aus der Bilinearität von $\wedge$

ⓐ folgt für reine Produkte aus der Definition und aus Teil ⓑ für allgemeine Produkte

ⓒ folgt aus der Definition $\square$

B) Die äußere Algebra als graduierte Algebra

Definition 23.5:

Eine K-Algebra A heißt graduiert, wenn A als K-Vektorraum eine Zerlegung als direkte Summe

$$A = \bigoplus_{r \in \mathbb{N}} A_r$$

von Unterräumen A_r besitzt, so daß:

$$A_r \cdot A_s \subseteq A_{r+s}.$$

Die Algebra heißt kommutativ, wenn das Produkt kommutativ ist, und sie heißt antikommutativ, wenn $\forall x \in A_r, y \in A_s$: $x \cdot y = (-1)^{r \cdot s} \cdot y \cdot x$

Beispiel 23.6:

$$K[t] = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K[t]_n \;, \text{ wobei } K[t]_n = \{ f \in K[t] \mid f \text{ homogen vom Grad } n \} = \{ a \cdot t^n \mid a \in K \}$$

Dabei gilt:

$$\underset{K[t]_r}{\underset{\cap}{a \cdot t^r}} \cdot \underset{K[t]_s}{\underset{\cap}{b \cdot t^s}} = a \cdot b \cdot t^{r+s} \in K[t]_{r+s}$$

$\Rightarrow$ $K[t]$ ist eine graduierte, kommutative Algebra!

Satz 23.7:

Ist V ein K-Vektorraum, dann ist $(\Lambda V, +, \cdot, \wedge)$ eine antikommutative graduierte K-Algebra.

Beweis: Def $\Rightarrow$ $V = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k V$ und $x \in \Lambda^r V, y \in \Lambda^s V \Rightarrow x \wedge y \in \Lambda^{r+s} V$

$\Rightarrow$ ΛV ist graduiert!

Zeige: $\wedge$ ist antikommutativ.

Seien zunächst $x = x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$ und $y = y_1 \wedge \ldots \wedge y_s$

$$\Rightarrow x \wedge y = x_1 \wedge \ldots \wedge x_r \wedge y_1 \wedge \ldots y_s$$

$$= (-1)^1 \cdot x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge x_r \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_s$$

$$= (-1)^2 \cdot x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge y_2 \wedge x_r \wedge y_3 \wedge \ldots \wedge y_s$$

$$\underset{\text{Ind.}}{=} (-1)^s \; x_1 \wedge \ldots \wedge x_{r-1} \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_s \wedge x_r$$

$$\underset{\text{Ind.}}{=} \left((-1)^s\right)^r \cdot y_1 \wedge \ldots \wedge y_s \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_r$$

$$= (-1)^{r \cdot s} \cdot y \wedge x$$

Der Fall allgemeiner Produkte folgt dann mit der Bilinearität des Dachproduktes!

$\square$

§ 24 Projektive Räume und Grassmannsche Varietäten

A) Der projektive Raum

Def. 24.1:

(a) Sei V ein k-VR. Dann heißt $\mathbb{P}(V) := \{L \leq V \mid \dim_k(L) = 1\}$ der projektive Raum zu V.

(b) $\mathbb{P}^n_k := \mathbb{P}(k^{n+1}) = \{L \leq k^{n+1} \mid \dim_k(L) = \}$ heißt n-dimensionaler projektiven Raum über k.

Bem. 24.2:

Die Punkte in $\mathbb{P}^n_k$ sind genau die Ursprungsgeraden im k^{n+1}.

z.B. $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ = Menge der Ursprungsgeraden in der euklidischen Ebene!

Prop. 24.3:

Für $x, y \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ definieren wir $x \sim y :\Leftrightarrow \exists \underset{\in k}{\lambda} \neq 0 : y = \lambda \cdot x$.

Dann ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Seien $x, y, z \in k^{n+1} \setminus \{0\}$.

(1) Reflexivität: $x = 1 \cdot x \Rightarrow x \sim x$

(2) Symmetrie: $x \sim y \Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : y = \lambda \cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{\lambda} \cdot y$

$\Rightarrow y \sim x$

(3) Transitivität: $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow \exists \lambda, \mu \neq 0 : y = \lambda \cdot x,\ z = \mu \cdot y$

$\Rightarrow z = \mu \cdot y = (\underbrace{\mu \cdot \lambda}_{\neq 0}) \cdot x \Rightarrow x \sim z.$

Def. 24.4:

Sei $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in k^{n+1} \setminus \{0\}$.

Dann heißt $(x_0 : x_1 : \ldots : x_n) := \overline{x} \in k^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ = Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$

die homogene Koordinate von x bezüglich $\sim$.

Prop. 24.5:

Die Abbildung $\alpha : \mathbb{P}^n_K \longrightarrow K^{n+1}\setminus\{0\} / \sim \; ; \; L \longmapsto L\setminus\{0\}$

ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\alpha^{-1} : K^{n+1}\setminus\{0\}/\sim \;\longrightarrow \mathbb{P}^n_K : (x_0 : \dots : x_n) \mapsto \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$.

Wir werden deshalb im Folgenden die Punkte im $\mathbb{P}^n_K$ mit den homogenen Koordinaten identifizieren.

Beweis:

Beachte: $(x_0 : \dots : x_n) =$ Ursprungsgerade durch den Punkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ohne den Ursprung

Rest klar! $\square$

Bsp. 24.6:

$\boxed{y = 2\cdot x}$ bestimmt eine Ursprungsgerade,

nämlich: $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, y = 2\cdot x \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$

$\hat{=} (1:2) \overset{!}{=} (2:4)$

! homogene Koordinaten der Punkte im $\mathbb{P}^n_K$ sind nicht eindeutig!

Def. 24.7:

Wenn $B = (z_0, \dots, z_n)$ eine Basis von V und $0 \neq z \in V$ hat die Darstellung $z = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot z_i$, $x_i \in K$, dann können wir $(x_0 : \dots : x_n)$ auch homogene Koordinaten von $\underset{\mathrm{Lin}(z)}{x}$ nennen.

B) Die Grassmannsche Varietät

Def. 24.7: Seien $0 \leq k \leq n$.

Dann heißt $G(k,n) := \{ U \leq K^n \mid \dim_K(U) = k \}$

eine Grassmannsche Varietät.

Bsp. 24.9:

$$G(1, n+1) = \mathbb{P}_K^n$$

Lemma 24.11: (Kriterium für Zerlegbarkeit)

Seien $1 \leq m \leq n = \dim_K(V)$ und für $0 \neq \alpha \in \Lambda^m V$ sei

$$\phi_\alpha : V \longrightarrow \Lambda^{m+1} V : x \longmapsto x \wedge \alpha .$$

Dann:

① $(x_1, \dots, x_k)$ eine Basis von $\ker(\phi_\alpha)$

$$\Rightarrow \exists\, \beta \in \Lambda^{m-k} V : \alpha = x_1 \wedge \dots \wedge x_k \wedge \beta$$

② $\alpha = x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ ist zerlegbar $\Rightarrow$ $(x_1, \dots, x_m)$ ist Basis von $\ker(\phi_\alpha)$

③ α ist ein reines Produkt $\Leftrightarrow$ $\dim_K(\ker(\phi_\alpha)) = m$

Beweis:

① Ergänze die Basis $(x_1, \dots, x_k)$ von $\ker(\phi_\alpha)$ zu einer Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$ von V.

Schreibe dann α als Linearkombination in der zugehörigen Basis B' von $\Lambda^m V$:

$$\Rightarrow \alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} c_{i_1 \dots i_m} \cdot x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m} \qquad \Big\} \circledast$$

Für $j \in \{1, \dots, k\}$ gilt:

$$0 = \phi_\alpha(x_j) = x_j \wedge \alpha \overset{\circledast}{=} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n} c_{i_1 \dots i_m} \cdot \underbrace{x_j \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m}}_{\substack{=0, \text{ falls} \\ j \in \{i_1, \dots, i_m\}}}$$

$$= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n \\ j \notin \{i_1, \dots, i_m\}}} c_{i_1 \dots i_m} \cdot x_j \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m}$$

Sind linear unabhängig !!!

$\Rightarrow \quad c_{i_1 \dots i_m} = 0 \quad \forall\, 1 \le i_1 < \dots < i_m \le n$ mit $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$

$\Rightarrow \quad c_{i_1 \dots i_m} = 0$, wenn $\{1, \dots, k\} \not\subseteq \{i_1, \dots, i_m\}$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \sum_{\substack{1 \le i_1 < \dots < i_m \le n \\ \{1, \dots, k\} \subseteq \{i_1, \dots, i_m\}}} c_{i_1 \dots i_m} \cdot x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_m}$$

$\Rightarrow$ Wir können $x_1 \wedge \dots \wedge x_k$ aus dem Produkt herausziehen!

(b) Sei nun $\underset{\neq 0}{\alpha} = x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ ein reines Produkt.

$\overset{}{\underset{22.15}{\Rightarrow}} \quad (x_1, \dots, x_m)$ ist lin. unabhängig, weil $\alpha \neq 0$.

Noch z.z.: $\quad \operatorname{Ker}(\phi_\alpha) = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_m)$

Ergänze $(x_1, \dots, x_m)$ zu einer Basis $(x_1, \dots, x_n)$ von V.

"$\supseteq$" Beweis: für $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\phi_\alpha(x_i) = x_i \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad x_i \in \operatorname{Ker}(\phi_\alpha) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_m) \subseteq \operatorname{Ker}(\phi_\alpha)$$

"$\subseteq$" Sei $x \in \operatorname{Ker}(\phi_\alpha) \Rightarrow \exists\, \lambda_i \in K: \; x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$

$$\Rightarrow \quad 0 = \phi_\alpha(x) = x \wedge \alpha = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(x_i \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)}_{=0, \text{ für } i=1,\ldots,m}$$

$$= \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{x_i \wedge x_1 \wedge \ldots \wedge x_m}_{\text{linear unabhängig}}$$

$$\Rightarrow \lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_n = 0 \quad \Rightarrow x \in \mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_m)$$

(c) "$\Leftarrow$" Sei $\dim_K \ker(\phi_\alpha) = m$. $\Rightarrow \exists$ Basis $(x_1, \ldots, x_m)$ von $\ker(\phi_\alpha)$

$$\overset{(a)}{\Longrightarrow} \exists \beta \in \Lambda^{m-m} V = \Lambda^0 V : \quad \alpha = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \wedge \beta$$
$$= \beta \cdot (x_1 \wedge \ldots \wedge x_m)$$
$$= (\beta \cdot x_1) \wedge \ldots \wedge x_m$$

$\Rightarrow$ α ist ein reines Produkt.

