Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Wintersemester 2024
Blatt 1

Lineare Algebra 2 - Multilineare Algebra

Abgabetermin: Donnerstag, 24.10.2024, 10:00

Aufgabe 1: Wir betrachten die Abbildung

$$b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : \big((x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t\big) \mapsto 2 \cdot x_1 \cdot y_1 + x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2 - 2 \cdot x_2 \cdot y_2.$$

Zudem bezeichne $E = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$ und $B = (x_1, x_2)$ mit $x_1 = (1, 1)^t$ und $x_2 = (1, -1)^t$ sei eine weitere Basis.
Zeige, daß b eine symmetrische Bilinearform ist und berechne die Matrixdarstellungen $M_E(b)$ und $M_B(b)$ sowie die Transformationsmatrix T_E^B mit

$$M_B(b) = \left(T_E^B\right)^t \cdot M_E(b) \cdot T_E^B.$$

Aufgabe 2: Sei $b \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$.

(a) Zeige, es gibt eine symmetrische Bilinearform $b' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$ und eine schiefsymmetrische Bilinearform $b'' \in \mathrm{Bil}_{\mathbb{R}}(V)$, so daß $b = b' + b''$.

(b) Zeige, die Bilinearformen b' und b'' in a. sind eindeutig bestimmt.

Anmerkung, b heißt *schiefsymmetrisch*, wenn $b(x, y) = -b(y, x)$ für alle $x, y \in V$.

Aufgabe 3: Wir betrachten die Bilinearform

$$b_A : K^2 \times K^2 \longrightarrow K,$$

die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Beweise oder widerlege, daß es zwei lineare Abbildungen $f, g : K^2 \longrightarrow K$ gibt, so daß für alle $x, y \in K^2$ die Gleichung gilt:

$$b_A(x, y) = f(x) \cdot g(y).$$

Präsenzaufgabe 1: Sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{R})$$

gegeben. Bestimme eine invertierbare Matrix T, die die symmetrische Matrix A diagonalisiert, d.h. so daß $T^t \circ A \circ T$ Diagonalgestalt hat. Bestimme auch den Trägheitsindex, den Morseindex und die Signatur von A.