Fachbereich Mathematik Wintersemester 2024
Thomas Markwig Blatt 4

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 05.12.2024, 10:00

Aufgabe 10: Es seien V und W zwei unendlich-dimensionale K-Vektorräume.

(a) Zeige, es gibt genau eine K-lineare Abbildung

$$\beta : V^* \otimes W \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V, W),$$

so dass

$$\beta(f \otimes y)(x) = f(x) \cdot y$$

für alle $x \in V$, $f \in V^*$ und $y \in W$ gilt.

(b) Beweise oder widerlege, dass diese ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 11: Es seien $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ und $g \in \mathrm{Hom}_K(V', W')$ zwei K-lineare Abbildungen. Beweise die folgenden Aussagen oder gib ein Gegenbeispiel an:

(a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $f \otimes g$ injektiv.

(b) Wenn $f \otimes g$ injektiv ist, dann sind auch f und g injektiv.

Aufgabe 12: Seien V und W zwei K-Vektorräume der Dimensionen $\dim_K(V) = m$ und $\dim_K(W) = n$ und seien $f \in \mathrm{End}_K(V)$ und $g \in \mathrm{End}_K(W)$ zwei Endomorphismen mit charakteristischen Polynomen

$$\chi_f = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_m)$$

und

$$\chi_g = (t - \mu_1) \cdot \ldots \cdot (t - \mu_n).$$

Bestimme das charakteristische Polynom von $f \otimes g \in \mathrm{End}_K(V \otimes_K W)$.

Präsenzaufgabe 3: Bestimme die Dehninvariante eines gleichseitigen Tetraeders mit Seitenlänge 1 und zeige, daß sie nicht der Nulltensor ist.