"$\Rightarrow$" Sei $\underset{\neq 0}{\alpha} = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ ein reines Produkt

$\overset{(b)}{\Longrightarrow}$ $(x_1, \ldots, x_m)$ ist Basis von $\ker(\phi_\alpha)$

$\Rightarrow$ $\dim_K \ker(\phi_\alpha) = m$. $\square$

Satz 24.10: Sei $1 \leq k \leq n$.

Dann ist
$$\Phi : G(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k K^n)$$
$$\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto \mathrm{Lin}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)$$

eine wohldefinierte, injektive Abbildung.

Zudem: $\mathrm{Im}(\Phi)$ besteht genau aus den 1-dim. Unterräumen von $\Lambda^k K^n$, die von reinen Produkten erzeugt werden.

Beweis: Beachte: $(x_1, \ldots, x_k)$ lin. unabhängig $\underset{22.15}{\Leftrightarrow}$ $x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \neq 0$

$$\dim_K(\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_k)) = k \qquad \dim_K(\mathrm{Lin}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)) = 1$$

<u>Zeige:</u> Φ ist wohldefiniert!

Seien $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_k)$ und $\mathcal{D} = (y_1, \dots, y_k)$ Basen von $\mathcal{U}$

<u>z.z.:</u> $\mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \mathrm{Lin}(y_1 \wedge \dots \wedge y_k)$

$\exists_1 \; f: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ lin. mit $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow f$ ist Isomorphismus!

Damit: $y_1 \wedge \dots \wedge y_k = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_k)$

$$= \Lambda^k f(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \underset{22.23}{=} \underbrace{\det(f)}_{\neq 0\text{, weil } f \text{ surjektiv!}} \cdot x_1 \wedge \dots \wedge x_k$$

$\Rightarrow \mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \mathrm{Lin}(y_1 \wedge \dots \wedge y_k)$

Sei nun $Z := \{ \mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \mid x_1 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0 \} \subseteq \mathbb{P}(\Lambda^k K^n)$

und $\Psi: Z \longrightarrow G(k, n) ; \mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) \mapsto \mathrm{Ker}(\phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_k})$

Wie in 24.20

<u>Zeige:</u> Ψ ist wohldefiniert

- $x_1 \wedge \dots \wedge x_k \neq 0 \Rightarrow \dim_K \underbrace{\mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_k)}_{= \mathrm{Ker}(\phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_k})} = k \underset{24.20}{\Rightarrow} \dim \mathrm{Ker}(\phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_k}) = k$

- $\mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k) = \mathrm{Lin}(y_1 \wedge \dots \wedge y_k)$

  $\Rightarrow \exists \lambda \neq 0 : x_1 \wedge \dots \wedge x_k = \lambda \cdot y_1 \wedge \dots \wedge y_k$

  $\Rightarrow \mathrm{Ker}(\phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_k}) = \mathrm{Ker}(\phi_{y_1 \wedge \dots \wedge y_k})$

<u>Zeige:</u> $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_Z$, $\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{G(k,n)}$

$$\Phi(\Psi(\mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k))) = \Phi(\mathrm{Ker}(\phi_{x_1 \wedge \dots \wedge x_k})) \overset{24.20}{=} \Phi(\mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_k))$$

$$= \mathrm{Lin}(x_1 \wedge \dots \wedge x_k)$$

$$\Psi\left(\Phi\left(\mathrm{Lin}(x_1,\ldots,x_k)\right)\right) = \Psi\left(\mathrm{Lin}(x_1\wedge\ldots\wedge x_k)\right)$$

$$= \mathrm{Ker}\left(\phi_{x_1\wedge\ldots\wedge x_k}\right) \underset{24.10}{=} \mathrm{Lin}(x_1,\ldots,x_k)$$

Also: Ψ invers zu Φ $\Rightarrow$ Φ injektiv und $\mathrm{Im}(\Phi) = Z$ $\Rightarrow$ Beh. ∎

Def. & Prop. 24.11:

Sei $E=(e_1,\ldots,e_n)$ die kanonische Basis von K^n und $E'=(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k} \mid 1\le i_1<\ldots<i_k\le n)$ die zugehörige Basis von $\Lambda^k K^n$.

Ferner sei $\mathcal{U}=\mathrm{Lin}(a_1,\ldots,a_k)\in G(k,n)$ und $A=(a_1 \cdots a_k)=(a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(n\times k,K)$

und seien $\Phi(\mathcal{U}) \mathrel{\hat{=}} (x_{i_1\ldots i_k} \mid 1\le i_1<\ldots<i_k\le n)$ die homogenen Koordinaten von $\Phi(\mathcal{U})$ in $\mathbb{P}(\Lambda^k K^n)$ bzgl. E'.

Dann gilt: $x_{i_1\ldots i_k} = A(i_1,\ldots,i_k)$

$= k\times k$-Minor zu den Zeilen $i_1,\ldots,i_k$

$= \det\left(\begin{array}{l}\text{streiche in } A \text{ alle Zeilen} \\ \text{außer } i_1,\ldots,i_k \text{ streicht}\end{array}\right)$

Wir nennen diese Koordinaten von $\Phi(\mathcal{U})$ die Plücker-Koordinaten von $\mathcal{U}$.

Bew: $\Phi(\mathcal{U}) = \mathrm{Lin}(a_1\wedge\ldots\wedge a_k)$ und

$$a_1\wedge\ldots\wedge a_k = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} A(i_1,\ldots,i_k)\cdot e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_k} \quad \text{nach } 22.21.$$

∎

Bsp. 24.13:

$$U = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \leq \mathbb{R}^4$$

$$\Rightarrow \quad U \in G(2,4)$$

Berechne die Plückerkoordinaten von U bzgl.

$$E' = (e_1 \wedge e_2,\ e_1 \wedge e_3,\ e_1 \wedge e_4,\ e_2 \wedge e_3,\ e_2 \wedge e_4,\ e_3 \wedge e_4)$$

$$\longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Phi(U) \mathrel{\hat=} (\underset{\substack{\| \\ \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}}{1} : \underset{\substack{\| \\ \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}{2} : 3 : 1 : 2 : 1) \quad - - - - -$$

$\square$

Kapitel V: Moduln

Generalvoraussetzung: Sei R ein kommutativer Ring mit 1.

§25 Moduln und lineare Abbildungen

A) Moduln

Def. 25.1

Ein R-Modul ist eine nicht-leere Menge mit zwei Operationen
$+ : M \times M \to M$ und $\cdot : R \times M \to M$, so daß:

① $(M, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

② $\forall\, x, y \in M$ und $\lambda, \mu \in R$ gelten:

- $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (verallg. DG)
- $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (verallg. DG)
- $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ (verallg. AG)
- $1 \cdot x = x$

Bsp. 25.2:

ⓐ $R = $ Körper $\Rightarrow$ R-Moduln $\hat{=}$ R-Vektorräume

ⓑ $R^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in R \right\}$ ist mit komponentenweiser Addition
Skalarmultiplikation ein R-Modul

ⓒ $\mathrm{Mat}(m \times n, R)$ ist mit Matrixaddition und komponentenweiser
Skalarmultiplikation ein R-Modul

ⓓ Sei $(M, +)$ eine abelsche Gruppe.

Def. für $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $x \in M$:

$$\left.\begin{aligned} n \cdot x &:= \underbrace{x + \cdots + x}_{n\text{-mal}} \\ (-n) \cdot x &:= \underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{n\text{-mal}} \\ 0 \cdot x &:= 0_M \end{aligned}\right\} \Rightarrow (M, +, \cdot) \text{ ist ein } \mathbb{Z}\text{-Modul.}$$

Also: $\{\text{Abelsche Gruppen}\} \xleftrightarrow[1:1]{} \{\mathbb{Z}\text{-Moduln}\}$

(e) Sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

Definiere für $x \in V$: $t \cdot x := \varphi(x)$

allgemeiner für $p = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in k[t]$: $p \cdot x := \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \varphi^i(x)$

Dann ist $(V, +, \cdot)$ ein $K[t]$-Modul.

(f) Sei $\varphi: R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

Dann wird S durch $\underset{\in R}{r} \cdot \underset{\in S}{s} := \varphi(r) \cdot s$ zu einem R-Modul.

Bem. 25.3:

Die meisten elementaren Rechenoperationen übertragen sich auf Moduln wie auf Vektorräume, aber Vorsicht:

$R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow \underset{\in R}{\underset{0 \neq}{2}} \cdot \underset{\in M}{\overline{1}_{\neq \overline{0}}} = \overline{2} = \overline{0}$

B) Untermoduln

Def. 25.4: Sei also M ein R-Modul.

(a) Ein Untermodul von M ist eine nicht-leere Teilmenge N von M mit $\forall x, y \in N, \lambda \in R$: $x + y \in N$ und $\lambda \cdot x \in N$.

Notation: $N \leq M$.

(b) $x \in M$ heißt Linearkombination von $x_1, \dots, x_n \in M$

$:\Leftrightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R$: $x = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$.

(c) Für $A \subseteq M$ definiere:

$$\langle A \rangle_R := \mathrm{Lin}_R(A) := \bigcap_{A \subseteq N \leq M} N = \text{Erzeugnis von } A$$

Bsp. 25.5: (a) R als R-Modul $\Rightarrow$ {Untermoduln} $\hat{=}$ {Ideale}

(b) $2 \cdot \mathbb{Z} = \{ z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ gerade} \} \leq \mathbb{Z}$

(c) Sei $(G, +)$ abelsche Gruppe.

