Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 23.01.2025, 10:00

Aufgabe 16: Zeige, $\mathbb{Z}[i]$ ist ein euklidischer Ring mit der euklidischen Funktion

$$\nu : \mathbb{Z}[i] \longrightarrow \mathbb{N} : z = a + i \cdot b \mapsto |z|^2 = a^2 + b^2.$$

Aufgabe 17: Bestimme mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus' einen normierten größten gemeinsamen Teil der beiden Polynome

$$f = t^5 + \overline{2} \cdot t^4 + \overline{3} \cdot t + \overline{3} \in \mathbb{Z}_5[t]$$

und

$$g = t^4 + \overline{2} \cdot t^3 + \overline{2} \cdot t^2 + \overline{3} \cdot t + \overline{2} \in \mathbb{Z}_5[t].$$

Aufgabe 18: Es sei K ein Körper und $0 \neq f \in K[t]$.

(a) Zeige, f hat in K höchstens $\deg(f)$ Nullstellen.

(b) Zeige, wenn $\deg(f) \in \{2, 3\}$, dann ist f genau dann reduzibel, wenn f in K eine Nullstelle hat.

Aufgabe 19: Sie R ein Integritätsbereich. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) R ist ein Körper.

(b) $R[t]$ ist ein euklidischer Ring.

(c) $R[t]$ ist ein Hauptidealring.

Präsenzaufgabe 14: Wir betrachten das Polynom $f = t^2 + t + 1 \in \mathbb{Z}_2[t]$ und den Faktorring $K = \mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$.

(a) Zeige, f ist irreduzibel.

(b) Zeige, K ist ein Körper mit genau 4 Elementen.

(c) Stelle die Additions- und Multiplikationstabelle für K auf.

(d) Ist K isomorph zum Ring $\mathbb{Z}_4$ oder zum Ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$?

(e) Betrachten wir den Polynomring $K[x]$ über K in der Unbestimmten x. Ist das Polynom $g = x^2 + x + \overline{1} \in K[x]$ irreduzibel? Hat g eine Nullstelle in K?

Anmerkung, in dieser Aufgabe wollen wir die Elemente $\overline{0}$ und $\overline{1}$ in $\mathbb{Z}_2$ der Einfachheit halber mit 0 und 1 bezeichnen, wobei $1 + 1 = 0$ gilt. Das ist deshalb sinnvoll, weil auch die Elemente von $\mathbb{Z}_2[t]/\langle f \rangle$ wieder Restklassen sind, und die doppelten Restklassen (z.B. $\overline{t + \overline{1}}$) für unnötige Verwirrung sorgen.

Präsenzaufgabe 15: Bestimme mit Hilfe des Chinesischen Restsatzes *alle* Lösungen des Kongruenzgleichungssystems:

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \pmod 4 \\ x &\equiv 3 \pmod 7 \\ x &\equiv -7 \pmod{15} \end{aligned}$$