Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 16.01.2025, 10:00

Aufgabe 16: Zeige, daß die Abbildung α in Aufgabe 15 ein Isomorphismus ist.

Hinweis: man betrachte eine Basis von V sowie die duale Basis von V^* und die sich daraus ergebenede Basis von $V^* \wedge V^*$. Für ein $\psi \in \mathrm{Alt}_K(V^2, K)$ kann man dann ein Urbild unter α als Linearkombination der Basisvektoren konstruieren.

Aufgabe 17: Berechne die Determinante der folgenden Matrix mittels Entwicklung nach den ersten beiden Spalten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{F}_3).$$

Aufgabe 18: Es sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Zeige oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) Wenn f surjektiv ist, dann ist $\bigwedge^r f$ surjektiv.

(b) Wenn f injektiv und $B = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von V ist, dann ist die Familie $\big(f(x_{i_1}) \wedge \ldots \wedge f(x_{i_r}) \,\big|\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n\big)$ eine Basis von $\mathrm{Im}\left(\bigwedge^r f\right)$.

(c) Wenn f injektiv und $\dim_K(V) < \infty$ ist, dann ist $\bigwedge^r f$ injektiv.

(d) Wenn f injektiv ist, dann ist $\bigwedge^r f$ injektiv.

Präsenzaufgabe 5: Wir betrachten für die Algebra

$$\bigwedge \mathbb{R}^2 = \bigwedge^0 \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^1 \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}$$

die Basis $B = (1, e_1, e_2, e_1 \wedge e_2)$ sowie den Vektorraumisomorphismus

$$M_B : \bigwedge \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

der durch die Matrixdarstellung bezüglich B gegeben ist. Ferner bezeichne $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^4$.

(a) Stelle die Multiplikationstafel für die Basis B auf.

(b) Wir können M_B zu einem Algebrenisomorphismus machen, indem wir auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation durch

$$x \cdot y := M_B\big(M_B^{-1}(x) \cdot M_B^{-1}(y)\big)$$

definieren. Berechne das Produkt $x \cdot y$ für $x, y \in \mathbb{R}^4$ explizit.