$\Rightarrow$ {$\mathbb{Z}$-Untermoduln von G} $\hat{=}$ {Untergruppen von G}

(d) Sei V K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

Sei nun $\mathcal{U}$ ein φ-invarianter Unterraum von V.

Dann gilt für $x \in \mathcal{U}$: $\quad t \cdot x := \varphi(x) \in \mathcal{U}$

$\Rightarrow \quad p \cdot x \in \mathcal{U} \quad \forall p \in k[t]$

$\Rightarrow \quad \mathcal{U}$ ein $k[t]$-Untermodul!

Bem. 25.6: Folgende Aussagen gelten wie für Vektorräume:

(a) Jeder Untermodul ist selbst ein Modul.

(b) Der Durchschnitt von Untermoduln ist ein Untermodul.

(c) $\langle A \rangle_R \overset{!}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \;\middle|\; \lambda_i \in R,\ x_1, \dots, x_n \in A,\ n \geq 1 \right\} \leq M$

(d) Für $N_i \leq M$ mit $i \in I$:

$$\sum_{i \in I} N_i := \left\langle \bigcup_{i \in I} N_i \right\rangle = \underbrace{\left\{ \sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl}}} x_i \;\middle|\; x_i \in N_i \right\}}_{\text{Summe der } N_i} \leq M$$

Die Summe heißt eine direkte Summe, wenn jeder Vektor eine eindeutige Darstellung als Summe besitzt!

Notation: $\bigoplus_{i \in I} N_i$.

(e) $M = N \oplus N' \iff M = N + N'$ und $N \cap N' = \{0\}$

N' heißt dann ein Komplement von N in M.

(f) $N \leq M \Rightarrow (M/N, +)$ wird zu einem R-Modul durch

$\lambda \cdot \bar{x} := \overline{\lambda \cdot x}$ für $\lambda \in R$, $\bar{x} \in M/N$.

(Faktormodul von M nach N).

Beispiel 25.7: Sei $I \trianglelefteq R$ und M ein R-Modul.

(a) $I \cdot M := \{ r \cdot m \mid r \in I, m \in M \} \overset{!}{=} \{0\}$

$\Rightarrow M$ ist ein R/I-Modul mittels $\underset{\in R/I}{\bar{\lambda}} \cdot \underset{\in M}{x} := \lambda \cdot x$

(b) $M/_{I \cdot M}$ ist ein R/I-Modul

C) Lineare Abbildungen

Def. 25.8: Seien M und N zwei R-Moduln.

(a) $f: M \to N$ heißt R-linear oder R-Modulhomomorphismus

$:\Longleftrightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x,y \in M, \lambda \in R$

(b) Sei $f: M \to N$ R-linear.

- f injektiv $:\Longleftrightarrow f$ ist ein Monomorphismus
- f surjektiv $:\Longleftrightarrow f$ " " Epimorphismus
- f bijektiv $:\Longleftrightarrow f$ " " Isomorphismus
- $M = N$ $:\Longleftrightarrow f$ " " Endomorphismus
- $M = N \wedge f$ bijektiv $:\Longleftrightarrow f$ " " Automorphismus

(c) $M \cong N \;:\Longleftrightarrow\; \exists f: M \to N$ Isomorphismus

(d) $\mathrm{Hom}_R(M,N) := \{ f: M \to N \mid f \ R\text{-linear} \}$

$\mathrm{End}_R(M) := \mathrm{Hom}_R(M,M)$

Bem. 25.9:

(a) $f: M \to N$ R-lin. & bijektiv $\Rightarrow f^{-1}: N \to M$ ist R-linear

(b) Komp. von linearen Abb. ist linear!

(c) $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ ist ein R-Modul.

(d) $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, R) \Rightarrow f_A: R^n \to R^m : x \mapsto A \circ x$ ist R-linear.

(e) Bilder und Urbilder linearer Abb. sind Untermoduln!

(f) Homomorphiesatz: Sei $f: M \to N$ R-linear

$\Rightarrow \bar{f}: M/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f) : \bar{x} \mapsto f(x)$

(g) Isomorphiesätze:

- $N, N' \leq M \Longrightarrow N/N \cap N' \xrightarrow{\cong} N+N'/N' : \bar{x} \longmapsto \bar{x} = x + (N+N')$, $\bar{x} = x + (N \cap N')$
- $N \leq N' \leq M \Longrightarrow \dfrac{M/N}{N'/N} \xrightarrow{\cong} M/N' : \bar{\bar{x}} \longmapsto \bar{x} = x + N'$, $\bar{\bar{x}} = (x+N) + N'/N$

D) Direkte Produkte und äußere direkte Summen

Definition 25.10:

Sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von R-Moduln.

Dann:
- $\prod_{i\in I} M_i := \{ (x_i)_{i\in I} \mid x_i \in M_i \ \forall i\in I \}$ = direktes Produkt der M_i
- $\bigoplus_{i\in I} M_i := \left\{ (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{nur endlich}\\ \text{viele } x_i \neq 0\end{array} \right\}$ = äußere direkte Summe der M_i

Bem. 25.11:

(a) Mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation sind $\prod M_i$ und $\bigoplus M_i$ R-Moduln.

(b) $\delta_i : M_i \hookrightarrow \bigoplus_{j\in I} M_j : x \mapsto \left(x_j \mid x_j = \begin{cases} x, & j=i \\ 0, & j\neq i \end{cases} \right)$

ist ein R-Homomorphismus und innere direkte Summe der $\delta(M_i)$ ist $\bigoplus_{i\in I} M_i$.

E) Invertierbare Matrizen

Bem. 25.12: Sei $A=(a_{ij}) \in Mat_n(R)$.

(a) A heißt invertierbar $:\Leftrightarrow \exists\, B \in Mat_n(R) : \ A\circ B = B\circ A = \mathbb{1}_n$

(b) $Gl_n(R) := \{ A \in Mat_n(R) \mid A \text{ invertierbar} \}$ ist bzgl. $\circ$ eine Gruppe.

(c) $\det(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1\sigma(1)} \cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$ ist die Determinante von A.

(d) $\det(A\circ B) = \det(A)\cdot\det(B)$

(e) Satz der Adjunkten: $A^{\#}\circ A = A\circ A^{\#} = \det(A)\cdot \mathbb{1}_n$

(f) A ist invertierbar $\Leftrightarrow$ $\det(A) \in R^*$ ist eine Einheit

(g) Wenn $T_1,\ldots,T_k \in Gl_n(R)$ Elementarmatrizen sind mit $T_k \cdots T_1 \cdot A = \mathbb{1}_n$, dann ist A invertierbar und Produkt von Elementarmatrizen!

Beispiel 25.13:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z})$$

$\overset{\Rightarrow}{\text{Sarrus}}$ $\det(A) = 2\cdot1\cdot2 + 0\cdot1\cdot1 + 3\cdot0\cdot1 - 1\cdot1\cdot3 - 1\cdot1\cdot2 - 2\cdot0\cdot0$

$= 4 - 3 - 2 = -1 \in \mathbb{Z}^*$

$\Rightarrow$ A invertierbar über $\mathbb{Z}$

STOP

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Z})$$

§ 26 Freie Moduln, noethersche Moduln, Torsionsmoduln

A) Freie Moduln und Basen

Def. 26.1: Sei M ein R-Modul und $F = (x_i)_{i \in I}$ eine Familie in M.

ⓐ F heißt ein Erzeugendensystem von M :⟺ $M = \langle F \rangle_R$

ⓑ F heißt linear unabhängig :⟺ $\left(\sum_{\substack{i \in I \\ \text{endl.}}} \lambda_i x_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i \in I \right)$

ⓒ F heißt eine Basis von M :⟺ $\forall x \in M \ \exists_1 \lambda_i \in R : x = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i x_i$

ⓓ M heißt endlich erzeugt :⟺ $\exists x_1, \dots, x_n \in M : M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$

ⓔ M heißt frei :⟺ M hat eine Basis.

Bsp. 26.2:

ⓐ R^n ist ein endlich erzeugter R-Modul und frei mit Basis $E = (e_1, \dots, e_n)$ und $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

ⓑ $\bigoplus_{i \in I} R$ ist ein freier R-Modul mit Basis $E = (e_i)_{i \in I}$

wobei $e_i = (\delta_{ij})_{j \in I}$

ⓒ $\mathbb{Q}$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul nicht endlich erzeugt,

denn: Ang. $\mathbb{Q} = \langle q_1, \dots, q_n \rangle_{\mathbb{Z}}$.

$\Rightarrow \exists \ p$ Primzahl, die keinen Nenner der q_i teilt

$\Rightarrow \frac{1}{p} \notin \langle q_1, \dots, q_n \rangle$ ↯

Bsp. 26.3:

Beh.: $\mathbb{Z}_2$ hat als $\mathbb{Z}$-Modul keine Basis, ist also nicht frei

Ang.: $\mathbb{Z}_2$ hat eine Basis $B \Rightarrow B = (\bar{1})$

$\Rightarrow \bar{0} = 0 \cdot \bar{1} = 2 \cdot \bar{1}$ nicht eindeutige Darstellung!

↯

Bem. 26.4:

(a) $\mathcal{B}$ ist eine Basis $\iff$ $\mathcal{B}$ lin. unabhängiges Erzeugendensystem !

(b) Sei $(x_i)_{i\in I}$ Basis von M und $(y_i)_{i\in I}$ Familie in N.
Dann: $\exists_1\ f: M \to N$ R-linear mit $f(x_i) = y_i$ $\forall i \in I$.

(c) Jede lin. Abb. $f: R^n \to R^m$ ist von der Form $f = f_A$ für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathrm{Mat}(m\times n, R)$.

(d) Eine lin. Abb. zwischen zwei freien Moduln ist genau dann bijektiv, wenn sie eine Basis auf eine Basis abbildet!

Korollar 26.5: Sei M ein R-Modul.

