Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 28.11.2024, 10:00

Aufgabe 7: Es sei G eine endliche Gruppe und $U \leq G$ eine Untergruppe vom Index $|G : U| = 2$. Zeige, U ist ein Normalteiler von G.

Aufgabe 8: Wir betracten die folgenden Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$$

in der Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$, sowie die Menge

$$U = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2, I, -I, J, -J, K, -K\}.$$

(a) Zeige, U ist eine Untergruppe von $(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C}), \circ)$.

(b) Bestimme alle Untergruppen und Normalteiler von U.

Anmerkung: U ist NICHT die Gruppe aus Aufgabe 1 auf Blatt 2.

Hinweis: in Teil (b) berechne man für jedes Element aus U die Ordnung; das hilft beim Bestimmen der Untergruppen.

Aufgabe 9:

(a) Zeige, ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $U \leq G$ eine Untergruppe und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler von G. Beweise den ersten Isomorphiesatz

$$U \cdot N/N \cong U/U \cap N.$$

(b) Bestimme alle Gruppenhomomorphismen $\alpha : \mathbb{Z}_{35} \longrightarrow \mathbb{S}_3$.

Präsenzaufgabe 11: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige:

(a) Sind $g, h \in G$ mit $o(g) = o(h) = p$, wobei p eine Primzahl ist, dann gilt $\langle g \rangle = \langle h \rangle$ oder $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{e\}$.

(b) Falls $|G| = 10$, so gibt es zwei Elemente $g, h \in G$ mit:

- $o(g) = 2$,
- $o(h) = 5$,
- $\langle h \rangle \trianglelefteq G$,
- $\langle g \rangle \cdot \langle h \rangle = G$.

Hinweis, führe in Teil (b) zunächst die folgenden beiden folgenden Möglichkeiten zum Widerspruch: 1. $o(k) = 2$ für alle $e \neq k \in G$, 2. $o(k) = 5$ für alle $e \neq k \in G$.

Anmerkung, in Teil (b) nennt man G das semidirekte Produkt von $\langle g \rangle$ und $\langle h \rangle$. Man kann zeigen, falls $g \cdot h = h \cdot g$, so ist G isomorph zu $\mathbb{Z}_{10}$, andernfalls ist G isomorph zu $\mathbb{D}_{10}$. Das braucht hier aber nicht gemacht zu werden.