Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2024
Thomas Markwig | Blatt 5

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 12.12.2024, 10:00

Aufgabe 10:

Zeige, die Untergruppe $U = \langle (1\ 2\ 3), (2\ 3\ 4)\rangle \leq \mathbb{S}_4$ hat die Ordnung $|U| = 12$.

Hinweis: wenn man die Ergebnisse aus Kapitel 4 der Vorlesung verwendet, braucht man die Elemente von U nicht auszurechnen!

Aufgabe 11:

(a) Betrachte für $m, n, a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ das Element $\left(\overline{a}_m, \overline{b}_n\right) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ in der Gruppe $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n, +)$. Zeige, dass sich die Ordnung dieses Elementes wie folgt berechnen läßt

$$o\Big(\left(\overline{a}_m, \overline{b}_n\right)\Big) = \mathrm{kgv}\left(o\left(\overline{a}_m\right), o\left(\overline{b}_n\right)\right) = \mathrm{kgv}\left(\frac{\mathrm{kgv}(a,m)}{a}, \frac{\mathrm{kgv}(b,n)}{b}\right)$$

und dass sie ein Teiler von $\mathrm{kgv}(m,n)$ ist.

(b) Zeige, $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ ist nicht zyklisch, wenn m und n nicht teilerfremd sind.

(c) Berechne die Ordnung von $\left(\overline{10}_{24}, \overline{12}_{34}\right) \in \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{34}$.

Aufgabe 12: Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins, der nur endlich viele Elemente enthält. Zeige, dann ist jedes Element $a \in R$ entweder eine Einheit oder es gibt ein $0 \neq b \in R$ mit $a \cdot b = 0$.

Hinweis: für $a \in R$ betrachte man die Abbildung $R \longrightarrow R : x \mapsto a \cdot x$.

Präsenzaufgabe 12:

(a) Bestimme alle Polynome f in $\mathbb{Z}_2[t]$ vom Grad 4, deren Leitkoeffizient $\mathrm{lc}(f)$ und deren konstanter Koeffizient $f(0)$ beide $\overline{1}$ sind. Welche dieser Polynome sind irreduzibel? Beweise Deine Aussage.

(b) Zeige, dass die Menge

$$\mathbb{Z}[i] := \{x + y \cdot i \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$$

ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.