Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig Wintersemester 2024
Blatt 3

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 21.11.2024, 10:00

Für die Bearbeitung der Aufgaben darf Korollar 20.11 schon genutzt werden:
Sind $(x_i \mid i \in I)$ und $(y_j \mid j \in J)$ Basen V und W, dann ist $(x_i \otimes y_j \mid i \in I, j \in J)$ Basis von $V \otimes W$.

Aufgabe 7: Es sei V ein K-Vektorraum und $x, y \in V$.
Zeige, genau dann gilt $x \otimes y = y \otimes x$, wenn x und y linear abhängig sind.

Aufgabe 8:

(a) Die bilineare Abbildung

$$\psi : K[\,t\,]_{\leq d} \times K[\,t\,]_{\leq d} \longrightarrow K[\,t\,]_{\leq 2d} : (f, g) \mapsto f \cdot g$$

induziert eine lineare Abbildung

$$f_\psi : K[\,t\,]_{\leq d} \otimes K[\,t\,]_{\leq d} \longrightarrow K[\,t\,]_{\leq 2d}.$$

Bestimme die Dimension des Kerns von f_ψ.

(b) Berechne im Fall $d = 2$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(f_\psi)$ in Teil b.

Aufgabe 9: Seien U, V und W K-Vektorräume. Zeige, es gibt genau eine K-lineare Abbildung

$$\psi : (U \oplus V) \otimes W \longrightarrow (U \otimes W) \oplus (V \otimes W)$$

mit

$$\psi\big((x, y) \otimes z\big) = (x \otimes z, y \otimes z)$$

für alle $x \in U$, $y \in V$ und $z \in W$, und ψ ist ein Isomorphismus.

Präsenzaufgabe 3:

(a) Bestimme den Rang des Tensors

$$(1,1,0)^t \otimes (1,2,1)^t + (2,2,2)^t \otimes (0,2,1)^t + (0,0,2)^t \otimes (2,1,1)^t \in \mathbb{F}_3^3 \otimes \mathbb{F}_3^3.$$

(b) Interpretiere den Vektorraum $\mathrm{Mat}(4 \times 3, \mathbb{R})$ als Tensorprodukt $\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^3$ und schreibe den Tensor

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

als minimale Summe reiner Tensoren.