Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 09.01.2025, 10:00

Aufgabe 13:

(a) Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_6$.

(b) Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Z}_6 \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(c) Finde alle Ringhomomorphismen $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 14:

(a) Bestimme die Einheitengruppe im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

(b) Gib ein Beispiel für einen kommutativen Ring mit Eins R und eine Einheit $f \in R[t]^*$ mit $\deg(f) > 0$.

(c) Bestimme die Einheitengruppen $\mathbb{Z}_6^*$, $\mathbb{Z}_8^*$ und $\mathbb{Z}_{15}^*$ und stelle eine Vermutung auf, wann $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ für $n \geq 2$ eine Einheit ist.

Aufgabe 15: Sei R ein Integritätsbereich, $a, b \in R$.

(a) Ist $g \in \mathrm{ggT}(a, b)$, dann ist $\mathrm{ggT}(a, b) = \{u \cdot g \mid u \in R^*\}$, d.h. ein größter gemeinsamer Teiler ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

(b) Ist $k \in \mathrm{kgV}(a, b)$, dann ist $\mathrm{kgV}(a, b) = \{u \cdot k \mid u \in R^*\}$, d.h. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

Präsenzaufgabe 13:

(a) Zeige, ist $p = x + y \cdot i \in \mathbb{Z}[i]$ so, dass $|p|^2 = x^2 + y^2$ eine Primzahl in $\mathbb{Z}$ ist, dann ist p irreduzibel in $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Finde ein Beispiel für eine Zahl p wie in Teil (a).