Dann: M ist frei $\iff$ $\exists\ f: M \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in I} R$ Isomorphismus

Insb.: $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ Basis von M $\Rightarrow$ $M_{\mathcal{B}}: M \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i\in I} R$

$$\sum_{\text{endl.}} \lambda_i x_i \mapsto (\lambda_i)_{i\in I}$$

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{B} = (x_i)_{i\in I}$ Basis von M

$\Rightarrow \exists_1\ f: M \to \bigoplus_{i\in I} R$ linear mit $f(x_i) = e_i$ $\forall i \in I$

$\underset{26.4\,(d)}{\Rightarrow}$ f ist bijektiv und $f = M_{\mathcal{B}}$

"$\Leftarrow$" Sei $f: \bigoplus_{i\in I} R \to M$ ein Isomorphismus

$\Rightarrow \mathcal{B} = (f(e_i))_{i\in I}$ ist dann eine Basis von M

denn: $\cdot\ x \in M \Rightarrow f^{-1}(x) = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i e_i \Rightarrow x = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i f(e_i) \in \langle \mathcal{B} \rangle$

$\cdot\ \underbrace{\sum_{\text{endl.}} \lambda_i f(e_i)}_{=0} = f\left(\sum_{\text{endl.}} \lambda_i e_i\right) \underset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} \sum_{\text{endl.}} \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0\ \forall i \in I$

□

B) Der Rang eines freien Moduls

Bsp. 26.6:

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : x \longmapsto 2 \cdot x$ ist $\mathbb{Z}$-linear und injektiv, denn $0 = f(x) = 2 \cdot x \iff x = 0$

ABER: f ist nicht surjektiv, da $1 \notin \operatorname{Im}(f)$

Prop. 26.7:

Sei $f \in \operatorname{End}_R(R^n)$. Dann: f surjektiv $\iff$ f bijektiv

Beweis: "$\Leftarrow$" ✓

"$\Rightarrow$" Sei f surjektiv. $\overset{26.4}{\longrightarrow} \exists_1\, \underset{(a_1 \cdots a_n)}{A} \in \operatorname{Mat}_n(R) : f = f_A$.

$\hookrightarrow \underset{e_i}{R^n} = \operatorname{Im}(f) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle_R \Rightarrow \exists\, b_{ij} \in R : e_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot a_i$

Setze: $B := (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \in \operatorname{Mat}_n(R)$

$$\Rightarrow A \circ B = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i1} \cdot a_i \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} b_{in} \cdot a_i \right) = (e_1 \cdots e_n) = \mathbb{1}_n$$

$$\Rightarrow 1 = \det(\mathbb{1}_n) = \det(A \circ B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

$$\Rightarrow \det(A) \in R^* \Rightarrow A \text{ ist invertierbar}$$

$$\Rightarrow f = f_A \text{ ist invertierbar mit } f^{-1} = f_{A^{-1}}$$

□

Korollar 26.8:

Wenn $R^n \cong R^m$, dann: $n = m$.

Beweis: o.E.: $n \geq m$.

Sei $g: R^m \to R^n$ ein Isomorphismus.

Ang: $n > m$. $\Rightarrow \exists_1\, f: R^n \to R^m$ linear mit

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i' = i\text{-te kan. Basisvektor in } R^m, & i \leq m \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(e_i: i-te kan. Basisvektor in R^n)

$\Rightarrow$ f ist surjektiv, weil Basis auf EZS geht!

$\Rightarrow$ $g \circ f: R^n \to R^n$ ist ein Epimorphismus

$\overset{26.7}{\Rightarrow}$ $g \circ f$ ist Isomorphismus, aber $(g \circ f)(e_n) = 0$ $\lightning$ $\square$

Kor. 26.9:
Je zwei endliche Basen eines freien R-Moduls haben dieselbe Mächtigkeit.

Beweis:
Seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $D = (y_1, \dots, y_m)$ zwei Basen von M

$\Rightarrow \exists_1\, \pi_B : M \xrightarrow{\cong} R^n$ linear: $x_i \mapsto e_i$

$\exists_1\, \pi_D : M \xrightarrow{\cong} R^m$ linear: $y_i \mapsto e_i'$

$\Rightarrow \pi_D \circ \pi_B^{-1} : R^n \to R^m$ ist ein Isom. $\underset{26.8}{\Rightarrow}$ $m = n$. $\square$

Def. 26.10:
Sei M ein freier Modul.

$$\operatorname{rang}(M) := \begin{cases} |B|, & \text{falls } M \text{ eine endl. Basis } B \text{ hat} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt der **Rang** von M.

Bsp. 26.11: $\operatorname{rang}(R^n) = n$.

c) Noethersche Moduln

Bsp. 26.12.

$R = \bigcup_{n=0}^{\infty} K[x_0, \dots, x_n] = K[x_0, x_1, x_2, \dots]$ ist ein komm. Ring mit 1.

R ist als R-Modul endlich erzeugt mit Beweis (1).

ABER: $I = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle \leq R$ ist ein Untermodul von R

hat kein endliches Erzeugendensystem,

weil jede endliche Familie in I nur endlich viele Variablen involviert!

Def. 26.13:

Ein R-Modul M heißt noethersch :<=> jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt!

Bsp. 26.14:

(a) R sei ein Hauptidealring => R ist als R-Modul noethersch, da jeder Untermodul von 1 Element erzeugt wird.

(b) $K[x_0, x_1, \dots]$ ist nicht noethersch!

Prop. 26.15.

Sei M ein R-Modul und $N \leq M$.

Dann: M noethersch <=> N und M/N noethersch.

Beweis:

"<=" Seien N und M/N noethersch und sei $L \leq M$.

z.z.: L ist endlich erzeugt.

- $L \cap N \leq N \underset{N \text{ noeth.}}{\Longrightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_n \in L \cap N : L \cap N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$

• $\frac{L+N}{N} \leq \frac{M}{N} \underset{M/N \text{ noeth.}}{\Longrightarrow} \exists\, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \in \frac{L+N}{N} : \frac{L+N}{N} = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \rangle$

$\bar{y}_1 = \overline{y_1 + z_1}, \dots, \bar{y}_m = \overline{y_m + z_m}$ mit $y_1, \dots, y_m \in L$, $z_1, \dots, z_m \in N$

<u>Beh:</u> $L = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m \rangle_R$

"$\supseteq$" ✓

"$\subseteq$" Sei $x \in L \Rightarrow \bar{x} \in \frac{L+N}{N} \Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \in R : \bar{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bar{y}_i = \overline{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i}$

$\Rightarrow \quad x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i \in N = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$

$\Rightarrow \exists \mu_j \in R : x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j \quad \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$

<u>Also:</u> L endl. erzeugt $\Rightarrow M$ noeth.

"$\Rightarrow$" Sei M noeth.

Sei $L \leq N \Rightarrow L \leq M \Rightarrow L$ endl. erzeugt $\Rightarrow N$ noeth.

Sei $L' \leq \frac{M}{N} \Rightarrow \exists\, L \leq M : L' = \frac{L}{N} \Rightarrow L = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$

$\Rightarrow L' = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle_R \Rightarrow \frac{M}{N}$ noethersch! ∎

<u>Kor. 26.16:</u>

Sei R ein Ring, der als R-Modul noethersch.

ⓐ $\forall n \geq 1$: R^n ist noethersch

ⓑ Jeder endlich erzeugte R-Modul ist noethersch.

Beweis: (a) Induktion nach n: $n=1$: ✓ nach Voraussetzung.

$n-1 \mapsto n$: Betrachte: $N = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \middle| x_i \in R \right\} \leq R^n$

$\cong R^{n-1}$ noethersch nach Ind.

- $R^n/N \xleftarrow{\cong} R$ ist noethersch

$\overline{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x \end{pmatrix}} \longleftarrow x$

26.9

R^n ist noethersch

(b) Sei $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R \Longrightarrow \exists_1 \; R^n \xrightarrow{f} M$ linear

$e_i \longmapsto x_i$

$\Rightarrow f$ surjektiv $\Longrightarrow$ $R^n / \mathrm{Ker}(f) \cong \mathrm{Im}(f) = M$

26.15 + (a)

noethersch

□

Kor. 26.17:

Jeder endlich erzeugte Modul über einem Hauptidealring ist noethersch.

Bsp. 26.18:

Jeder Untermodul von $\mathbb{Z}^n$ ist endlich erzeugt.

D) Endlich präsentierte Moduln

Def. 26.19:

Ein R-Modul M heißt endlich präsentiert

$:\Longleftrightarrow \exists \; \underset{\overset{\shortparallel}{(a_1 \cdots a_n)}}{A} \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$: $M \cong R^m / \langle a_1, \dots, a_n \rangle_R$

Wir nennen A eine Präsentationsmatrix von M.

Bsp. 26.20:

$$f : \mathbb{Z}^3 \longrightarrow \mathbb{Z}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ • $\mathbb{Z}^2 / \mathrm{Im}(f) = \mathbb{Z}^2 / \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$ ist endlich präsentiert

• $\mathrm{Im}(f) \cong \mathbb{Z}^3 / \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{Z}^3 / \left\langle \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$

Bsp. 26.21:

$R = K[x_0, x_1, \dots]$ und $M = R / \langle x_0, x_1, \dots \rangle$ hat keine endliche Präsentation, ist aber endl. erzeugt!

Prop. 26.22:

Wenn R noethersch ist als R-Modul und M endlich erzeugter R-Modul, dann ist M endlich präsentiert.

Beweis:

Sei $M = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_R$.

$\Rightarrow \exists_1\ f : R^n \longrightarrow M$ linear mit $f(e_i) = x_i$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv $\underline{\text{und}}$ $\overline{f} : R^n / \mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Im}(f) = M$

Da R noeth., ist auch R^n noeth.

