Fachbereich Mathematik Wintersemester 2024

Thomas Markwig Blatt 1

# Lineare Algebra 2 - Algebraische Strukturen

Die Aufgaben sind Präsenzaufgaben und brauchen nicht zur Korrektur eingereicht zu werden. Sie werden in der ersten Übungsstunde bearbeitet und besprochen.

**Präsenzaufgabe 1:** Es sei $M$ eine Menge.

(a) Zeige, sind $X, Y, Z \subseteq M$, dann gelten

$$X \setminus \big((Y \setminus Z) \cup (Z \setminus Y)\big) = \big(X \setminus (Y \cup Z)\big) \cup (X \cap Y \cap Z)$$

und

$$\big((X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)\big) \setminus Z = \big(X \setminus (Y \cup Z)\big) \cup \big(Y \setminus (X \cup Z)\big).$$

(b) Wir definieren auf der Potenzmenge $G = \mathcal{P}(M) = \{A \mid A \subseteq M\}$ von $M$ eine zweistellige Operation durch

$$A + B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

für $A, B \in G$. Zeige, $(G, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

**Präsenzaufgabe 2:**

(a) Untersuche, ob $G = \{2 + 3z \mid z \in \mathbb{Z}\}$ mit der Multiplikation ganzer Zahlen als Verknüpfung eine Gruppe ist.

(b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ wird $\mathbb{R}$ mit der folgenden zweistelligen Operation eine Gruppe:

$$x * y = ax + ay + b \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Präsenzaufgabe 3:** Es sei $(G, \cdot)$ ein Gruppe mit neutralem Element $e$. Zeige, falls $g^2 = e$ für alle $g \in G$, so ist $G$ abelsch.

**Präsenzaufgabe 4:** Überprüfe, ob die Menge

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R}, (a, b) \neq (0, 0) \right\}$$

eine Untergruppe von $\big(\mathrm{Gl}_2(\mathbb{R}), \cdot\big)$ ist.