Fachbereich Mathematik Wintersemester 2024

Thomas Markwig Blatt 2

Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Abgabetermin: Donnerstag, 31.10.2024, 10:00

Aufgabe 1: Wir betracten die folgenden Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$$

in der Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$, sowie die Menge

$$U = \{\mathbb{1}_2, -\mathbb{1}_2, I, -I, J, -J, K, -K\}.$$

(a) Zeige, U ist eine Untergruppe von $(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{C}), \circ)$.

(b) Berechne die Erzeugnisse $\langle I \rangle$ und $\langle I, J \rangle$.

(c) Ist U eine zyklische Gruppe?

Hinweis zu Teil (a): stelle eine Multiplikationstabelle für U auf und lese alles daraus ab.

Aufgabe 2: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und

$$\mathrm{Inn}(G) = \{i_g : G \longrightarrow G : h \mapsto g \cdot h \cdot g^{-1} \mid g \in G\}$$

die Menge der *inneren Automorphismen* von G. Zeige, $\mathrm{Inn}(G)$ ist eine Untergruppe von $(\mathrm{Sym}(G), \circ)$.

Aufgabe 3: Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeige, genau dann ist

$$\mathrm{inv} : G \longrightarrow G : g \mapsto g^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus, wenn $(G, \cdot)$ abelsch ist.

Präsenzaufgabe 5: Wir definieren für $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$v \sim w \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \,:\, v = \lambda \cdot w$$

wobei $\lambda \cdot w := (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2)$.

(a) Zeige, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist. Es ist üblich die Äquivalenzklasse $\overline{(v_1, v_2)}$ von (v_1, v_2) mit $(v_1 : v_2)$ zu bezeichnen, und man nennt die Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen die *projektive Gerade* über $\mathbb{R}$ und bezeichnet sie mit $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

(b) Wir definieren auf $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ eine zweistellige Operation durch

$$(v_1 : v_2) \cdot (w_1 : w_2) := (v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 : v_1 \cdot w_2 + v_2 \cdot w_1).$$

Zeige, daß diese Operation wohldefiniert ist, d.h. nicht von der Wahl der Repräsentanten für die Äquivalenzklasse abhängt, und daß $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ mit dieser Operation eine Gruppe ist.