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(f)$ ist endlich erzeugt

$\Rightarrow \exists\ a_1, \dots, a_m \in R^n : \mathrm{Ker}(f) = \langle a_1, \dots, a_m \rangle_R$

$\Rightarrow A = (a_1 \ \dots \ a_m) \in \mathrm{Mat}(n \times m, R)$ mit $R^n / \langle a_1, \dots, a_m \rangle_R \cong M$

$\Rightarrow M$ ist endl. präsentiert! $\square$

F) Der Torsionmodul

Def. 26.23:

Sei R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul.

ⓐ $x \in M$ heißt Torsionselement $:\Longleftrightarrow \exists_{\neq 0} r \in R: r \cdot x = 0$

ⓑ $T(M) := \{x \in M \mid x \text{ Torsionselement}\}$ heißt Torsionsmodul von M.

ⓒ Wenn $T(M) = \{0\}$, so heißt M torsionsfrei.

Bsp. 26.24:

$\mathbb{Z}_2$ als $\mathbb{Z}$-Modul hat den Torsionsmodul $T(\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$.

Prop. 26.25:

Sei R ein Integritätsbereich und M ein R-Modul.

Dann: ⓐ $T(M) \leq M$

ⓑ $M/T(M)$ ist torsionsfrei.

Beweis:

ⓐ Seien $x, y \in T(M) \Rightarrow \exists\, r, s \in R$, $r \neq 0$, $s \neq 0$: $r \cdot x = s \cdot y = 0$

$\Rightarrow \underbrace{(r \cdot s)}_{\neq 0\ (R\ \text{IB})} \cdot (x + y) = s \cdot \underbrace{r \cdot x}_{=0} + r \cdot \underbrace{s \cdot y}_{=0} = 0 \Rightarrow x + y \in T(M)$

Zudem: $\lambda \in R \Rightarrow r \cdot (\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \underbrace{(r \cdot x)}_{=0} = 0 \Rightarrow \lambda \cdot x \in T(M)$

Also: $T(M) \leq M$

ⓑ Sei $\bar{x} \in T(M/T(M)) \Rightarrow \exists_{\neq 0}\, r \in R: \underbrace{r \cdot \bar{x}}_{=\overline{r \cdot x}} = \bar{0}$

$\Rightarrow r \cdot x \in T(M) \Rightarrow \exists_{\neq 0}\, s \in R: \underbrace{s \cdot (r \cdot x)}_{=(s \cdot r) \cdot x} = 0$

$\Rightarrow x \in T(M) \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ ☐ | R IB $\Rightarrow$ $0 \neq (s \cdot r)$

Prop. 26.26:

Freie Moduln über Integritätsbereichen sind torsionsfrei.

Beweis:

Sei $B = (x_i)_{i \in I}$ Basis von M und $x \in T(M)$.

$\Rightarrow \exists_1 \lambda_i \in R: \quad x = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i x_i$

Weil $x \in T(M) \Rightarrow \exists\, r \underset{\neq 0}{\in} R: \quad r \cdot x = 0$

$$r \cdot x = \sum_{\text{endl.}} (r \cdot \lambda_i) \cdot x_i$$

$\underset{B \text{ Basis}}{\Rightarrow} \quad \underset{\neq 0}{r} \cdot \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I \quad \underset{\text{R IB}}{\Rightarrow} \quad \lambda_i = 0 \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow \quad x = \sum_{\text{endl.}} \lambda_i x_i = 0$ $\square$

Bsp. 26.27:

$\mathbb{Z}^n$ ist als $\mathbb{Z}$-Modul torsionsfrei.

§ 27 Endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen

A) Die Smith-Normalform

Def. 27.1: Seien $A, B \in Mat(m \times n, R)$.

$A \sim B \;:\Leftrightarrow\; \exists\, S \in Gl_m(R),\ T \in Gl_n(R):\ B = S \circ A \circ T$

A heißt dann äquivalent zu B.

Elementarteilersatz für Matrizen über HIR 27.2

Sei R ein Hauptidealring und $A \in Mat(m \times n, R)$.

Dann $\exists\, S \in Gl_m(R),\ T \in Gl_n(R):\ S \circ A \circ T = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) =$ Smith-Normalform von A

mit $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_k \end{pmatrix}$ und $d_i \mid \underset{\neq 0}{d_{i+1}}$ für $i = 1, \dots, k-1$

Das Tupel $(d_1, \dots, d_k)$ heißt das Tupel der Elementarteiler von A, und die d_i sind bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

Beweis: Existenz: Alg. 27.7, Eindeutigkeit: später □

Lemma 27.5:

Sei R ein HIR und $a, b \in R \setminus \{0\}$ mit $\boxed{g = r \cdot a + s \cdot b} \in ggT(a, b)$.

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & -\frac{b}{g} \\ s & \frac{a}{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{g} & 0 \\ c r + d s & \frac{ad - bc}{g} \end{pmatrix} \in Mat_2(R)$

$ \underset{Gl_2(R)}{\cap}$

$\underset{\cup}{Gl_2(R)} \qquad \qquad \underset{\cup}{Gl_2(R)}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{sb}{g} & 1 - \frac{sb}{g} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r & -\frac{b}{g} \\ s & \frac{a}{g} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & \frac{a \cdot b}{g} \end{pmatrix} \in Mat_2(R)$

Bew. nachrechnen!

Kor. 27.6:

Sei R ein HIR und $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$ mit $a_{11} \neq 0$.

ⓐ Wenn $a_{1j} \neq 0$, $j \geq 2$, dann: $\exists\, T \in Gl_n(R) : A \circ T = (a'_{ij})$ erfüllt, daß a'_{11} ein $ggT(a_{11}, a_{1j})$

ⓑ Analog für Zeilen.

ⓒ Wenn A Diagonalmatrix und $a_{ii} \neq 0 \neq a_{i+1,i+1}$, dann $\exists\, S \in Gl_m(R)$, $T \in Gl_n(R)$: $S \circ A \circ T = (a'_{ij})$ erfüllt, daß $a_{ij} = a'_{ij}$ für $(i,j) \notin \{(i,i),(i+1,i+1)\}$ und $a'_{ii} \in ggT(a_{ii}, a_{i+1,i+1})$.

Beweis: Wende 27.5 an. $\square$

Bsp. 27.7:

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3, \mathbb{Z})$$

$$\rightsquigarrow \quad 2 = 4 \cdot 14 - 3 \cdot 18$$

$$\rightsquigarrow \quad T = \begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Gl_3(\mathbb{Z})$$

$$\rightsquigarrow \quad A \circ T = \begin{pmatrix} 14 & 18 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 & -9 & 0 \\ -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Algorithmus 27.16 (Smith-Normalform)

Input: $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$ wobei R ein HIR.

Output: Smith-Normalform $SNF(A)$ von A

Anweisungen:

1. Schritt: Falls die Nullmatrix ist, gib A zurück;
Sonst tausche Zeilen und Spalten bis $a_{11} \neq 0$.

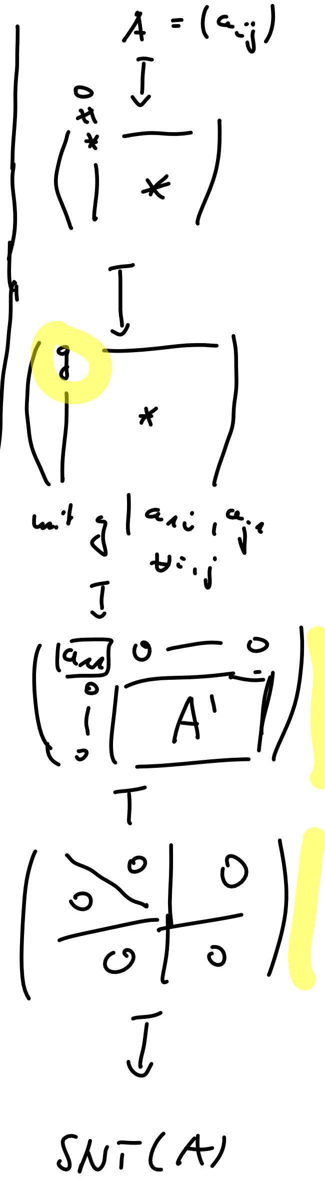
2. Schritt: Solange in der ersten Zeile oder Spalte ein Eintrag x existiert, s.d. $a_{11} \nmid x$, multipliziere mit einer invertierbaren Matrix, s.d. a_{11} durch einen ggT von a_{11} und x ersetzt wird.

3. Schritt: Für $i = 2, \dots, m$ addiere zur i-ten Zeile $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ mal die 1. Zeile
Für $j = 2, \dots, n$ " " j-ten Spalte $-\frac{a_{1j}}{a_{11}}$ mal die 1. Spalte

4. Schritt: Wenn $n = 1$ oder $m = 1$, gib A zurück.
Sonst fahre mit $A' = A$ ohne 1. Zeile & Spalte rekursiv fort.

5. Schritt: Für $i = 1, \dots, k-1$ (wobei $k = \#$ Nicht-Null-Einträge)
multipliziere A von links und rechts mit invertierbaren Matrizen, s.d. der Eintrag auf der Diagonalen an Stelle (i,i) durch einen ggT von a_{ii} und $a_{i+1,i+1}$ ersetzt wird.

6. Schritt: Gib A zurück.



Bew.: Klar!

Bsp. 27.9:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2\times 3, \mathbb{Z})$$

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_2 & A \\ \hline 0 & \mathbb{1}_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 6 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 6 & 7 \\ \hline & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad 3 = (-1)\cdot 6 + 1\cdot 9 \rightsquigarrow T_1 = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 7 \\ \hline & 0 & & T_1 & \end{array}\right)$$

$$\downarrow \mathrm{I} \quad \text{III. Spalte} \mapsto \text{III.} - \tfrac{6}{3}\cdot \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & 7 \\ \hline & & -1 & -3 & 2 \\ & 0 & 1 & 2 & -2 \\ & & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad 1 = 1\cdot(-6) + 1\cdot 7 \rightsquigarrow T_2 = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \mathrm{I}$$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & -1 & -1 & 9 \\ & 0 & 1 & 0 & -2 \\ & & 0 & 1 & -6 \end{array}\right), \quad 1 = 0\cdot 3 + 1\cdot 1$$

$$\downarrow \mathrm{I} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$S = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline & & -1 & -2 & 9 \\ & 0 & 0 & -1 & -2 \\ & & 1 & 3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \mathrm{SNF}(A) \\ \\ \leftarrow T \end{array}$$

$$S \circ A \circ T = \mathrm{SNF}(A)$$

A hat das Elementarteilertupel (1, 3)

B) Elementarteilersatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen

Bsp. 27.12:

Sei $N = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{Z}} \leq \mathbb{Z}^3$

$\Rightarrow \quad M = \mathbb{Z}^3 / N \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\cdot\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$

Elementarteilersatz für e.e. Moduln über HIR 27.13

Sei R ein HIR und M ein endlich erzeugter R-Modul.

