Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 30.01.2025, 10:00

Aufgabe 19: Zeige, für einen R-Modul M sind die folgenden Aussagen äquivalnt:

(a) Jeder Untermodul von M ist endlich erzeugt.

(b) Jede nicht-leere Menge von Untermoduln von M enthält ein maximales Element.

(c) Jede aufsteigende Kette $N_1 \subseteq N_2 \subseteq \ldots$ von Untermoduln von M wird stationär, d.h. es gibt ein n, so daß $N_k = N_n$ für alle $k \geq n$.

Aufgabe 20: [Satz von Cayley-Hamilton]
Sei M ein endlich-erzeugter R-Modul, $f \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ ein Endomorphismus und I ein Ideal in R.

(a) Zeige, es gibt ein normiertes Polynom $\chi = t^n + p_1 \cdot t^{n-1} + \ldots + p_n \in R[t]$, so dass $\chi(f) = 0$ die Nullabbildung ist.

(b) Zeige, wenn $f(M) \subseteq I \cdot M$, dann kann χ so gewählt werden, dass $p_i \in I^i$ gilt.

Hinweise: Betrachte M als $R[t]$-Modul vermittels $t \cdot m := f(m)$; betrachte für $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle_R$ eine Matrix $A = (a_{ij})$ mit $f(m_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot m_i$ und verwende die Adjunktenformel für die Matrix $t \cdot \mathbb{1}_n - A$.

Präsenzaufgabe 6:

(a) Berechne die Smith-Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & -2 \\ 7 & 4 & 0 & 7 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 5, \mathbb{Z}).$$

Bestimme zudem Basen für den Kern und das Bild von f_A.

(b) Bestimme das Tupel der Elementarteiler für den folgeden $\mathbb{Z}$-Modul

$$M = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{81} \oplus \mathbb{Z}_{125} \oplus \mathbb{Z}_{101} \oplus \mathbb{Z}_{243}.$$

Hinweis: für diese Aufgabe werden die Vorlesungen von der kommenden Woche benötigt.

Präsenzaufgabe 7: Sei $A = (a_1 \ldots a_n) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ eine Matrix mit $\det(A) \neq 0$ und sei $M = \mathbb{Z}^n / \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathbb{Z}}$. Zeige, $|M| = |\det(A)|$.