Fachbereich Mathematik
Thomas Markwig

Sommersemester 2015, Blatt 15

Yue Ren

Grundlagen der Mathematik 1

Die Lösungen müssen nicht eingereicht werden und werden auch nicht korrigiert. Die Aufgaben sind aber eine wichtige Vorbereitung auf die Klausur und es wird eine Musterlösung geben. Zudem können in den Tutorien Fragen gestellt werden.

Aufgabe 57:

(a) Berechne den Rang von

$$\begin{pmatrix} 0 & b & b & b \\ a & 0 & b & b \\ a & a & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 4, \mathbb{R}).$$

(b) Bestimme die Inversen der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

(c) Transformiere die folgende Matrix A in Normalform bezüglich Äquivalenz und gib auch die Transformationsmatrizen S und T^{-1} an:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -7 & 10 & -1 \\ -2 & 4 & -7 & 2 \\ 3 & -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R}).$$

(d) Prüfe ob das folgende Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ lösbar ist und berechne ggf. die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 6y & + & 2z & = & 4 \\ 2x & - & 2y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & 4y & - & 2z & = & 1 \end{array}$$

(e) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & & & z & = & ab \\ -2x & + & by & + & az & = & -b \\ & & by & + & (a+1)z & = & b \end{array}$$

außer $(b, 1, 0)$ noch weitere Lösungen. Bestimme sie.

(f) Überprüfe die folgende Abbildung auf Injektivität und Surjektivität:

$$g : \mathbb{F}_5^4 \longrightarrow \mathbb{F}_5^4 \ : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + x_4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

(g) Bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes von f_A mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_5(\mathbb{Q}).$$

(h) Berechne die Determinanten der folgenden Matrizen über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 58:

(a) Es sei $U = \langle (1,2,3,4)^t, (1,1,1,1)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Bestimme mit Hilfe des Austauschsatzes von Steinitz eine Basis von $\mathbb{R}^4/U$.

(b) Es sei $U = \{(a_1, \ldots, a_5)^t \in \mathbb{R}^5 \mid a_1 - 2a_2 = 0 = 2a_4 + a_5\} \leq \mathbb{R}^5$. Bestimme die Dimension von U sowie eine Basis, die den Vektor $(2,1,1,-1,2)^t$ enthält.

(c) Es seien $U = \langle (1,0,1,1)^t, (-1,1,0,0)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle (1,0,1,0)^t, (1,1,1,1)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$. Zeige, $\mathbb{R}^4 = U \oplus U'$.

(d) Es sei $V = \mathbb{F}_5^3$, $U = \{(x+y, y, y-x)^t \mid x, y \in \mathbb{F}_5\}$ und $U' = \{(x,y,z)^t \in \mathbb{F}_5^3 \mid z = 2x+y\}$. Bestimme Basen von $U + U'$, $U \cap U'$, V/U und V/U'.

(e) Bestimme eine Basis für $U \cap U'$ mit $U = \langle (2,-1,1,-1)^t, (1,-2,2,1)^t, (3,-1,0,2)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$ und $U' = \langle (3,-2,3,8)^t, (2,1,-5,3)^t \rangle \leq \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 59: Es sei $B = \big((1,1,1,1)^t, (-1,0,0,1)^t, (0,-1,0,1)^t, (0,0,-1,1)^t\big)$ und $D = \big((1,1,0)^t, (0,1,1)^t, (0,0,1)^t\big)$.

(a) Zeige, daß B eine Basis des $\mathbb{R}^4$ und D eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Für $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3, x_2 + x_4)^t$ bestimme $M_D^B(f)$.

(c) Bestimme umgekehrt die Funktionsvorschrift für $g \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3\right)$ mit

$$M_D^B(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 60: Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $B = (x_1, x_2, x_3)$ eine Basis von V und $B' = (y_1, y_2, y_3)$ mit $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_2$ und $y_3 = x_1 + x_2 + x_3$.

(a) Zeige, daß B' eine Basis von V ist.

(b) Bestimme $M_{B'}^{B'}(f)$, wobei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ gegeben ist durch

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -b & a & a \\ a & b & b \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}.$$