Dann: $M \cong R/\langle d_1\rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_k\rangle \oplus R^r$

Dabei sind $r \in \mathbb{N}$ eindeutig und $0 \neq d_1, \dots, d_k \in R \setminus R^*$ mit $d_i \mid d_{i+1}$ für $i = 1, \dots, k-1$.

Wir nennen r den Rang von M und $(d_1, \dots, d_k)$ das Tupel der Elementarteiler von M, und letztere sind bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig.

Beweis:

R HIR $\Rightarrow$ R noethersch $\overset{26.16}{\Longrightarrow}$ M endl. präsentiert

$\Rightarrow \exists\, A = (a_1 \dots a_n) \in \mathrm{Mat}(m \times n, R)$: $f : R^m / \langle a_1, \dots, a_n\rangle_R \xrightarrow{\cong} M$

ETS für Matrizen 27.2 $\Longrightarrow$ $\exists\, S \in Gl_m(R)$, $T \in Gl_n(R)$:

$$S \circ A \circ T = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \text{ mit } D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_k \end{pmatrix} \text{ wobei } d_i \mid d_{i+1}\ \forall i$$

T invertierbar $\Rightarrow$ f_T Isomorphismus mit

$(*)$ $\langle a_1, \dots, a_n\rangle_R = f_A(R^n) = f_A(f_T(R^n)) = f_{A\circ T}(R^n) = \langle a_1 \circ T, \dots, a_n \circ T\rangle_R$

S invertierbar $\Longrightarrow f_S : R^m \xrightarrow{\cong} R^m ; x \mapsto S\cdot x$

$\Rightarrow f_S(\langle a_1,\dots,a_n\rangle_R) \overset{(*)}{=} f_S(\langle a_1\cdot T,\dots,a_n\cdot T\rangle_R)$

$= \langle S\cdot a_1\cdot T, \dots, S\cdot a_n\cdot T\rangle_R$

$= \langle d_1\cdot e_1,\dots,d_k\cdot e_k\rangle_R$

$$\Rightarrow \overline{f_S} : R^m/\langle a_1,\dots,a_n\rangle_R \xrightarrow{\cong} R^m/\langle d_1 e_1,\dots,d_k e_k\rangle_R$$

$\ni \bar{x} \mapsto \overline{S\cdot x} \in$

$$\| $$

$$R/\langle d_1\rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_k\rangle \oplus R^{m-k}$$

O.E.: $d_i \notin R^*$, sonst können wir es auf der rechten Seite weglassen, weil dann $R/\langle d_i\rangle = \{0\}$.

Damit ist die Existenz gezeigt, die Eindeutigkeit zeigen wir später. ∎

Bsp. 27.14:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4\times 3, \mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad M = \mathbb{Z}^4/\mathrm{Im}(f_A)$$

Bestimme $S\circ A\circ T = \mathrm{SNF}(A)$ und S:

$$(\mathbb{1}_4 \,|\, A) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

STOP

$\downarrow$ Spalten: $\mathrm{II} \mapsto \mathrm{II}-\mathrm{I}$, $\mathrm{III} \mapsto \mathrm{III}-\mathrm{I}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$\Big\downarrow$ Zeilen: $\overline{II} \mapsto \overline{II} + 3\cdot \overline{I}$, $\overline{III} \mapsto \overline{III} - \overline{I}$, $\overline{IV} \mapsto \overline{IV} - \overline{I}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$\Big\downarrow$ Spalten: $\overline{III} \mapsto \overline{III} - \overline{II}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$\Big\downarrow$ Zeilen: $\overline{III} \longmapsto \overline{III} + \overline{II}$

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$\Big\downarrow$ Zeilen: $\overline{IV} \longmapsto \overline{IV} + \overline{III}$

$$\left(\underbrace{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}}_{= S} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{= SNF(A)}\right)$$

$\Rightarrow$ $(1, 2, 6)$ ist das Elementarteilertupel von A

$\Rightarrow$ $(2, 6)$ ist das ETT für $M = \mathbb{Z}^4/\operatorname{Im}(f_A)$ und $r = 4 - 3 = 1 = \operatorname{rang}(M)$

$$\Rightarrow \quad M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Konkret:

$$f: \mathbb{Z}^4/\operatorname{Im}(f_A) \longrightarrow \mathbb{Z}^4/\langle e_1, 2\cdot e_2, 6\cdot e_3\rangle \cong \underbrace{\mathbb{Z}/(1)}_{=\{0\}} \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(6) \oplus \mathbb{Z}$$

$$\overline{x} \longmapsto \overline{S \circ x}$$

c) Struktursatz für e.e. Moduln über HIR

Korollar 27.15:

Sei R ein HIR und M ein endlich-erzeugter R-Modul.

Dann: $\exists\, F \leq M$ frei : $\boxed{M = T(M) \oplus F}$

Zudem: der Rang von F ist eindeutig bestimmt.

Beweis:

$$27.12 \implies \exists\, g : \underbrace{R/\langle d_1\rangle}_{\neq \{0\},\ \neq R} \oplus \cdots \oplus \underbrace{R/\langle d_k\rangle}_{\neq \{0\},\ \neq R} \oplus R^r \xrightarrow{\cong} M$$

Setze: $N = g\left(R/\langle d_1\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle d_k\rangle\right)$, $F = g(R^r)$

$\implies$ F frei als isomorphes Bild eines freien Moduls

und $M = g\left(R/\langle d_1\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle d_k\rangle \oplus R^r\right) = N \oplus F$

Zeige: $N = T(M)$

"$\supseteq$" Sei $z \in T(M) \implies \exists\, x \in N,\ y \in F,\ \underset{\neq 0}{s} \in R : z = x + y$

und $0 = s \cdot z = \underset{\in N}{s \cdot x} + \underset{\in F}{s \cdot y} \implies s \cdot x = 0 \ \wedge\ \underset{\neq 0}{s} \cdot \underset{\in F}{y} = 0$

$\underset{\in F \text{ frei}}{\implies} y = 0$

$\implies z = x \in N$

"$\subseteq$" Sei $x \in N \implies g^{-1}(d_1 \cdots d_k \cdot x) = d_1 \cdots d_k \cdot \underbrace{g^{-1}(x)}_{\in R/\langle d_1\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle d_k\rangle} = 0$

$\implies \underbrace{d_1 \cdots d_k}_{\neq 0} \cdot x = 0 \implies x \in T(M)$

Zudem: $F \xrightarrow{\cong} M/T(M)$, $y \mapsto \bar{y}$ $\implies$ $\operatorname{rang}(F) = \operatorname{rang}(M/T(M))$ hängt nur von M ab. $\square$

Bsp. 27.16:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{Z}), \quad M = \mathbb{Z}^4 / \mathrm{Im}(f_A)$$

$$\underset{27.14}{\Longrightarrow} \quad \overline{f_S} : M \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^4 / \langle e_1, 2 \cdot e_2, 6 \cdot e_3 \rangle \cong \mathbb{Z}/\langle 1 \rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 2 \rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 6 \rangle \oplus \mathbb{Z}$$

$$T\left(\mathbb{Z}^4 / \langle e_1, 2 \cdot e_2, 6 \cdot e_3 \rangle\right) = \langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle_{\mathbb{Z}}$$

$$\Longrightarrow \quad T(M) = \overline{f_S}^{-1}\left(\langle \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \rangle_{\mathbb{Z}}\right) = \left\langle \overline{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

wobei $S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$F = \left\langle \overline{f_S}^{-1}(\overline{e}_4) \right\rangle_{\mathbb{Z}} = \left\langle \overline{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\rangle_{\mathbb{Z}}$$

Kor. 27.17:

Jeder torsionsfreie endlich erzeugte Modul über einem HIR ist frei.

Beweis:

$$27.15 \Longrightarrow \quad M = \underbrace{T(M)}_{=0} \oplus \underbrace{F}_{= \text{frei}} = F \quad \text{ist frei.}$$

$\square$

Kor. 27.18:

Untermoduln von freien endl. erz. Moduln über HIR sind frei.

Bew.:

Sei M e.e. R-Modul und frei. Sei $N \leq M$.

R HIR $\Longrightarrow$ M noeth. $\Longrightarrow$ N endl. erzeugt

und N torsionsfrei, da M torsionsfrei $\overset{27.17}{\Longrightarrow}$ N frei. $\square$

Bsp. 27.19:

ⓐ $R = K[x,y]$, $M = R$ frei, $N = \langle x, y\rangle \leq R$

$\Rightarrow$ N nicht frei, weil es kein Hauptideal ist!

aber N ist torsionsfrei!

ⓑ $R = \mathbb{Z} = HIR$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \underbrace{\langle 12, 20, 28\rangle_{\mathbb{Z}}}_{\substack{\| \\ \langle 4\rangle_{\mathbb{Z}}}} \leq M$ ist frei

D) Hauptsatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen

Bem. 27.20 (Chinesischer Restsatz)

Sei R ein HIR, $a_1, \ldots, a_l \overset{\neq 0}{\in} R$ seien p.w. teilerfremd.

Dann:

$$\begin{array}{ccc} R/\langle a_1 \cdots a_l\rangle & \xrightarrow{\cong} & R/\langle a_1\rangle \oplus R/\langle a_2\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle a_l\rangle \\ \bar{x} & \longmapsto & (\bar{x}, \ldots, \bar{x}) \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von Ringen, also auch von R-Moduln!

