

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 19.12.2024, 10:00

Aufgabe 13: Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

- (a) Ist V ein K -Vektorraum und sind $0 \neq x, y \in V$ mit $x \wedge y = y \wedge x$, dann gilt $x = y$.
(b) In $\wedge^2 \mathbb{R}^2$ gilt die Gleichheit

$$(1, 0)^t \wedge (2, 2)^t + (0, 2)^t \wedge (1, 1)^t = 0.$$

Aufgabe 14: Es sei V ein K -Vektorraum und $r \geq 1$. Zeige, für den Unterraum V_r aus Definition 22.6 gilt:

$$V_r = \text{Lin}(x_1 \otimes \dots \otimes x_r \mid x_i \in V \forall i = 1, \dots, r; \exists 1 \leq i \leq r-1 : x_i = x_{i+1}).$$

Aufgabe 15: Es sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum.

- (a) Zeige, für $f, g \in V^*$ ist die Abbildung

$$\alpha_{f,g} : V^2 \longrightarrow K : (x, y) \mapsto \det \begin{pmatrix} f(x) & f(y) \\ g(x) & g(y) \end{pmatrix}$$

bilinear und alternierend.

- (b) Zeige, daß es genau eine lineare Abbildung

$$\alpha : V^* \wedge V^* \longrightarrow \text{Alt}(V^2, K)$$

mit

$$\alpha(f \wedge g) = \alpha_{f,g}$$

für $f, g \in V^*$ gibt.

Präsenzaufgabe 4: Es sei $E = (e_1, \dots, e_4)$ die Standardbasis des \mathbb{R}^4 und es sei

$$x = (e_1 - e_4) \wedge (e_2 + e_3).$$

- (a) Zeige, die folgende Abbildung ist linear:

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \wedge^3 \mathbb{R}^4 : y \mapsto y \wedge x.$$

- (b) Bestimme die Matrixdarstellung $M_B^E(f)$ von f bezüglich der Basen E von \mathbb{R}^4 und $B = (e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4)$ von $\wedge^3 \mathbb{R}^4$.