Fachbereich Mathematik | Wintersemester 2024
Thomas Markwig | Blatt 2

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 07.11.2024, 10:00

Aufgabe 4: Wir bezeichnen mit e_i den i-ten Einheitsvektor im K^m, $i = 1, \ldots, m$ und mit f_j den j-ten Einheitsvektor im K^n, $j = 1, \ldots, n$. Ferner bezeichne $E_i^j \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ die Matrix mit einer Eins an Position (i, j) als einzigem Nicht-Null-Eintrag.

(a) Zeige, daß es genau eine bilineare Abbildung

$$b : K^m \times K^n \longrightarrow \mathrm{Mat}(m \times n, K)$$

gibt mit

$$b(e_i, f_j) = E_i^j$$

für alle $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Sei W ein K-Vektorraum und sei

$$c : K^m \times K^n \longrightarrow W$$

eine bilineare Abbildung. Zeige, dann gibt es genau eine lineare Abbildung

$$f : \mathrm{Mat}(m \times n, K) \longrightarrow W,$$

so daß $f \circ b = c$ gilt.

Aufgabe 5:

(a) Bestimme für die folgende symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}_5(\mathbb{R})$ mit Hilfe des symmetrischen Gaußalgorithmus' eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{Gl}_5(\mathbb{R})$, so daß $T^t \circ A \circ T$ eine Diagonalmatrix wie im Sylvesterschen Trägheitssatz ist, und bestimme den Trägheitsindex, den Morseindex, die Signatur und den Rang:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeige, daß die folgende Familie eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist und bestimme die duale Basis B^* als Vektoren in $\mathrm{Mat}(1 \times 4, \mathbb{R})$:

$$B = \big((1,0,0,2)^t, (0,1,1,0)^t, (2,0,1,4)^t, (1,2,2,3)^t\big).$$

Aufgabe 6: Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien $g_1, \ldots, g_n \in V^*$. Zeige, genau dann ist die Familie $(g_1, \ldots, g_n)$ linear unabhängig in V^*, wenn es keinen Vektor $0 \neq x \in V$ gibt, so das $g_i(x) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Präsenzaufgabe 2: Zeige, für zwei Unterräume U_1 und U_2 von V gilt $(U_1 + U_2)^\circ = U_1^\circ \cap U_2^\circ$.