Hauptsatz für e.e. Moduln über HIR 27.21

Sei R ein HIR und M ein e.e. R-Modul.

Dann: $\exists\, p_1, \ldots, p_m \in R$ Primelement und $n_1, \ldots, n_m \geq 1$ sowie $r \in \mathbb{N}$

s.d. $M \cong R^r \oplus R/\langle p_1^{n_1}\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_m^{n_m}\rangle$.

Das Tupel $(r; p_1^{n_1}, \ldots, p_m^{n_m})$ heißt der Typ von M und die $p_i^{n_i}$ sind bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

Beweis: 27.12 $\Rightarrow M \cong R^r \oplus R/\langle d_1\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle d_k\rangle$

Sei nun $d_i = u \cdot q_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{n_s}$ Primfaktorzerlegung

$$\Rightarrow R/\langle d_i\rangle = R/\langle q_1^{n_1}\cdots q_s^{n_s}\rangle \underset{\substack{27.20\\ \text{Ch. Rest.}}}{\cong} R/\langle q_1^{n_1}\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle q_s^{n_s}\rangle$$

$\Rightarrow$ Existenz der Zerlegung!

Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen!

Sei dazu $f: M \longrightarrow R^r \oplus R/\langle p_1^{n_1}\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_m^{n_m}\rangle$.

$$\Rightarrow T(M) \cong R/\langle p_1^{n_1}\rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle p_m^{n_m}\rangle$$

$$\Rightarrow M/T(M) \cong R^r \Rightarrow r = \operatorname{rang}(M) \text{ eindeutig nach 27.15}$$

Sei $p \in R$ Primelement, fest gegeben.

$\Rightarrow$ • $T_p(M) := \{x \in M \mid \exists\, n \in \mathbb{N}: p^n \cdot x = 0\} \leq M$

• $\alpha_s := \left|\{ i \in \{1,\ldots,m\} \mid \langle p_i\rangle = \langle p\rangle,\ n_i > s\}\right|$

Beachte: $T_p(M) \underset{f}{\cong} \bigoplus_{\langle p\rangle = \langle p_i\rangle} R/\langle p_i^{n_i}\rangle$

• $N_s := p^s \cdot T_p(M) \cong \bigoplus_{\substack{\langle p\rangle = \langle p_i\rangle\\ s<n_i}} p^s \cdot R/\langle p_i^{n_i}\rangle = \bigoplus_{\substack{\langle p\rangle = \langle p_i\rangle\\ s<n_i}} \langle p_i^s\rangle/\langle p_i^{n_i}\rangle$

$$\Rightarrow \frac{p^s \cdot T_p(M)}{p^{s+1}\cdot T_p(M)} = \frac{N_s}{\langle p\rangle\cdot N_s} \overset{\circledast}{\cong} \bigoplus_{\substack{\langle p\rangle = \langle p_i\rangle\\ s<n_i}} \frac{\langle p_i^s\rangle}{\langle p_i^{s+1}\rangle} = \bigoplus_{\substack{\langle p\rangle = \langle p_i\rangle\\ s<n_i}} \frac{\langle p^s\rangle}{\langle p^{s+1}\rangle}$$

denn: $\dfrac{\langle p_i^s\rangle / \langle p_i^{n_i}\rangle}{\langle p_i^{s+1}\rangle / \langle p_i^{n_i}\rangle} \cong \dfrac{\langle p_i^s\rangle}{\langle p_i^{s+1}\rangle}$

Bemerkung: $N_s / \langle p\rangle \cdot N_s$ ist auch ein $K := R/\langle p\rangle$ - Modul, also ein K-UR

ist ein Körper, weil R HIR und p irreduzibel

$$\Rightarrow \dim_K \left(\frac{N_s}{\langle p\rangle \cdot N_s} \right) = \sum_{\substack{\langle p\rangle = \langle p_i\rangle \\ s < n_i}} \underbrace{\dim_K \frac{\langle p^s\rangle}{\langle p^{s+1}\rangle}}_{=1} = \alpha_s$$

hängt nur von M und p ab!

$$\Rightarrow \#\{i \mid \underset{\substack{\langle p_i\rangle = \langle p\rangle \\ n_i = s}}{\wedge}\} = \alpha_s - \alpha_{s+1}$$ hängt nur von M & p ab!

$\Rightarrow$ die Zerlegung hängt nur von M ab! $\square$

Bsp. 27.22: (greift Bsp. 27.21 auf)

$$M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\cdot\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad 6 = 2\cdot 3$$

$$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Beweis der Eindeutigkeit in 27.12:

Wir müssen nur noch zeigen, daß das Elementarteilertupel $(d_1,\dots,d_k)$ eindeutig bestimmt ist, da der Rang r nach 27.15 eindeutig ist!

Idee: Zeige wir $(d_1,\dots,d_k)$ aus dem Typen gewonnen werden kann (auf nur eine Weise!).

Sei $$M \cong R^r \oplus \bigoplus_{i=1}^{s} \bigoplus_{j=1}^{k_i} R/\langle p_i^{n_{ij}}\rangle$$ mit $\langle p_i\rangle \neq \langle p_j\rangle$ für $i \neq j$,

$$k_i \neq 0 \quad \text{und} \quad 1 \le n_{i1} \le n_{i2} \le \dots \le n_{ik_i}.$$

Setze:

- $k := \max\{k_1,\dots,k_s\}$
- $\alpha_i := (\alpha_{i1},\dots,\alpha_{ik}) := (1,\dots,1,p_i^{n_{i1}},p_i^{n_{i2}},\dots,p_i^{n_{ik_i}})$
- $d_j := \alpha_{1j}\cdot\alpha_{2j}\cdot\ldots\cdot\alpha_{sj}$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & p_1^{n_{11}} \cdots & p_1^{n_{1k_1}} \\
1 & \cdots & 1 & p_2^{n_{21}} & \cdots & p_2^{n_{2k_2}} \\
\vdots & & & & & \\
p_s^{n_{s1}} & \cdots & & & \cdots & p_s^{n_{sk_s}} \\
\hline
d_1 & \cdots & & & \cdots & d_s
\end{array}$$

$\Rightarrow$

- $d_j \mid d_{j+1}$ für $j=1,\dots,k-1$, weil $\alpha_{ij} \mid \alpha_{i,j+1}$
- $d_1 \cdot d_2 \cdot\ldots\cdot d_s = \prod_{j=1}^{k}\prod_{i=1}^{s} \alpha_{ij} = \prod_{i=1}^{s}\prod_{j=1}^{k_i} p_i^{n_{ij}}$ = Produkt aller Primzahlpotenzen in der Zerlegung!
- $d_1 \in R^*$, weil $k = \max\{k_1,\dots,k_s\}$, $\Rightarrow d_i \notin R^*$ $\forall i=1,\dots,s$

Also: $(d_1,\dots,d_k)$ ist ein Elementarteilertupel, das zudem den Typen von M liefert, wenn wir wie im Beweis von 27.21 vorgehen!

Beweis der Eindeutigkeit im Elementarteilersatz für Matrizen 27.2

Sei $A = \mathrm{Mat}(m \times n, R)$ mit Elementarteilertupel $(d_1, \dots, d_k)$

und sei j so, daß $d_1, \dots, d_{j-1} \in R^*$, $d_j \notin R^*$

$\Rightarrow$ $M = \mathbb{Z}^m / \underbrace{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}_{\text{Spalten von } A}$ ist ein e.e. Modul mit Elementarteilertupel $(d_j, \dots, d_k)$ vom Rang $m-k$

$\overset{27.12}{\Rightarrow}$ $d_j, \dots, d_k$ ist eindeutig bestimmt bis auf Einheiten und ebenso der Rang $m-k$, durch $M = \mathbb{Z}^m / \mathrm{Im}(f_A)$ also durch A, und dann sind das auch die Einheiten $d_1, \dots, d_{j-1}$!

∎

E) Klassifikation endlicher abelscher Gruppen

Bem. 27.24:

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe ist, dann ist G ein $\mathbb{Z}$-Modul. Sei $g \in G$.

Dann: $\exists\, n \geq 1 : n \cdot g = 0 \underset{\mathbb{Z}\text{-Modul}}{\Longleftrightarrow} g \in T(G)$, d.h. g ist ein Torsionselement

$\Updownarrow$

Ordnung von $G = o(g) < \infty$

Damit: $T(G) = \{ g \in G \mid o(g) < \infty \}$

Hauptsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen 27.25

Sei G eine endlich erzeugte abelsche Gruppe.

Dann: $\exists\, r \geq 0$ und Primzahlen $p_1, \dots, p_m$ und $n_1, \dots, n_m \geq 1$,

s.d. $G \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{n_m}}$

Das Tupel $(r; p_1^{n_1}, \dots, p_m^{n_m})$ heißt der Typ von G und ist bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

Außerdem ist G genau dann endlich, wenn

$G = T(G) \cong \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{n_m}}$, d.h. wenn

G eine endliche direkte Summe von zyklischen Gruppen von Primzahlpotenzordnung ist.

Beweis: 27.22 mit $R = \mathbb{Z}$. $\square$

Bem. 27.26:

Sei G eine endliche abelsche Gruppe und p eine Primzahl.

Dann: $T_p(G) = \{ g \in G \mid \exists\, n \geq 0 : o(g) = p^n \}$

$= p$-Torsionsmodul

heißt die p-Sylowgruppe von G.

Wenn $G = \mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{n_m}}$, dann:

$$T_p(G) = \bigoplus_{p_i = p} \mathbb{Z}_{p_i^{n_i}}$$

Damit gilt allgemein: $G = \bigoplus_{\substack{p \text{ Primzahl} \\ p \mid |G|}} T_p(G)$

Bsp. 27.27:

Betrachte die multiplikative Gruppe $\mathbb{Z}_{13}^*$ des Körpers $\mathbb{Z}_{13}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_{13}^*$ ist abelsch mit $|\mathbb{Z}_{13}^*| = 13 - 1 = 12 = 2^2 \cdot 3$

$\Rightarrow$ $\text{Typ}(\mathbb{Z}_{13}^*)$ ist $(2,2,3)$ oder $(2^2, 3)$

$\Downarrow$ $\mathbb{Z}_{13}^* \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$? $\Downarrow$ $\mathbb{Z}_{13}^* \cong \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?

Beachte: $\bar{5}^2 = \overline{25} = \overline{-1} \neq \bar{1} = (\overline{-1})^2 = \bar{5}^4$

$\Rightarrow$ $o(\bar{5}) = 4$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}_{13}^* \not\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$

weil keine Element der Ordnung 4 enthält

$\Rightarrow$ $\text{Typ}(\mathbb{Z}_{13}^*) = (2^2, 3)$

$\Rightarrow$ $\underset{\text{multiplikativ}}{\mathbb{Z}_{13}^*} \cong \mathbb{Z}_{2^2} \oplus \mathbb{Z}_3 \underset{\text{Chin. Restsatz}}{\cong} \underset{\text{additiv}}{\mathbb{Z}_{12}}$ ist zyklisch

E) Die Jordansche Normalform

Bem. 27.28: Sei V ein endlich-dim. K-VR und $\varphi \in \text{End}_K(V)$.

- V ein $K[t]$-Modul durch $t \cdot x := \varphi(x)$ für $x \in V$.
- $U \subseteq V$ ist $K[t]$-Untermodul $\Leftrightarrow$ U ist φ-invarianter Unterraum
- $\dim_K V < \infty$ $\Rightarrow$ V endlich erzeugt als $K[t]$-Modul
- $\chi_\varphi(\varphi) = 0$ $\Rightarrow$ $\forall x \in V: 0 = \chi_\varphi(\varphi)(x) = \underset{\neq 0}{\chi_\varphi} \cdot x$ $\Rightarrow$ $V = T(V)$ ist ein Torsionsmodul

Satz 27.29 (Rationale & Jordansche Normalform)

Sei V ein endlich-dim. K-VR und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$.

ⓐ $\exists\ \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ φ-invariante Unterräume von V,

s.d. $V = \mathcal{U}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_m$ und $\mathcal{U}_i \cong K[t]/\langle p_i^{n_i} \rangle$

wobei $p_i \in K[t]$ irreduzibel und normiert.

Dabei sind die p_i und n_i bis auf Reihenfolge eindeutig.

Zudem:
- $\chi_\varphi = p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$
- $\mu_\varphi \in \mathrm{kgV}(p_1^{n_1}, \dots, p_m^{n_m})$

ⓑ Sei $\mathcal{U} \cong K[t]/\langle p^n \rangle$ einer der Unterräume aus Teil a.

mit $p = t^d - \sum_{\ell=0}^{d-1} a_\ell \cdot t^\ell$.

Dann gibt es eine Basis B von $\mathcal{U}$, s.d.

$$M_B^B(\varphi_{\mathcal{U}}) = \begin{pmatrix} \boxed{P} & N & & 0 \\ & \boxed{P} & \ddots & \\ & & \ddots & N \\ 0 & & & \boxed{P} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{n\cdot d}(K) \quad \text{mit} \quad \underset{\substack{\cup \\ \mathrm{Mat}_d(K)}}{P} = \begin{pmatrix} a_{d-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ a_0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_d(K).$$

Man nennt $M_B^B(\varphi_{\mathcal{U}})$ die rationale Normalform von $\varphi_{\mathcal{U}}$.

ⓒ Wenn $p = t - \lambda$ ein Linearfaktor ist, dann ist

$$M_B^B(\varphi_{\mathcal{U}}) = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

ⓓ Wenn χ_φ in Linearfaktoren zerfällt, dann gibt es eine Basis B von V, s.d. $M_B^B(\varphi)$ in Jordanscher Normalform ist.

Bew:

ⓐ 27.22 $\overset{R=k[t]}{\Longrightarrow}$ $\exists\ f: V \xrightarrow[K[t]\text{-Modul-iso.}]{\sim} k[t]/\langle p_1^{n_1}\rangle \oplus \dots \oplus k[t]/\langle p_m^{n_m}\rangle$

(also auch von k-VR)

dabei sind die p_i irreduzibel und bis auf Einheiten eindeutig bestimmt, d.h. eindeutig, wenn normiert!

Setze: $U_i := f^{-1}\left(k[t]/\langle p_i^{n_i}\rangle\right)$ ist $k[t]$-Untermodul von V,

d.h. ein φ-invarianter Unterraum, und zudem

$V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$, auch als k-VR.

Beachte: $\chi_\varphi = \chi_{\varphi_{U_1}} \cdots \chi_{\varphi_{U_m}} \overset{(!)}{=} p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$

Zu (!): Sei $U_1 = U$ und $p_1 = p$ wie in Teil b.

$\Rightarrow \chi_{\varphi_U} \overset{(b)}{=} \underbrace{\chi_p \cdots \chi_p}_{n\text{-mal}} = \chi_p^n \underset{\substack{\text{ÜA} \\ \uparrow \\ \chi_p = p}}{=} p^n$

Für μ_φ:

μ_φ ist das normierte Polynom kleinsten Grades mit $\mu_\varphi(\varphi)=0$

$\Leftrightarrow \mu_\varphi$ normiert & minimal : $0 = \mu_\varphi(\varphi)(x) = \mu_\varphi \cdot x \quad \forall x \in V$

$\Leftrightarrow$ - - - - - - - - - : $0 = \mu_\varphi \cdot f(x) \quad \forall x \in V$

$\Leftrightarrow$ - - - - - - - - - : $\mu_\varphi \cdot k[t]/\langle p_i^{n_i}\rangle = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m$

$\Leftrightarrow$ - - - - - - - - - : $\mu_\varphi \in \langle p_i^{n_i}\rangle \quad \forall i = 1,\dots,m$

$\Leftrightarrow$ - - - - - - - - - : $\mu_\varphi \in \bigcap_{i=1}^{m} \langle p_i^{n_i}\rangle = \langle \mathrm{kgV}(p_1^{n_1},\dots,p_m^{n_m})\rangle$

$\Leftrightarrow$ - - - - - - - - - : $\mu_\varphi \in \mathrm{kgV}(p_1^{n_1},\dots,p_m^{n_m})$

⑥ Sei $f_1 : U \underset{\text{als } k[t]\text{-Mod.}}{\overset{\cong}{\underset{f}{\longrightarrow}}} k[t]/\langle p^n \rangle$.

Setze: $x_{i\cdot d+j} = t^j \cdot p^i$ für $i=0,\dots,n-1,\ j=0,\dots,d-1$

" normiertes Polynom vom Grad $i\cdot d+j$

$\Rightarrow (x_{i\cdot d+j} \mid i=0,\dots,n-1,\ j=0,\dots,d-1)$ ist ein k-VR-Basis vom k-VR der Polynome vom Grad $< n\cdot d$, d.h. von $k[t]_{<nd}$

$\Rightarrow (\overline{x_{i\cdot d+j}} \mid i=0,\dots,n-1,\ j=0,\dots,d-1)$ ist eine Basis von $k[t]/\langle p^n\rangle$ als k-VR

denn: $g \in k[t] \Rightarrow \exists q,r : g = q\cdot p^n + r$ mit $\deg(r) < \deg(p^n) = n\cdot d$

$\Rightarrow \overline{g} = \overline{r}$ ist eindeutig als Lin. komb. der $\overline{x_\ell}$ darstellbar!

Für $j < d-1$:

$$t \cdot \overline{x_{i\cdot d+j}} = \overline{t\cdot t^j \cdot p^i} = \overline{t^{j+1}\cdot p^i} = \overline{x_{i\cdot d+j+1}}$$

Für $j = d-1$:

$$t\cdot \overline{x_{i\cdot d+j}} = \overline{t^d \cdot p^i} = \overline{\left(p + \sum_{\ell=0}^{d-1} a_\ell t^\ell\right)\cdot p^i}$$

$$= \overline{p^{i+1}} + \sum_{\ell=0}^{d-1} a_\ell \cdot \overline{t^\ell \cdot p^i} = \begin{cases} \overline{x_{(i+1)\cdot d}} + \sum_{\ell=0}^{d-1} a_\ell \cdot \overline{x_{i\cdot d+\ell}}, & i<d-1 \\ \sum_{\ell=0}^{d-1} a_\ell \cdot \overline{x_{i\cdot d+\ell}}, & i=d-1 \end{cases}$$

$\overline{p^n} = \overline{0}$

Setze: $y_k := f^{-1}(\overline{x_{n\cdot d-k}})$ für $k = 1,\dots,n\cdot d$

$\Rightarrow B := (y_1,\dots,y_k)$ ist eine Basis von U

Zudem: $\varphi_u(y_k) = t \cdot y_k = f^{-1}(t \cdot f(y_k)) = f^{-1}(\underbrace{t \cdot \bar{x}_{ud-k}}_{\sum_{i=0}^{ud-1} c_{ik} \bar{x}_i})$

$$= \sum_{i=0}^{ud-1} c_{ik} \cdot f^{-1}(\bar{x}_i) = \sum_{i=0}^{ud-1} c_{ik} \cdot g_{ud-i}$$

$\Rightarrow$ Beh. in Teil (b).

(c) & (d) folgen automatisch aus (a) & (b). $\square$

Beispiel 27.31:

$\varphi = f_A = \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3)$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Berechne die Elementarteiler von $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul mittels φ

- $\chi_A = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ -1 & t-2 & 1 \\ 1 & 0 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)^3$

- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{Eig}(A,2) = 3 - \mathrm{rang}(A - 2\cdot \mathbb{1}) =$

$$= 3 - \mathrm{rang}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

- Also: $J_A = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & 2 & 1 \\ & & 2 \end{array}\right) \Rightarrow (t-2, (t-2)^2)$

Tupel der Elementarteiler von $\mathbb{Q}^3$ als $\mathbb{Q}[t]$-Modul mittels $\varphi = f_A$. $\square$